Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 5

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ НАКЛОННУЮ ТРЕЩИНУ

УДК 539.375

А. М. Хлуднев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

К настоящему времени достаточно полно изучены задачи о равновесии упругих пластин, имеющих вертикальные трещины-разрезы [1–3]. В данной работе приводится вывод условия взаимного непроникания берегов наклонной трещины в пластине Кирхгофа — Лява, дается формулировка задачи о равновесии пластины и отмечены основные трудности, возникающие при исследовании подобных задач. Как оказывается, условие непроникания для наклонной трещины имеет нелокальный характер в том смысле, что его запись для данной фиксированной точки содержит значения перемещений пластины как в этой точке, так и в точке, взятой на противоположном берегу трещины. Указанное обстоятельство существенным образом отличает полученное условие непроникания от соответствующего условия для вертикальных трещин. В частности, в отличие от вертикальных трещин, где во всех точках срединной поверхности выполнены уравнения равновесия, в данном случае уравнения равновесия будут выполнены лишь в области, внешней по отношению к проекции поверхности трещины на срединную поверхность пластины. Отмеченное свойство нелокальности является новым в теории пластин и может служить источником целого ряда новых математических постановок краевых задач. Что касается традиционных подходов к описанию трещин в упругих (и неупругих) телах, то здесь имеется обширная литература.

В данной работе не будем обсуждать эти подходы, отметим лишь, что они допускают возможность взаимного проникания берегов трещины [4–6]. Свойства решений краевых задач, возникающих в таких случаях, анализировались, например, в [7–11]. С точки зрения краевых задач важно подчеркнуть, что в любом случае наличие трещин (разрезов) в пластине приводит к появлению негладких компонент границы. Отличие рассмотренного в [1–3] подхода от традиционных состоит в том, что он характеризуется краевыми условиями вида неравенств на берегах трещины. Для наклонной трещины ситуация становится еще более сложной, так как на условия равновесия оказывают влияние противоположные берега трещины. Фактически это означает, что в уравнениях равновесия появляются дополнительные слагаемые, учитывающие реакцию противоположных берегов. Эти слагаемые определяются лишь после решения всей задачи в целом.

1. Вывод условия непроникания. Пусть срединная поверхность пластины занимает область $\Omega_c \equiv \Omega \setminus \Gamma_c$, где $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, а Γ_c — гладкая кривая без самопересечений, лежащая в Ω (рис. 1). Вертикальное сечение пластины представлено на рис. 2.

Срединная поверхность пластины лежит в плоскости $z = 0$. Система координат (x_1, x_2, z) является декартовой, $x = (x_1, x_2)$.

Пусть поверхность трещины Ψ описывается функцией $z = \Phi(x)$, $x \in \Omega_\Psi$. Здесь Ω_Ψ — ортогональная проекция поверхности трещины (графика функции $z = \Phi(x)$) на плоскость $z = 0$. Обозначим через $n(x) = (-\nabla\Phi(x), 1)/\sqrt{1 + |\nabla\Phi(x)|^2}$ нормаль к поверхности $z = \Phi(x)$, $x \in \Omega_\Psi$. Выбранное направление нормали $n(x)$ определяет положительный и отрицательный берега трещины, обозначаемые соответственно $\Psi^\pm$. Кривая Γ_c является пересечением поверхности трещины Ψ с плоскостью $z = 0$. Для простоты предполагается, что $|\nabla\Phi(x)| \neq 0$, $x \in \Omega_\Psi$.

