Так, например, при развитом пузырьковом кипении интенсивность теплоотдачи практически не зависит ни от диаметра нагревателя, ни от скорости обтекающей его жидкости. Исходные данные взяты из работ [1—4].

Поступила 28 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кутателадзе С. С., Маленков И. Г.** Гидрогазодинамические аспекты теплообмена при кипении жидкостей.— ТВТ, 1976, № 14 (4).
2. **Авксентюк Б. П., Кутателадзе С. С.** Неустойчивость режима теплообмена на поверхностях, обедненных центрами парообразования.— ТВТ, 1977, т. 15, № 1.
3. **Кутателадзе С. С.** Теплообмен при кипении и барботаже при свободной конвекции жидкости.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1979, vol. 22, p. 281.
4. **Кутателадзе С. С., Гогонин И. И.** Теплоотдача при пленочной конденсации медленно двигающегося пара.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1979, vol. 22, p. 1593.

УДК 534.222

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЗОВЗВЕСЯХ

А. А. Борисов, А. Ф. Вахгельт, В. Е. Накоряков

(*Новосибирск*)

Процесс распространения и структура возмущения давления (плотности, скорости либо температуры) в объеме, где находятся твердые частицы, имеют важное теоретическое и прикладное значение. Особый интерес представляет структура нестационарного возмущения, так как часто размеры технических устройств, где используются гетерогенные среды, таковы, что стационарная структура не успевает сформироваться. К таким устройствам относятся ракетные двигатели на твердом топливе (РДТТ) и атомные реакторы с дисперсным теплоносителем.

В работе [1] приводится уравнение для описания эволюции волн конечной амплитуды в среде с аэрозолем. Это уравнение имеет вид уравнения Бюргерса, дополненного интегральными членами, которые учитывают процессы механической и тепловой релаксации. Причем теплообмен между фазами учитывается по закону Ньютона, хотя при существенно нестационарном режиме использование этого закона является грубым приближением.

В данной работе основное внимание уделяется получению и анализу уравнений для эволюции возмущений конечной амплитуды, когда в системе протекает один релаксационный процесс, обусловленный нестационарным теплообменом между частицами и газом.

Объемная доля твердых частиц предполагается настолько малой, что взаимодействием между отдельными частицами пренебрегается. Это ограничение позволяет рассматривать задачу о детальных процессах теплообмена независимо от общей динамической задачи.

Будем считать, что на длине волны содержится достаточное количество частиц, так что выполняется условие сплошности смеси. Возмущения рассматриваются плоские, длинноволновые. При сформулированных предположениях распространение возмущений можно изучать в рамках гомогенной модели [2].

Рассматривается эволюция возмущений по газовзвеси, содержащей твердые частицы одинакового радиуса δ, с плотностью ρ_p и температурой Θ в приближении односкоростной модели. Число частиц m считается постоянным в единице объема, а их объем таким малым, что им в уравнениях сохранения можно пренебречь по сравнению с объемом, занятым газом [2].

Пренебрегая вязкостью и теплопроводностью в уравнениях сохранения и оставляя только тепловое взаимодействие между фазами, имеем для описания процесса следующую систему уравнений:

(1)
$$\rho_t + (u\rho)_x = 0,\ \rho u_t + \rho u u_x + R(\rho\vartheta)_x = 0,$$
$$\rho c_V \vartheta_t + \rho c_V u \vartheta_x + R\rho\vartheta u_x = Q,\ \Theta_t - a\Theta_{rr} - (2a/r)\Theta_r = 0.$$

Первые три уравнения есть уравнения неразрывности, движения и энергии для идеального газа, где ρ, u, ϑ — плотность, скорость и температура газа; Q — суммарный тепловой поток от газа к облаку частиц; R—универсальная газовая постоянная; c_V — удельная изохорная теплоемкость. Четвертое уравнение системы (1) служит для определения теплового взаимодействия между частицей и газом, где a — коэффициент температуропроводности; r — текущий радиус. Оно решается при граничных условиях

(2)
$$t = 0,\ \Theta = \Theta_0 = 0,$$
$$r = \delta \text{ при } t > 0,\ \Theta = \Theta_\delta = \vartheta(t),\ \partial\Theta/\partial r|_{r=0} = 0.$$

Это уравнение может решаться и при граничных условиях III рода.

