О ПОСТУЛАТЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

Г. А. Геммерлинг

(Москва)

Рассматривается обобщение принципа Друккера [1]. Показано, что для полученного закона течения сохраняются все основные выводы теории течения. Использование предлагаемого постулата приводит в частных случаях к существенным ограничениям на допустимый вид функции нагружения. Предлагается упрощенная модель, базирующаяся на втором инварианте девиатора напряжений.

§ 1. Используемый в теории пластичности ассоциированный закон течения является следствием постулата Друккера [1]. В дальнейшем считаем материал несжимаемым $\nu = 0.5$, поэтому ищем связь между девиаторами s_{ij} и ε_{ij}. Введем обозначения

$$D_0 = \int \Delta s_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad D_1 = \int \Delta s_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad D_0' = \int \Delta s_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad D_1' = \int \Delta s_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad I_1' = \int s_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

Здесь интегралы D_0, D_1, D_0', D_1', I_1' вычисляются вдоль дуг ABC, $ABCBA$, $A'B'C'$, $A'B'C'B'A'$, $A'B'C'B'A'$ соответственно (фиг. 1), причем первые две кривые (без штриха) лежат в пространстве s_{ij}, а вторые — в пространстве ε_{ij}.

Рассмотрим работу, выполненную внешним воздействием, которое медленно добавляет к существующим в материале напряжениям новую систему напряжений (путь ABC), а затем снимает ее (путь CBA). Воздействие это считается отличным от сил, вызвавших состояние A. Постулат Друккера заключается в утверждении

$$D_0 > 0, \qquad D_1 \geqslant 0 \tag{1.2}$$

Разъясняя смысл (1.2), Друккер указывает: упрочнение означает, что за время такого цикла нельзя извлечь энергию из материала и системы сил, действующих на него. Чтобы создать в материале пластическую деформацию, материалу надо еще сообщить некоторую энергию [1].

Действительно, данные экспериментов [2, 3] позволяют утверждать, что рост пластических деформаций сопровождается увеличением энергии материала. Однако D_0 и D_1, вообще говоря, не есть энергия, полученная материалом от внешнего воздействия Δs_{ij}. При пластическом деформировании часть работы внешнего воздействия рассеялась в виде теплоты в окружающее материал пространство (процесс изотермический), и энергия ΔE, сообщенная материалу внешним воздействием, вычисляется по формуле

$$\Delta E = \int \Delta s_{ij} d\varepsilon_{ij} - \int dq = \int f \Delta s_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{1.3}$$

где $\int dq$ — рассеянная теплота. Выдвинем следующий постулат пластичности для изотермических процессов (сравни утверждение Друккера):

1°. Энергия, сообщенная материалу внешним воздействием в процессе его приложения, больше нуля.

2°. Энергия, полученная материалом от внешнего воздействия за полный цикл его приложения и снятия, больше нуля, если в материале появились дополнительные пластические деформации

$$\Delta E_0 > 0, \qquad \Delta E_1 \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Индексы при ΔE имеют тот же смысл, что и при D.

Функция f в (1.3) характеризует меру накопления материалом энергии. В упругом процессе $f = 1$ ($\int dq = 0$), в пластическом процессе $0 < f \leqslant 1$. Экспериментальные данные о функции f смотри [2, 3].

Принимаем, что в упругой области приращения девиаторов связаны законом Гука $ds_{ij} = 2G d\varepsilon_{ij}$, причем пластическое деформирование не приводит к появлению деформационной анизотропии и не влияет на величину G. Упругим адиабатическим изменением температуры T пренебрегаем. Указанные ограничения несущественны для развиваемой теории и впоследствии могут быть отброшены. Считаем, что f — функция состояния.