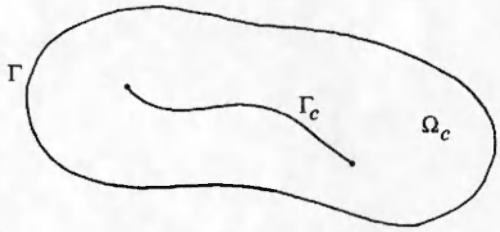

Рис. 1

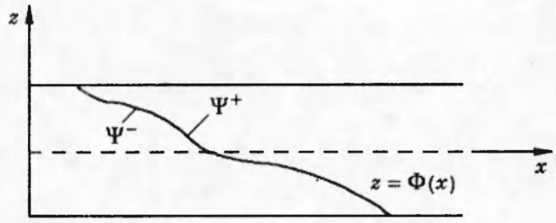

Рис. 2

Проекцию Ω_Ψ поверхности Ψ можно естественным образом представить в виде объединения двух множеств в соответствии с выбранным направлением оси z, а именно: $\Omega_\Psi = \Omega_\Psi^+ \cup \Omega_\Psi^-$. Считаем, что если часть поверхности Ψ проектируется вдоль положительного направления оси z, то через Ω_Ψ^+ обозначим соответствующую проекцию этой части, а через Ω_Ψ^- — проекцию той части Ψ, которая проектируется в направлении, противоположном направлению оси z. В частности, кривая Γ_c принадлежит как Ω_Ψ^+, так и Ω_Ψ^-.

Считаем, что направление нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ к кривой Γ_c в плоскости x выбрано так, как указано на рис. 3.

Пусть $x \in \Omega_\Psi$. Обозначим через $y = Px$ ортогональную проекцию точки x на кривую Γ_c (рис. 3). Множества $\Omega_\Psi^\pm$ предполагаются при этом достаточно малыми в том смысле, что для каждого $x \in \Omega_\Psi^\pm$ величина $y = Px$ определяется однозначно.

Напомним, что в теории пластин Кирхгофа — Лява горизонтальные перемещения зависят от координаты z линейным образом [12]:

$$W(z) = W - z\nabla w, \quad |z| \leqslant 2\varepsilon.$$

Здесь $W = (w^1, w^2)$ и w — горизонтальные и вертикальное перемещения точек срединной поверхности пластины; 2ε — толщина пластины. Вектор перемещений точек срединной поверхности будем обозначать через $\chi = (W, w)$, $\chi = \chi(x)$, $x \in \Omega_c$. Оставаясь в рамках гипотез Кирхгофа — Лява, выразим перемещения точек пластины на берегах трещины $\Psi^\pm$, а затем выведем условие взаимного непроникания берегов.

Пусть $(x, z) \in \Psi^+, x \in \Omega_\Psi^+$. Тогда в соответствии с формулами Кирхгофа — Лява вектор перемещений в точке (x, z) имеет вид

$$\chi^+(x,z) = (W^+(x) - z\nabla w^+(x), w^+(x)), \quad x \in \Omega_\Psi^+, \quad z = \Phi(x). \tag{1.1}$$

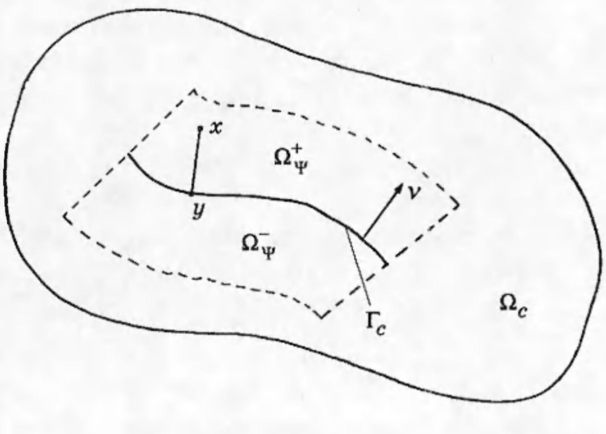

Рис. 3

Для точек $(x,z) \in \Psi^-$ $(x \in \Omega_\Psi^+)$ вектор перемещений можно найти по формуле

$$\chi^-(x,z) = \Big(W^-(y) - z\nabla w^-(y), w^-(y) + |x-y|\frac{\partial w^-(y)}{\partial \nu}\Big), \qquad y = Px. \tag{1.2}$$

Формула (1.2) означает, что горизонтальные перемещения в точке $(x,z) \in \Psi^-$ $(x \in \Omega_\Psi^+)$ совпадают с горизонтальными в точке (y,z) $(y = Px)$, а вертикальные перемещения отличаются от вертикальных в точке (y,z) $(y = Px)$ слагаемым $|x-y|\partial w^-(y)/\partial\nu$.