Рассмотрим решение уравнения теплопроводности для частиц при граничных условиях (2). Оно имеет вид [3]

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\delta}{r_n\pi}(-1)^{n+1} \sin\left(n\pi\frac{r}{\delta}\right)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \vartheta(\tau)\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\delta^2}(t-\tau)}\, d\tau.$$

Величина теплового потока к частице запишется в виде

$$q_p = \lambda_p\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)_{r=\delta} = -\frac{2\lambda_p}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \vartheta(\tau)\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\delta^2}(t-\tau)}\, d\tau,$$

где λ_p — коэффициент теплопроводности частицы. В случае $n^2\pi^2 a(t-\tau)/\delta^2 \gg 1$ реализуется длинноволновый (низкочастотный) предел, когда $\vartheta(\tau)$ является слабоменяющейся функцией и ее можно разложить в ряд в окрестности точки t по малому запаздыванию $(t-\tau)$:

$$\vartheta(\tau) = \vartheta(t) - \frac{\partial\vartheta}{\partial t}(t-\tau) + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}(t-\tau)^2 - \ldots$$

Ограничиваясь членами первого порядка малости, подставим два первых члена разложения под интеграл. С учетом того, что при $n^2\pi^2 a(t-\tau)/\delta^2 \to \infty$ $\exp[-n^2\pi^2 a(t-\tau)/\delta^2] \to 0$ (уже при $n^2\pi^2 a(t-\tau)/\delta^2 > 4{,}6$ $\exp[-n^2\pi^2 a \times (t-\tau)/\delta^2] < 0{,}01$), окончательно получим

$$\int_0^t \vartheta(\tau)\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a}{\delta^2}(t-\tau)}\, d\tau = K\vartheta(t) - L\frac{\partial\vartheta}{\partial t},$$

где $K = \dfrac{\delta^2}{n^2\pi^2 a}$; $L = \dfrac{\delta^4}{n^4\pi^4 a^2}$ и тепловой поток

(3)
$$q_p = \sum_{n=1}^{\infty} -2\frac{\lambda_p}{\delta}\left[K\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - L\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right] = -A'\rho_p c_p\delta\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + B'\rho_p c_p\delta\frac{\delta^2}{a}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2},$$

где c_p — удельная теплоемкость материала частиц;

$$A' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2} = \frac{1}{3};\quad B' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^4\pi^4} = \frac{1}{45}.$$

С учетом полученного выражения (3) уравнение энергии для газа запишется как

$$\rho\vartheta_t + \rho u\vartheta_x + \rho\frac{R}{c_V}\vartheta u_x = -A\rho_p\vartheta_t + \tau'_p\rho_p\vartheta_{tt}, \tag{4}$$

$$A = M\frac{c_p}{c_V}, \quad \tau'_p = M\frac{c_p}{c_V}\frac{\delta^2}{15a}, \quad M = \frac{4}{3}\pi\delta^3 m.$$

При этом наш процесс теперь будет описываться первым и вторым уравнениями системы (1) и уравнением (4).

Рассмотрим распространение бесконечно малых возмущений в такой системе. Будем считать, что отклонения от равновесных значений плотности, скорости и температуры ($(\rho-\rho_0)/\rho_0$, u/c_∞, $(\vartheta-\vartheta_0)/\vartheta_0$) являются величинами первого порядка малости. Подставляя $\rho = \rho_0 + \rho'$, $u = u'$, $\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta'$ в систему полученных уравнений и отбрасывая члены второго и выше порядка малости, получим

$$\begin{gathered}\rho'_t + \rho_0 u'_x = 0, \quad \rho_0 u'_t + \rho_0 R\vartheta'_x + R\vartheta_0\rho'_x = 0,\\ \vartheta'_t(\rho_0 + A\rho_p) + \rho_0(\varkappa - 1)\vartheta_0 u'_x - \tau'_p\rho_p\vartheta'_{tt} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Система (5) является исходной для получения одного волнового уравнения, описывающего распространение звуковых волн в данных средах. Решение этой системы ищем в виде бегущих волн ($x > 0$) $\rho' \sim \rho_0 \exp i \times (kx - \omega t)]$, $u' \sim c_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, $\vartheta' \sim \vartheta_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, где между волновым числом k и частотой ω имеется функциональная связь, причем k, вообще говоря,— комплексная величина. Эта связь определяется из условия совместности решений системы (5), которое приводит к уравнениям

$$\begin{gathered}\tau_p\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{tt} - c_\infty^2 u_{xx}\right) - Du_{tt} + c_0^2 u_{xx} = 0,\\ \tau_p\omega^3 - iD\omega^2 - k^2\omega\tau_p c_\infty^2 + ik^2 c_0 = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $D = \dfrac{\rho_0 + A\rho_p}{\rho_0}$; $R\vartheta_0 = c_\infty^2$; $R\vartheta_0\dfrac{\varkappa\rho_0 + A\rho_p}{\rho_0} = c_0^2$; $\tau_p = \tau'_p\rho_p/\rho_0$.