§ 2. 1°. Из (1.4) можно вывести закон пластического течения. Зададим направления AB и BC (фигура) единичными «векторами» a_{ij} и b_{ij}, а положение точки на AB и BC — координатами s, t ($0 \leqslant s \leqslant s_1$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$). Имеем

$$\begin{array}{llll}
\Delta s_{ij} = a_{ij} s, & d\varepsilon_{ij} = a_{ij} ds / 2G, & f = 1 & \text{на } AB \text{ и } BA \\
\Delta s_{ij} = a_{ij} s_1 + b_{ij} t, & d\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{\cdot}_{ij} dt, & f = f_B + t\,(df/dt)_B & \text{на } BC \\
\Delta s_{ij} = a_{ij} s_1 + b_{ij} t, & d\varepsilon_{ij} = b_{ij} dt / 2G, & f = 1 & \text{на } CB
\end{array}$$

Отсюда

$$\Delta E_1 = \int_0^t \left\{ \left[f_B + \left(\frac{df}{dt}\right)_B t \right] \varepsilon^{\cdot}_{ij} - \frac{b_{ij}}{2G} \right\} (a_{ij} s_1 + b_{ij} t)\, dt \geqslant 0 \qquad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем точка означает производную по времени.

Это неравенство должно выполняться при любых a_{ij}, b_{ij}, s_1, t_1. Пусть $s_1 \gg t_1$, $s_1 \to 0$. Тогда

$$\Delta E_1 = [f_B \varepsilon^{\cdot}_{ij} - b_{ij}/2G]\, a_{ij} s_1 t_1 + o\,(s_1 \cdot t_1) \geqslant 0 \qquad (2.2)$$

Так как выражение в квадратных скобках не зависит от a_{ij}, s_1, t_1, а a_{ij} — любой «вектор», лежащий в упругой области, то выполнение требуемого неравенства возможно тогда и только тогда, когда (см. соотношение на BC)

$$p_{ij} \equiv f\varepsilon^{\cdot}_{ij} - s^{\cdot}_{ij}/2G = \lambda^{\cdot}\, \partial\varphi/\partial s_{ij}, \qquad b_{ij} = s^{\cdot}_{ij} = \Delta s^{\cdot}_{ij} \qquad (2.3)$$

Пусть $s_1 = 0$, $t_1 \to 0$. Тогда из (1.2)

$$\Delta E_1 = p_{ij} b_{ij} t_1^2 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad \lambda^{\cdot}\, \delta\varphi \geqslant 0 \qquad (\delta\varphi = s^{\cdot}_{ij}\, \partial\varphi/\partial s_{ij}). \qquad (2.4)$$

Так как при нагружении $\delta\varphi \geqslant 0$, то

$$\lambda^{\cdot} \geqslant 0 \qquad (2.5)$$

Таким образом

$$\varepsilon^{\cdot}_{ij} = \frac{s^{\cdot}_{ij}}{2Gf} + \frac{\lambda^{\cdot}}{f} \frac{\partial\varphi}{\partial s_{ij}} \qquad \begin{pmatrix} \lambda^{\cdot} \geqslant 0, & 0 < f \leqslant 1, \text{ если } \varphi = 0, \ \delta\varphi \geqslant 0 \\ \lambda^{\cdot} = 0, & f = 1, \text{ если } \varphi < 0 \text{ или } \delta\varphi < 0 \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

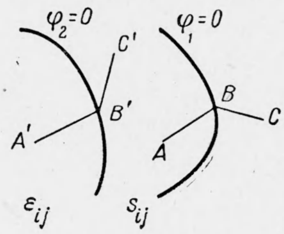
Легко показать, что $\Delta E_0 > 0$, если (2.6) имеет место, т. е. (1.4) удовлетворены.

2°. Отметим одно свойство D_1 [4]. Если дополнительные воздействия в результате их приложения и снятия переводят материал в его первоначальное деформированное состояние ($A'B'C'B'A'$), то с точностью до членов порядка $s_1 t_1$ имеет место равенство

$$D_1 = D_1' \quad \text{при } s_1 \gg t_1, \ s_1 \to 0 \qquad (2.7)$$

Если s_{ij}° — произвольное постоянное напряженное состояние, то для цикла $A'B'C'B'A'$ имеем (2.8)

$$\int s_{ij}^{\circ}\, d\varepsilon_{ij} = 0, \quad \text{или} \quad D_1 = I_1' \quad \text{при } s_1 \gg t_1, \ s_1 \to 0$$



Прямым вычислением можно показать, что с той же точностью

$$\Delta E_1 = \Delta E_1' \quad \text{при } s_1 \gg t_1, \ s_1 \to 0 \qquad (2.9)$$

Однако для цикла $A'B'C'B'A'$

$$\int f s_{ij}^{\circ}\, d\varepsilon_{ij} \neq 0$$

поэтому переход к аналогу (2.8) невозможен. Заметим, что при $s_1 = 0$, $t_1 \to 0$ (2.9) не имеет места.

