ПМТФ, № 2, 1969

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В БАССЕЙНЕ С НЕРОВНЫМ ДНОМ

Е. И. Биченков, Р. М. Гарипов

(Новосибирск)

Как известно, скорость распространения длинных волн пропорциональна $\sqrt{h_1}$ (h_1 — глубина бассейна). Поэтому при распространении волны в бассейне с неровным дном скорость ее над подводными возвышениями меньше, чем над более глубокими участками бассейна, что приводит к деформации волны, сопровождающейся концентрацией энергии над мелководными участками бассейна. Вдоль подводного хребта при этом может распространяться волна, значительно отличающаяся от волны, распространяющейся над глубоководными участками бассейна. Такую особенность в распространении волн на поверхности жидкости отметил М. А. Лаврентьев (1957 г.).

Первые исследования, учитывающие описанное влияние подводного хребта, были выполнены в акустическом приближении Мунком и Арсером [1], которые использовали метод геометрической оптики.

Сунь Цао провел экспериментальное изучение влияния подводного хребта и выполнил некоторые расчеты [2]. Он показал количественное и качественное расхождение наблюдений с расчетами Мунка и Арсера. Так, Сунь Цао отмечает почти стационарное распространение волны над хребтом. Последний результат не содержится в акустической теории.

В данной работе рассматривается задача распространения волн в бассейне с цилиндрическим дном. В приближении нелинейной теории длинных волн показано, что при некоторой форме дна может наблюдаться стационарное распространение уединенной волны над подводным хребтом. В линейной теории рассмотрено нестационарное распространение волн над хребтом. Показано, что при некоторых условиях вдоль хребта волна затухает значительно медленнее, чем по другим направлениям.

1. Постановка задачи. Исследуемая задача сводится к отысканию формы свободной поверхности $z_1 = \zeta_1(x_1, y_1, t_1)$ и потенциала скорости $\Phi_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$. Потенциал удовлетворяет в области, занятой жидкостью, уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z_1^2} = 0 \tag{1.1}$$

и граничным условиям:

1) непротекаемость дна $z_1 = -h_1(x_1, y_1)$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_1}{\partial y_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z_1} = 0 \tag{1.2}$$

2) непротекаемость свободной поверхности $z_1 = \zeta_1(x_1, y_1, t_1)$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t_1} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial y_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial z_1} \tag{1.3}$$

3) постоянство давления на свободной поверхности $z_1 = \zeta_1(x_1, y_1, t_1)$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_1}\right)^2\right) + g\zeta_1 = 0 \tag{1.4}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести.

Кроме того, решение должно удовлетворять некоторым начальным условиям, которые могут быть сформулированы в терминах начального значения потенциала и начальной формы свободной поверхности [3].

В такой постановке задача представляет большие трудности для исследования. Однако при некоторых дополнительных предположениях относительно характера решения ее удается существенно упростить.

2. Длинные волны в бассейне с неровным дном (нелинейная теория). Если длина волны l велика по сравнению со средней глубиной h_0, а характерная длина неровностей дна не меньше l, то в задачу можно ввести малый параметр $\alpha = h_0^2 / l^2$, произведя замену переменных

$$h_1 = h_0(1 - \varepsilon h)$$
$$x_1 = lx, \qquad y_1 = ly, \qquad z_1 = h_0 z$$
$$t_1 = \frac{l}{\sqrt{gh_0}}\, t, \quad \zeta_1 = a\zeta, \quad \Phi_1 = \frac{al}{h_0}\sqrt{gh_0}\,\Phi \tag{2.1}$$

Здесь масштабы времени и потенциала получены из (1.1) — (1.4) в предположении, что ζ, Φ и их производные по x, y, t, порядка 1.

Далее предполагается, что амплитуда волны

$$a = \alpha h_0 \tag{2.2}$$

как это имеет место для уединенной волны. Потенциал отыскивается в виде ряда

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \alpha + \Phi_2 \alpha^2 + \ldots \tag{2.3}$$

Для определения коэффициентов этого ряда достаточно знать значение потенциала на свободной поверхности $\varphi(x, y, t) = \Phi(x, y, \alpha\zeta, t)$ и воспользоваться уравнением Лапласа и условием непротекания дна. Стандартный подсчет дает

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x, y, z, t)\,|_{z=\alpha\zeta} = \alpha(\varepsilon\nabla h\nabla\varphi - (1 - \varepsilon h + \alpha\zeta)\Delta\varphi) -$$
$$- {}^1/_3\alpha^2\Delta^2\varphi + O(\alpha^3 + \alpha^2\varepsilon). \quad \left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{2.4}$$

Далее

$$\nabla\Phi\,|_{z=\alpha\zeta} = \nabla\varphi + O(\alpha^2), \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=\alpha\zeta} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + O(\alpha^2) \tag{2.5}$$

Подставив в условия на свободной поверхности выражения (2.4) и (2.5), можно получить два уравнения для определения формы свободной поверхности $\zeta(x, y, t)$ и значения потенциала на свободной поверхности $\varphi(x, y, t)$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \nabla((1 - \varepsilon h + \alpha\zeta)\nabla\varphi) + {}^1/_3\,\alpha\Delta^2\varphi = O(\alpha^2 + \varepsilon\alpha) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + {}^1/_2\,\alpha(\nabla\varphi)^2 + \zeta = O(\alpha^2) \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) представляет собой условие непротекания свободной поверхности, уравнение (2.7) — условие постоянства давления.