Для фазовой скорости $V_p = \omega/k$ получим из (6)

$$V_p = \left[\left(c_\infty^2\omega\tau_p - ic_0^2\right)/(\omega\tau_p - iD)\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Выделяя в последнем выражении вещественную $V_{p\mathrm{R}}$ и мнимую $V_{p\mathrm{Im}}$ части, имеем

$$V_{p\mathrm{Im}}^2 = -\frac{Dc_0^2 + \omega^2\tau_p^2 c_\infty^2}{2\left(\omega^2\tau_p^2 + D^2\right)} + \sqrt{\frac{\left(\omega^2\tau_p^2 c_\infty^4 + c_0^4\right)\left(\omega^2\tau_p^2 + D^2\right)}{4\left(\omega^2\tau_p^2 + D^2\right)^2}}; \tag{8}$$

(9)

$$V_{p\mathrm{R}}^2 = \frac{\omega^2\tau_p^2\left(Dc_\infty^2 - c_0^2\right)^2}{2\left(\omega^2\tau_p^2 + D^2\right)\left[-\left(Dc_0^2 + \omega^2\tau_p^2 c_\infty^2\right) + \sqrt{\left(Dc_0^2 + \omega^2\tau_p^2 c_\infty^2\right)^2 + \left(\omega\tau_p Dc_\infty^2 - \omega\tau_p c_0^2\right)^2}\right]}.$$

Эти выражения справедливы для малых значений $\omega\tau_p$, так как мы заранее ставили ограничение $\omega\tau_p < 1$. Разлагая фазовую скорость в ряд вблизи $\omega\tau_p = 0$, ограничимся членами первого порядка малости по $\omega\tau_p$:

$$V_p = V_p(\omega\tau_p = 0) + \left.\frac{\partial V_p}{\partial(\omega\tau_p)}\right|_{\omega\tau_p = 0}\omega\tau_p + O[(\omega\tau_p)^2].$$

Вычисляя коэффициенты при степенях $\omega\tau_p$ с помощью уравнения (7), найдем

$$V_p = \frac{c_0}{\sqrt{D}} - i\frac{c_0^2 - Dc_\infty^2}{Dc_0^2}\frac{c_0}{\sqrt{D}}\frac{\omega\tau_p}{2} + O\left[(\omega\tau_p)^2\right],$$

действительная дисперсия

$$V_{pR} = \frac{c_0}{\sqrt{D}} \tag{10}$$

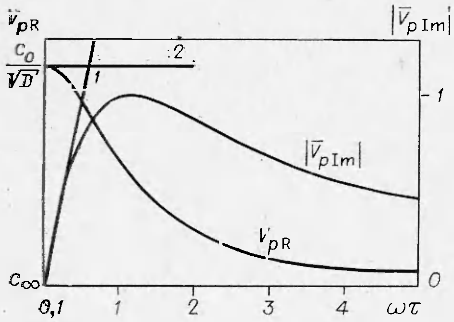
и мнимая

$$V_{p\mathrm{Im}} = -\frac{c_0^2 - Dc_\infty^2}{Dc_0^2}\frac{c_0}{\sqrt{D}}\frac{\omega\tau_p}{2}. \tag{11}$$

Асимптотические зависимости (10), (11) хорошо описывают поведение полных дисперсионных кривых (8), (9) в области

$$0 < \omega\tau_p < \left[\frac{c_0^2 - Dc_\infty^2}{Dc_0^2}\right]^{1/2}.$$

На фигуре представлены дисперсионные кривые системы уравнений (5) для медных частиц размером 30 мкм и весовой концентрации 0,1; кривые *1—2* — асимптотическое поведение мнимой и реальной дисперсии соответственно;



$$|\bar{V}_{p\mathrm{Im}}| = |V_{p\mathrm{Im}}|/\max|V_{p\mathrm{Im}}|.$$

Рассмотрим волны конечной амплитуды, бегущие в положительном направлении. Для этого перейдем к сопровождающей системе координат $\tau = t - x/c_\infty$. Так как амплитуды волн малы, то искажения профиля волны, вызванные как диссипацией, так и нелинейностью, будут также малы на расстояниях порядка длины волны и процесс должен описываться функцией вида $\Phi(\mu x, \tau)$, где μ — величина первого порядка малости. В соответствии с заменой имеем