3°. Для доказательства общих теорем необходимо конкретизировать вид функции $\lambda^{\cdot}$. Положим $\lambda^{\cdot} = h\,\delta\varphi$. В начале пластического течения $f \approx 1$, $D_1 \approx \Delta E_1$ и такой выбор $\lambda^{\cdot}$ обеспечивает обращение (2.6) в ассоциированный закон течения. Имеем из (2.6)

$$\varepsilon^{\cdot}_{ij} = \frac{s^{\cdot}_{ij}}{2Gf} + \frac{h}{f} \frac{\partial\varphi}{\partial s_{ij}}\, \delta\varphi \qquad \begin{pmatrix} h > 0, & 0 < f \leqslant 1, \text{ если } \varphi = 0, \ \delta\varphi \geqslant 0 \\ h = 0, & f = 1, \text{ если } \varphi < 0 \text{ или } \delta\varphi < 0 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

Величина h не зависит от $s^{\cdot}_{ij}$.

4°. Для закона течения (2.10) не существует нейтрального пути нагружения, т. е. при $\varphi = 0$, $\delta\varphi = +0$

$$\varepsilon^{\cdot}_{ij} \neq s^{\cdot}_{ij}/2G, \quad \text{если } f \neq 1 \qquad (2.11)$$

Таким образом, если наложить крутящее напряжение на предварительно растянутую за предел текучести трубку, получим $G_i < G$, где G_i — мгновенный модуль сдвига. Этот эффект действительно наблюдается в экспериментах [5–8]. Однако обычно его объясняют наличием угловой точки на поверхности нагружения или проявлением деформационной анизотропии. Из (2.10) видно, что подобный эффект можно объяснить, не используя двух указанных предположений. В некоторых экспериментах [9–12] $G_i \approx G$. Однако во всех этих экспериментах на предварительной стадии деформирования (растяжение) создавались ничтожные пластические деформации. Тогда $f \approx 1$ и $G_i \approx G$.

§ 3. Для идеально пластических тел вместо (2.6) имеем

$$\varepsilon^{\cdot}_{ij} = \frac{s^{\cdot}_{ij}}{2Gf} + \frac{\lambda}{f}\frac{\partial\varphi}{\partial s_{ij}} \qquad \begin{pmatrix} \lambda > 0,\ 0 < f \leqslant 1, & \text{если } \varphi = 0, & \delta\varphi = 0 \\ \lambda = 0,\ f = 1, & \text{если } \varphi < 0 & \text{или } \delta\varphi < 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Для идеально пластического тела из (2.2) можно получить дальнейшие следствия. Назовем [14] напряженное состояние, лежащее внутри упругой области «безопасным» $s_{ij}^{(s)}$, а состояние, лежащее внутри упругой области или на ее границе,— «допустимым» $s_{ij}^{(a)}$. Тогда, как и в [14]

$$[s_{ij} - s_{ij}^{(s)}]\, p_{ij} > 0, \qquad [s_{ij} - s_{ij}^{(a)}]\, p_{ij} \geqslant 0 \tag{3.2}$$

Для любых скоростей $s^{\cdot}_{ij}$ и соответствующих p_{ij} вместо (2.5) имеем

$$p_{ij}s^{\cdot}_{ij} = 0 \tag{3.3}$$

Если же $s^{\cdot}_{ij\,(1)}$, $s^{\cdot}_{ij\,(2)}$ и $p_{ij\,(1)}$, $p_{ij\,(2)}$ — две системы скоростей изменения напряжений $(s_{ij(1)} = s_{ij(2)})$ и соответствующие им p_{ij}, то, как и в [14]

$$s^{\cdot}_{ij(1)}p_{ij(2)} \leqslant 0, \qquad s^{\cdot}_{ij(2)}p_{ij(1)} \leqslant 0 \tag{3.4}$$