3. Стационарное распространение уединенной волны над цилиндрическим дном. Стационарное решение уравнений (2.6), (2.7) зависит от y и t в комбинации $y - ct$ (в этом пункте комбинация $y - ct$ будет обозначаться просто y). Пусть для определенности $c > 0$, т. е. волна распространяется в положительном направлении оси y.

Дно бассейна предполагается цилиндрическим

$$z = -1 + \varepsilon h(x) \quad (\varepsilon \ll 1)$$

Ищется решение вида

$$\zeta(x, y) = \zeta_0(y) + \varepsilon\zeta_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \tag{3.1}$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(y) + \varepsilon\varphi_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \tag{3.2}$$

Подстановка (3.1), (3.2) в (2.6), (2.7) приводит к известным уравнениям Рэлея — Лаврентьева [4,5] для функций ζ_0 и φ_0.

Одним из решений этих уравнений будет уединенная волна

$$\zeta_0 = \mathrm{sch}^2 \frac{\sqrt{3}y}{2}, \quad \frac{d\varphi_0}{dy} = \mathrm{sch}^2 \frac{\sqrt{3}y}{2} + O(\alpha) \tag{3.3}$$

Скорость распространения волны c связана с амплитудой волны соотношением

$$c = 1 + {}^1/_2\alpha + O(\alpha^2) \tag{3.4}$$

Функции ζ_1 и φ_1 удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{\partial\zeta_1}{\partial y} + \Delta\varphi_1 - h(x)\frac{d^2\varphi_0}{dy^2} = O(\alpha), \qquad -\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \zeta_1 = O(\alpha) \tag{3.5}$$

Отсюда нетрудно получить искажение профиля волны, вызванное неровностью дна

$$\zeta_1 = \frac{d^3\varphi_0}{dy^3}\int_{-\infty}^{x}(x - \xi)h(\xi)\,d\xi + O(\alpha) \tag{3.6}$$

Стационарное решение, обращающееся при $|x| \to \infty$ в уединенную волну, возможно лишь в бассейне, профиль дна которого удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)\,dx = 0 \tag{3.7}$$

Эти условия будут выполнены, если дно состоит из бугров и впадин, площади поперечных сечений которых одинаковы и профиль дна обладает вертикальной плоскостью симметрии.

Пусть хребет удовлетворяет условиям (3.7) и представляет собой локальное возмущение дна, т. е. $h(x) = 0$ при $|x| > \lambda$. Тогда из (3.6) и (3.3) можно оценить амплитуду возмущения уединенной волны, вызванного хребтом

$$\delta \sim \alpha\varepsilon\lambda^2 \tag{3.8}$$

В размерах переменных

$$\delta_1 \sim \frac{\varepsilon_1 a^2 b^2}{h_0^4} \tag{3.9}$$

Здесь ε_1 — высота хребта, b — ширина хребта, a — амплитуда уединенной волны.

Примечание. При стационарном распространении волны со скоростью $c = 1 + O(\alpha)$ из (2.6), (2.7) следует, что

$$\partial^2\varphi \,/\, \partial x^2 = O(\alpha + \varepsilon)$$

Если предположить, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \sqrt{\alpha}, \qquad \varepsilon = \alpha \tag{3.10}$$

то после исключения ζ и пренебрежения членами $O(\alpha)$, получится следующее уравнение для потенциала $\varphi(x, y)$ на свободной поверхности

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}-\left(\frac{c^2-1}{\alpha}+h(X)\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{3c}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \quad (X=\sqrt{\alpha}x) \tag{3.11}$$

Можно думать, что это уравнение имеет решение, убывающее на бесконечности во всех направлениях. Но это не так, в чем просто убедиться, если предположить, что производные 1, 2, 3 порядка функции φ убывают на бесконечности не медленнее, чем $(X^2+y^2)^{-1/2+\beta}$, где β — как угодно малое число. Эти условия обеспечивают $\varphi=\mathrm{const}$ на ∞. Интегрирование (3.11) по X при фиксированном y дает

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{1-c^2}{\alpha}-h(X)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{3c}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\right)dX=\mathrm{const} \tag{3.12}$$

Из условий на бесконечности следует, что $\mathrm{const}=0$, после чего интегрированием (3.12) по y нетрудно получить

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2dX\,dy=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\equiv 0 \tag{3.13}$$

4. Нестационарные волны в бассейне с цилиндрическим дном (линейная теория). Рассмотрим в предположениях линейной теории волн нестационарное распространение волн в бассейне с неровным дном, вызванных начальным возмущением. Амплитуду волны и ее отношение к длине волны будем предполагать малыми; это позволяет снести условия на свободной поверхности на плоскость равновесия покоящейся жидкости, и в граничных условиях (1.3), (1.4) пренебречь нелинейными членами.