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{c_\infty}\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\frac{\partial}{\partial x}.$$

Тогда система первых двух уравнений (1) и (4) с точностью до второго порядка малости запишется в переменных τ и x в виде

$$\frac{\partial\rho'}{\partial\tau} - \frac{\rho_0}{c_\infty}\frac{\partial u'}{\partial\tau} + \mu\rho_0\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\rho'}{c_\infty}\frac{\partial u'}{\partial\tau} - \frac{u'}{c_\infty}\frac{\partial\rho'}{\partial\tau} = 0,$$

$$\rho_0\frac{\partial u'}{\partial\tau} + \rho'\frac{\partial u'}{\partial\tau} - \frac{\rho_0 R}{c_\infty}\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau} + \mu\rho_0 R\frac{\partial\vartheta'}{\partial x} - \frac{\rho_0 u'}{c_\infty}\frac{\partial u'}{\partial\tau} - \frac{R\rho'}{c_\infty}\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau} - \tag{12}$$

$$- \frac{R\vartheta_0}{c_\infty}\frac{\partial\rho'}{\partial\tau} + \mu R\vartheta_0\frac{\partial\rho'}{\partial x} - \frac{R\vartheta'}{c_\infty}\frac{\partial\rho'}{\partial\tau} = 0,$$

$$\rho_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau} + \rho'\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau} - \frac{\rho_0 u'}{c_\infty}\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau} - \frac{\rho_0\vartheta_0(\varkappa-1)}{c_\infty}\frac{\partial u'}{\partial\tau} + \mu\rho_0\vartheta_0(\varkappa-1)\frac{\partial u'}{\partial x} -$$

$$- \frac{\rho'\vartheta_0(\varkappa-1)}{c_\infty}\frac{\partial u'}{\partial\tau} - \frac{\rho_0\vartheta'(\varkappa-1)}{c_\infty}\frac{\partial u'}{\partial\tau} + A\rho_p\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau} - \tau_p\rho_p\frac{\partial^2\vartheta'}{\partial\tau^2} = 0.$$

Известно [4], что одно уравнение в частных производных k порядка можно свести к системе k уравнений первого порядка. Аналогично систему k уравнений первого порядка в частных производных иногда с помощью дифференцирования удается свести к одному уравнению k порядка. Одно уравнение, естественно, проще поддается физическому анализу, и часто только получение одного уравнения является целью многих работ. Замечательным при таком подходе является тот факт, что полученное уравнение оказывается иногда уже известным и подробно проанализированным.

Система уравнений (12) сводится к одному уравнению аналогично [5]. Для этого домножим первое уравнение системы на $1/\rho_0$, второе на $1/\rho_0 c_\infty$ и третье на $1/\rho_0\vartheta_0$. Складывая полученные уравнения между собой и заменяя во всех членах второго порядка малости ρ'/ρ_0 на u'/c_∞ и ϑ'/ϑ_0 на $(\varkappa - 1)u'/c_\infty$, приходим к уравнению Бюргерса

$$2\mu\varkappa\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{u'}{c_\infty^2}\frac{\partial u'}{\partial \tau}(\varkappa^2+2) - \frac{\partial u'}{\partial \tau}\frac{1}{c_\infty}\left(1 - A\frac{\rho_p}{\rho_0}\right)(\varkappa-1) -$$

$$- \frac{\tau_p\rho_p}{\rho_0}\frac{(\varkappa-1)}{c_\infty}\frac{\partial^2 u'}{\partial \tau^2} = 0$$

или в безразмерном виде, вводя 2μ в x, имеем

(13)
$$\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{(\varkappa^2+2)}{\varkappa} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\left(1 - A\frac{\rho_p}{\rho_0}\right)\frac{\varkappa-1}{\varkappa} -$$

$$- \frac{\tau_p}{T}\frac{\rho_p}{\rho_0}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0,$$