Заменяя в (3.3), (3.4) p_{ij} согласно (2.3), получим

$$s^{\cdot}_{ij(1)}\varepsilon^{\cdot}_{ij(1)} = s^{\cdot}_{ij(1)}s^{\cdot}_{ij(1)} \,/\, 2Gf, \qquad s^{\cdot}_{ij(1)}\varepsilon^{\cdot}_{ij(2)} \leqslant s^{\cdot}_{ij(1)}s^{\cdot}_{ij(2)} \,/\, 2Gf \tag{3.5}$$

Соотношения (3.5) позволяют доказать все общие теоремы для идеально пластических тел.

§ 4. Для законов течения (2.10) и (3.1) справедливы те же самые вариационные принципы, что и для ассоциированного закона течения; справедливы теоремы единственности решения краевой задачи для скоростей изменения напряжений ($\sigma^{\cdot}_{ii}$ произвольно) и для скоростей изменения деформаций (для упрочняющихся тел); справедлива теорема единственности обращения соотношений между $s^{\cdot}_{ij}$ и $\varepsilon^{\cdot}_{ij}$. Не стоит останавливаться на формулировке этих общих теорем, так как они полностью соответствуют аналогичным теоремам для ассоциированного закона течения. Доказательства этих теорем могут быть получены теми же методами, что и в [14].

Выпишем только обращение соотношений между $\varepsilon_{ij}^{\cdot}$ и $s_{ij}^{\cdot}$. Для законов течения (2.10) и (3.1) имеем соответственно

$$s^{\cdot}_{ij} = \frac{1}{b}\left[\varepsilon^{\cdot}_{ij} - \frac{(\partial\varphi \,/\, \partial s_{\alpha\beta})\, \varepsilon^{\cdot}_{\alpha\beta}\, (\partial\varphi \,/\, \partial s_{ij})}{b \,/\, h + (\partial\varphi \,/\, \partial s_{mn})\, (\partial\varphi \,/\, \partial s_{mn})}\right], \qquad b = \frac{1}{2Gf} \tag{4.1}$$

$$s^{\cdot}_{ij} = \frac{1}{b}\left[\varepsilon^{\cdot}_{ij} - \frac{(\partial\varphi \,/\, \partial s_{\alpha\beta})\, \varepsilon^{\cdot}_{\alpha\beta}\, (\partial\varphi \,/\, \partial s_{ij})}{(\partial\varphi \,/\, \partial s_{mn})\, (\partial\varphi \,/\, \partial s_{mn})}\right], \qquad \lambda = \frac{\varepsilon^{\cdot}_{\alpha\beta}(\partial\varphi \,/\, \partial s_{\alpha\beta})}{(\partial\varphi \,/\, \partial s_{mn})\, (\partial\varphi \,/\, \partial s_{mn})} \tag{4.2}$$

§ 5. Рассмотрим частный класс поверхностей нагружения

$$\varphi \equiv \varphi\,(s_{ij},\, \varepsilon_{ij}) = 0 \tag{5.1}$$

Как показано в [15], для поверхностей нагружения (5.1) функция $\lambda^{\cdot}$ в (2.6) может быть вычислена явно

$$\frac{\lambda^{\cdot}}{f} = -\frac{[(\partial\varphi \,/\, \partial s_{ij}) + b\, (\partial\varphi \,/\, \partial\varepsilon_{ij})]\, s^{\cdot}_{ij}}{(\partial\varphi \,/\, \partial s_{\alpha\beta})\, (\partial\varphi \,/\, \partial\varepsilon_{\alpha\beta})} \tag{5.2}$$