Условие взаимного непроникания берегов в точке $(x,z) \in \Psi$ $(x \in \Omega_\Psi^+)$ следующее:

$$(\chi^+(x,z) - \chi^-(x,z))n(x) \geqslant 0, \qquad x \in \Omega_\Psi^+, \qquad z = \Phi(x). \tag{1.3}$$

Подставляя сюда, согласно (1.1), (1.2), векторы $\chi^\pm(x,z)$, получим

$$(\chi^+(x) - \chi^-(y))n(x) - (\chi_z^+(x) - \chi_z^-(y))n(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega_\Psi^+, \quad z = \Phi(x), \quad y = Px, \tag{1.4}$$

где

$$\chi^\pm(s) = (W^\pm(s), w^\pm(s)); \qquad \chi_z^\pm(s) = \Big(z\nabla w^\pm(s), |s-Ps|\frac{\partial w^\mp(Ps)}{\partial \nu^\pm}\Big).$$

Здесь использованы обозначения $\partial/\partial\nu^+ \equiv \partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\nu^- \equiv -\partial/\partial\nu$. Отметим также, что, согласно введенным выше определениям, $y = Py$ для $y \in \Gamma_c$.

Аналогично, если рассмотрим точки $(x,z) \in \Psi^\pm$, $x \in \Omega_\Psi^-$, можно вывести условие непроникания вида (1.4).

Действительно, пусть $(x,z) \in \Psi^+$, $x \in \Omega_\Psi^-$. Тогда

$$\chi^+(x,z) = \Big(W^+(y) - z\nabla w^+(y), w^+(y) - |x-y|\frac{\partial w^+(y)}{\partial \nu}\Big), \ x \in \Omega_\Psi^-, \ z = \Phi(x), \ y = Px. \tag{1.5}$$

Аналогично, если $(x,z) \in \Psi^-$, $x \in \Omega_\Psi^-$, то, согласно гипотезам Кирхгофа — Лява,

$$\chi^-(x,z) = (W^-(x) - z\nabla w^-(x), w^-(x)). \tag{1.6}$$

Подставляя в условие непроникания $(\chi^+(x,z) - \chi^-(x,z))n(x) \geqslant 0$, $x \in \Omega_\Psi^-$, $z = \Phi(x)$ значения $\chi^\pm(x,z)$ из (1.5), (1.6), имеем

$$(\chi^+(y) - \chi^-(x))n(x) - (\chi_z^+(y) - \chi_z^-(x))n(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega_\Psi^-, \quad z = \Phi(x), \quad y = Px. \tag{1.7}$$

Таким образом, условие взаимного непроникания берегов наклонной трещины описывается неравенствами (1.4), (1.7), имеющими нелокальный характер в том смысле, что наряду со значениями функций в точке x они содержат и значения функций в точке $y = Px$, причем последние берутся на противоположном берегу трещины.

Важно отметить следующее обстоятельство. Если трещина, описываемая поверхностью $z = \Phi(x)$, переходит в вертикальную трещину, соответствующую цилиндрической поверхности $x \in \Gamma_c$, $-\varepsilon \leqslant z \leqslant \varepsilon$, то (1.4), (1.7) переходят в известное условие непроникания для вертикальных трещин [1–3]:

$$[W(x)]\nu(x) \geqslant \varepsilon\left|\left[\frac{\partial w(x)}{\partial \nu}\right]\right|, \qquad x \in \Gamma_c. \tag{1.8}$$

Здесь $[V] = V^+ - V^-$ ($V^\pm$ соответствуют значениям V, взятым на положительном и отрицательном берегах Γ_c по отношению к направлению нормали (ν_1,ν_2)). Действительно, в этом случае нормаль $n(x)$ переходит в вектор $(\nu_1,\nu_2,0)$, а условия (1.4), (1.7) дают соответственно

$$[W(x)]\nu(x) \geqslant z[\nabla w(x)]\nu(x), \qquad x \in \Gamma_c, \qquad -\varepsilon \leqslant z \leqslant 0; \tag{1.9}$$

$$[W(x)]\nu(x) \geqslant z[\nabla w(x)]\nu(x), \qquad x \in \Gamma_c, \qquad 0 \leqslant z \leqslant \varepsilon. \tag{1.10}$$