где T — период волны. Коэффициент, стоящий при $\partial^2 u/\partial\tau^2$, есть вязкость газовзвеси

$$\nu_c = c_\infty^2\frac{\delta^2}{15a}\frac{c_p}{c_V}\frac{\rho_p}{\rho_0}M$$

в размерном виде. Обратная подстановка $u'/c_\infty = \rho'/\rho_0$ и $\vartheta'/\vartheta_0 = (\varkappa-1) \times \rho'/\rho_0$ или $u'/c_\infty = \vartheta'/(\varkappa-1)\vartheta_0$ и $\rho'/\rho_0 = \vartheta'/(\varkappa - 1)\vartheta_0$ приводит к тому же уравнению для приращения плотности ρ' и температуры ϑ'. Такой же подход по учету теплообмена между пузырьком газа и окружающей жидкостью при прохождении волны возмущения применялся в [6].

Таким образом, распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газовзвесях описывается уравнением Бюргерса с коэффициентами, в которые входит информация об индивидуальных характеристиках частиц. Показано, что нестационарный теплообмен между частицами и газом в волне приводит к появлению релаксационной вязкости. Данный эффект получен впервые. Решение этого уравнения рассматривалось в работах [5, 7], в частности, с помощью известной подстановки Хопфа уравнение (13) может быть сведено к линейному уравнению теплопроводности. Качественно оно описывает эволюцию ударной волны, в которой нелинейность уравновешивается релаксационной вязкостью, возникающей здесь за счет нестационарного теплообмена между фазами. Финитные возмущения ослабляются с течением времени так, что их амплитуда падает до нуля.

Можно показать, что если учесть продольную теплопроводность и сдвиговую вязкость в первоначальной системе уравнений, то они линейным образом добавляются к полученной релаксационной вязкости.

Поступила 10 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Davidson G. A.** A Burgers equation approach to finite amplitude acoustic in aerosol media.— J. Sound and Vibr., 1975, vol. 38, N 4.
2. **Marble F. E.** Dynamics of dusty gases.— In: Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 2. N. Y., 1970.
3. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
4. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964.
5. **Руденко О. В., Солуян С. И.** Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
6. **Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р.** Приближение Бюргерса — Кортевега — де Вриза в волновой динамике газожидкостных систем.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977.
7. **Карпман В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.

УДК 532.69

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

О. В. Воинов, В. В. Пухначев

(*Москва, Новосибирск*)

1. Уравнения движения. Пусть в области пространства Ω находится вязкая несжимаемая жидкость с газовыми пузырьками. Число пузырьков достаточно велико, так что можно указать такое число $a \ll d$, где d — диаметр Ω, что любой шар радиуса a, принадлежащий Ω, содержит число пузырьков $N \gg 1$. Пузырьки считаются сферическими одинакового радиуса R. Если характерное расстояние между центрами пузырьков l достаточно мало по сравнению с характерным расстоянием L, на котором меняются средние параметры смеси, то применимы представления механики гетерогенных сред (см., например, [1]).

Если внешние массовые силы малы и ускорение жидкости также мало, то основным источником движения является неоднородность температурного поля в жидкости и порождаемый ею термокапиллярный эффект [2].

Обозначим через c объемную концентрацию газа, через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — осредненные скорости газовой и жидкой фаз соответственно и через T — температуру. Точное (в рамках представлений сплошной среды) уравнение неразрывности для жидкой фазы имеет вид

$$\partial(1-c)/\partial t + \operatorname{div}[(1-c)\mathbf{v}] = 0. \tag{1.1}$$

Если допустить, что плотность газа $\rho_g = \text{const}$, то уравнение неразрывности для газовой фазы подобно (1.1):

$$\partial c/\partial t + \operatorname{div}(c\mathbf{u}) = 0. \tag{1.2}$$

Возможный процесс обмена газом между пузырьком и жидкостью за счет процессов растворения во внимание не принимается. Для простоты не будем учитывать и более важные процессы коагуляции пузырьков, что до некоторой степени оправдано в случае разреженной системы.

Учитывая, что сдвиговая вязкость суспензии газовых пузырьков равна $(1+c)\nu$, где ν — вязкость жидкости, и пренебрегая квадратичными членами порядка c^2 в вязких напряжениях, можно записать уравнение импульсов жидкости

$$(1-c)d\mathbf{v}/dt = -\rho^{-1}\nabla p + (1-c)\mathbf{g} + 2\operatorname{div}[(1+c)\nu S], \tag{1.3}$$