Согласно (2.5), $\lambda^{\cdot} \geqslant 0$. Но из (5.2) следует, что при некоторых $s^{\cdot}_{ij}$ $\lambda^{\cdot}$ может быть меньше нуля, если не налагать никаких ограничений на функцию нагружения или пути нагружения. Будем считать, что допустимы любые пути нагружения, и найдем условия, которым должна удовлетворять φ. Если воспользоваться векторным представлением тензоров, то легко показать, что необходимыми и достаточными условиями неотрицательности $\lambda^{\cdot}$ при любых $s^{\cdot}_{ij}$ будут

$$(\partial\varphi / \partial\varepsilon_{ij}) (\partial\varphi / \partial s_{ij}) < 0, \quad \partial\varphi / \partial\varepsilon_{ij} = \psi\, \partial\varphi / \partial s_{ij}, \quad 1 + b\psi > 0, \quad \psi < 0 \tag{5.3}$$

Здесь ψ — произвольная функция, не зависящая от скоростей, удовлетворяющая в любой момент нагружения двум последним неравенствам. В этом случае

$$\frac{\lambda^{\cdot}}{f} = -\frac{(1 + b\psi)\,\delta\varphi}{(\partial\varphi / \partial s_{ij}) (\partial\varphi / \partial\varepsilon_{ij})} \geqslant 0 \tag{5.4}$$

Если можно подобрать подходящую $\psi = \psi_0 = \text{const}$, то условиям (5.3) удовлетворяет функция нагружения

$$\varphi \equiv (s_{ij} - |\,\psi_0\,|\,\varepsilon_{ij}) (s_{ij} - |\,\psi_0\,|\,\varepsilon_{ij}) = \text{const} \tag{5.5}$$

(Поступательное движение первоначальной поверхности нагружения (сфера) как жесткого целого.)

§ 6. Выделим в законе течения (2.10) тензор

$$\varepsilon^{\cdot\prime}_{ij} \equiv \varepsilon^{\cdot}_{ij} - s^{\cdot}_{ij} / 2G \equiv (1 - f)\, s^{\cdot}_{ij} / 2Gf + h\, (\delta\varphi / f) (\partial\varphi / \partial s_{ij}) \tag{6.1}$$

Очевидно, что этот тензор отличен от нуля только при пластическом течении, так как в упругом процессе

$$\varepsilon^{\cdot}_{ij}{}' \equiv s^{\cdot}_{ij} / 2G - s^{\cdot}_{ij} / 2G \equiv 0$$

Свернем (6.1) с s_{ij} и обозначим полученный скаляр $A^{\cdot}$

$$A^{\cdot} = s_{ij}\varepsilon^{\cdot}_{ij}{}' = (1 - f)\, s_{ij}s^{\cdot}_{ij} / 2Gf + h\, s_{ij} (\partial\varphi / \partial s_{ij}) (\delta\varphi / f) \tag{6.2}$$

Пусть

$$f = f(J_2), \qquad h = h(J_2), \qquad \varphi \equiv J_2 - \Phi^{-1}(A) = 0, \qquad J_2 = s_{ij}s_{ij} \tag{6.3}$$

Таким образом, сферическая поверхность нагружения расширяется в пространстве s_{ij} (изотропное упрочнение). Подставляя (6.3) в (6.2), получим

$$A^{\cdot} = (1 - f)\, J^{\cdot}_2 / 4Gf + 2hJ_2J^{\cdot}_2 / f \equiv \Phi'(J_2)\, J^{\cdot}_2 \tag{6.4}$$

$$\Phi'(J_2) = (1 - f) / 4\,Gf + 2hJ_2 / f, \quad A = \Phi(J_2) \tag{6.5}$$

Из одного эксперимента на одноосное растяжение можно независимо определить $\Phi(J_2)$ и $f(J_2)$. Тогда из (6.5) определится $h(J_2)$, и механическая модель полностью определена.