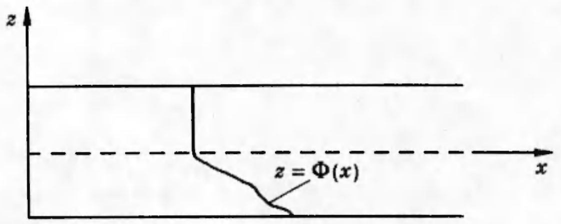

Рис. 4

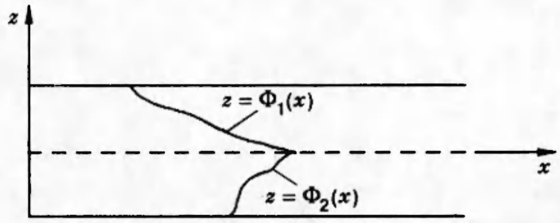

Рис. 5

Очевидно, условие (1.8) эквивалентно (1.9), (1.10) [2].

Заметим, что если трещина является частично наклонной и частично вертикальной (рис. 4), то условия взаимного непроникания ее берегов будут иметь вид (1.4), (1.10).

Аналогично можно рассмотреть и другие случаи наклона трещины, например, случай, представленный на рис. 5. В данной работе не будем выписывать соответствующие формулы, это легко сделать, используя рассуждения, приведенные выше.

2. Постановка краевой задачи. Существование решения. Рассмотрим краевую задачу о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину, и докажем существование решения. Все рассуждения будем проводить для трещины, показанной на рис. 2. Как известно, условие взаимного непроникания берегов трещины имеет в данном случае вид (1.4), (1.7). Пусть, как и ранее, $\chi = (W, w)$ — вектор перемещений точек срединной поверхности пластины. Введем тензоры деформаций срединной поверхности пластины

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w^i}{\partial x_j} + \frac{\partial w^j}{\partial x_i}\Big) \qquad (i, j = 1,\, 2)$$

и тензоры усилий $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W), i, j = 1, 2, \sigma_{11} = \varepsilon_{11} + æ\varepsilon_{22}, \sigma_{22} = \varepsilon_{22} + æ\varepsilon_{11}$, $\sigma_{12} = (1 - æ)\varepsilon_{12}$, $æ = \text{const}$, $0 < æ < 1/2$. Функционал энергии пластины имеет вид

$$\Pi(\chi) = (1/2)B(W, W) + (1/2)b(w, w) - \langle f, \chi\rangle.$$

Здесь $B(W, W) = \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle$;

$$b(w, w) = \int\limits_{\Omega_c} (w_{xx}\bar{w}_{xx} + w_{yy}\bar{w}_{yy} + æw_{xx}\bar{w}_{yy} + æw_{yy}\bar{w}_{xx} + 2(1 - æ)w_{xy}\bar{w}_{xy})d\,\Omega_c;$$

скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означают интегрирование по Ω_c.

Предположим, что $f = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega_c)$. Пусть $H(\Omega_c) = H^{1,0}(\Omega_c) \times H^{1,0}(\Omega_c) \times H^{2,0}(\Omega_c)$, где $H^{s,0}(\Omega_c)$ — замыкание гладких функций, равных нулю вблизи Γ, в норме $H^s(\Omega_c)$. Легко видеть, что множество функций из $H(\Omega_c)$, удовлетворяющих неравенствам (1.4), (1.7), выпукло и замкнуто в $H(\Omega_c)$. Обозначим это множество через K.