Дополним ее термодинамически, указав для данной модели термодинамические функции [13]. Заметим, что A растет ($0 < f \leqslant 1$, $h > 0$) при пластическом деформировании и остается постоянным при упругом. В упругом процессе

$$TdS = dE - s_{ij}\, d\varepsilon_{ij}, \qquad A = \text{const} \tag{6.6}$$

Здесь T — абсолютная температура, S и E — энтропия и внутренняя энергия единицы объема материала. Примем за параметры состояния T, ε_{ij}, и запишем условие интегрируемости dS

$$\left(\frac{\partial E}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_T = s_{ij} - T\left(\frac{\partial s_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}} \tag{6.7}$$

Согласно закону Гука второй член правой части есть 0. Интегрируем в предположении, что G не зависит от T

$$E = G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + E_1(T, A) \tag{6.8}$$

Обозначив теплоемкость при постоянном ε_{ij} через $C_{\varepsilon_{ij}}$, получим

$$C_{\varepsilon_{ij}} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial E_1}{\partial T} = C(T, A) \tag{6.9}$$

Интегрируем (6.9) и результат подставляем в (6.8)

$$E = G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \int C(T, A)\, dT + E_0(A) \tag{6.10}$$

Подставляем (6.10) в (6.6), используем закон Гука и интегрируем

$$S = \int \frac{C(T, A)}{T} dT + S_0(A) \tag{6.11}$$

Используя закон Гука, получим

$$E = \frac{s_{ij}s_{ij}}{4G} + \int C(T, A)\, dT + E_0(A) \tag{6.12}$$

Предположим, что соотношения (6.12), (6.11) сохраняются и для процессов пластического деформирования, но в этом случае A возрастает. Подставив (6.1) и (6.12) в уравнение притока тепла

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{dE}{dt} - s_{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} \tag{6.13}$$

получим для случая изотропной теплопроводности

$$C(T, A)\frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) + \left(1 - \frac{dE}{dA}\right)\frac{dA}{dt} \tag{6.14}$$

После того как решена соответствующая механическая задача, из этого уравнения может быть определено поле температур, если известны функции $C(T, A)$ и $E_0(A)$.

Рассмотренная модель является непосредственным обобщением теории течения.

Автор благодарит В. Д. Клюшникова, под непосредственным руководством которого была выполнена настоящая работа.

Поступила 3 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Друккер Д. Соотношения между напряжениями и деформациями для металлов в пластической области — экспериментальные данные и основные понятия. Гл. 4 книги «Реология», ИЛ, 1962.
2. Большанина М. А. и Панин В. Е. Скрытая энергия деформации. Сб. Исследования по физике твердого тела. Изд. АН СССР, 1957.
3. Бивер М. Б. О термодинамике и кинетике возврата. Сб. Ползучесть и возврат. Металлургиздат, 1961.
4. Ильюшин А. А. О постулате платичности. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
5. Жуков А. М. Некоторые особенности поведения металлов при упруго-пластическом деформировании. Сб. Вопросы теории пластичности, Изд. АН СССР, 1961.
6. Фейгин М. Неупругое поведение при совместном действии растяжения и кручения. Сб. пер. «Механика», 1956, № 3.
7. Жуков А. М., Работнов Ю. Н. Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении. Инж. сб., 1954, т. XVIII.
8. Малышев Б. М. Кручение трубок при ступенчатом изменении крутящего момента в процессе непрерывного растяжения. Вестн. МГУ, сер. матем., мех., астр., физ., хим., 1958, № 2.
9. Моррисон Дж., Шепферд В. Опытное исследование соотношений между напряжениями и деформациями за пределом упругости. Сб. пер. «Механика», 1952, № 1.
10. Budiansky B., Dow N., Peters R. W., Shepferd R. P. Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity. Proc. I US Nat. Congr. Appl. Mech., 1951.
11. Нахди П., Эссенбург Ф., Кофф В. Экспериментальное изучение начальной и последующей поверхности текучести в пластической области. Сб. пер. «Механика», 1958, № 6.
12. Айви Г. Соотношение напряжение — деформация и поверхность текучести для алюминиевых сплавов. Сб. пер. «Механика», 1962, № 3.
13. Григорян С. С. О некоторых специальных вопросах термодинамики сплошных сред. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
14. Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. ИЛ, 1961.
15. Клюшников В. Д. О законах пластичности для материала с упрочнением. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.