Задачу о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину, можно поставить как вариационную:

$$\inf_{\chi\in K} \Pi(\chi). \tag{2.1}$$

Функционал Π выпуклый и дифференцируемый на пространстве $H(\Omega_c)$, поэтому задача (2.1) эквивалентна вариационному неравенству

$$\chi \in K: \quad \Pi'(\chi)(\bar{\chi} - \chi) \geqslant 0 \qquad \forall \bar{\chi} \in K, \tag{2.2}$$

где $\Pi'(\chi)$ — производная функционала Π в точке χ.

В силу неравенств $b(w, w) \geqslant c\|w\|^2_{2,\Omega_c}$ $\forall w \in H^{2,0}(\Omega_c)$, $B(W, W) \geqslant c\|W\|^2_{1,\Omega_c}$ $\forall W = (w^1, w^2) \in H^{1,0}(\Omega_c)$ функционал Π является коэрцитивным на пространстве $H(\Omega_c)$, т. е.

$\Pi(\chi) \to \infty$, $\|\chi\|_{H(\Omega_c)} \to \infty$. Учитывая его слабую полунепрерывность снизу, заключаем, что решение задачи (2.1) (или задачи (2.2)) существует. Решение будет единственным.

Нетрудно видеть, что в области $\Omega_c \backslash \Omega_\Psi$ выполнены в смысле распределений уравнения

$$\Delta^2 w = f_3, \qquad -\sigma_{ij,j}(W) = f_i, \qquad i = 1, 2. \tag{2.3}$$

Для проверки этого факта достаточно подставить $\chi + \tilde{\chi}$ в (2.2) в качестве пробных функций, где $\tilde{\chi} = (\tilde{W}, \tilde{w}) \in C_0^\infty(\Omega_c \setminus \Omega_\Psi)$, а χ — решение задачи (2.2). Действительно, такая подстановка приводит к тождеству $\Pi'(\chi)(\tilde{\chi}) = 0$, $\quad \tilde{\chi} = (\tilde{W}, \tilde{w}) \in C_0^\infty(\Omega_c \setminus \Omega_\Psi)$, что и означает справедливость (2.3) в смысле распределений.

Пусть теперь точка x является внутренней для множества Ω_Ψ^+, т. е. существует окрестность U точки x, принадлежащая Ω_Ψ^+. В области Ω_c выберем достаточно гладкую функцию $\tilde{\chi} = (\tilde{W}, \tilde{w})$ с носителем в U и такую, что $(\tilde{W}^+(x) - z\nabla\tilde{w}^+(x), \tilde{w}^+(x))n(x) \geqslant 0$, $z = \Phi(x)$, $x \in U$. Тогда $\chi + \tilde{\chi} \in K$, где χ — решение задачи (2.2). Подставим $\chi + \tilde{\chi}$ в (2.2) в качестве пробной функции. Получим неравенство $\Pi'(\chi)(\tilde{\chi}) \geqslant 0$, которое и означает, что уравнения равновесия (2.3), вообще говоря, не выполнены во внутренних точках Ω_Ψ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01645).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Khludnev A. M., Sokolowski J.** Modelling and Control in Solid Mechanics. Basel — Boston — Berlin: Birkhäuser Verl., 1997.
2. **Хлуднев А. М.** Контактная задача для пологой оболочки с трещиной // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 2. С. 318–326.
3. **Khludnev A. M.** On contact problem for a plate having a crack // Control and Cybernetics. 1995. V. 24, N 3. P. 349–361.
4. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
5. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983.
6. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
7. **Grisvard P.** Singularities in boundary value problems // Research Notes in Applied Mathematics. Berlin: Springer-Verl., 1992. V. 22.
8. **Ohtsuka K.** Mathematical aspects of fracture mechanics // Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 1994. V. 13. P. 39–59.
9. **Кондратьев В. А., Копачек И., Олейник О. А.** О поведении обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. Т. 8. С. 135–152.
10. **Олейник О. А., Кондратьев В. А., Копачек И.** Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1886–1899.
11. **Nicaise S.** About the Lamé system in a polygonal or polyhedral domain and coupled problem between the Lamé system and the plate equation. 1. Regularity of the solutions // Annali Scuola Norm. Super. Pisa. Serie IV. 1992. V. 19. P. 327–361.
12. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 19/I 1996 г.