Глубина бассейна предполагается произвольной и не зависящей от переменной y, т. е. имеется цилиндрическое дно $z=-1+h(x)$, $h<1$. Параметры α и ε равны единице. Ищутся частные решения задачи, приводящие к уравнению свободной поверхности вида

$$\zeta=\psi(x)\,e^{i(\omega t-\nu y)} \tag{4.1}$$

где ω и ν — некоторые параметры, а функции $\psi(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Тем самым исследуются решения, представляющие собой прогрессивную волну, распространяющуюся вдоль хребта, и быстро затухающую в направлении, перпендикулярном хребту.

Волны такого типа, бегущие вдоль наклонного плоского берега, были найдены еще Стоксом и изучены рядом авторов [6].

Пусть дно представляет собой горизонтальную плоскость с локальным возвышением при $a<x<b$. Тогда удается доказать, что решения вида (4.1) существуют и обладают рядом интересных особенностей. Оказывается, что при фиксированном ν существует только конечное число решений такого типа

$$\psi=\psi_k(x,\nu),\quad \omega=\omega_k(\nu),\quad k=1,2,\ldots,n \tag{4.2}$$

Функции $\psi_k(x,\nu)$ и числа $\omega_k(\nu)$, естественно, зависят от параметра ν и определены при $\alpha_k<|\nu|<\beta_k$, причем сами функции, их количество и интервал изменения ν полностью определяются формой дна и не зависят от начальных условий [7]. Конкретное вычисление функций ψ_k и ω_k и определение их количества возможно только при помощи ЭВМ. Однако удается провести качественное исследование, например установить, что для каждого $\nu\in(\alpha_k,\beta_k)$

$$\psi_k(x,\nu)=O\left(e^{-p(\nu)|x|}\right),\quad p(\nu)>0 \quad \text{при} \quad |x|\to\infty \tag{4.3}$$

Решение (4.1) не стремится к O при $|y|\to\infty$. Но если умножить (4.1) на произвольную функцию $a(\nu)$ и проинтегрировать по ν, то получится решение, стремящееся к 0 при $R=(x^2+y^2)^{1/2}\to\infty$, причем скорость убывания на бесконечности может быть как угодно быстрой при подходящем выборе функции $a(\nu)$. Это решение представляет собой шапкообразную волну, которая движется с постоянной средней скоростью вдоль хребта, постепенно расползаясь вдоль хребта и уменьшаясь по амплитуде. Энергия такой волны локализована в некоторой полосе, параллельной хребту. Волны такого типа возникают и от произвольного начального возмущения.

Пусть для простоты $\Phi(x, y, z, 0) = 0$. Тогда

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n + \zeta_* \tag{4.4}$$

где

$$\zeta_k = {}^1/_2\pi \int\limits_{\alpha_k<|\nu|<\beta_k} e^{-i\nu y}\, \psi_k(x, \nu) \cos \omega_k(\nu)\, t\, a_k(\nu)\, d\nu \tag{4.5}$$

$$a_k = \int e^{i\nu y}\, \psi_k(x, \nu)\, \zeta(x, y, 0)\, dx\, dy \tag{4.6}$$

Смысл равенства (4.4) состоит в том, что общая энергия движения

$$E(\zeta) = E(\zeta_1) + E(\zeta_2) + \ldots + E(\zeta_n) + E(\zeta_*) \tag{4.7}$$

Следовательно, решение можно представить в виде суммы слагаемых определенного типа. Слагаемые ζ_k описывают группу волн, бегущих вдоль хребта. Можно выделить специальный класс начальных возмущений свободной поверхности, когда $\zeta_* = 0$. Этот класс достаточно широк. Для некоторых частных случаев начальных условий может оказаться, что в решении присутствует только ζ_k, остальные члены ряда (4.4) обращаются в нуль. Разложение решения (4.4) аналогично разложению произвольного движения линейной колебательной системы на сумму собственных колебаний.

Уступ на дне бассейна вдоль вертикального берега играет точно такую же роль, как и подводный хребет. Сказанное выше справедливо и в этом случае.

5. **Асимптотика нестационарных волн над подводным хребтом.** Исследование асимптотики решений через большой промежуток времени проводится методом стационарной фазы. При фиксированном x интеграл (4.5), дающий решение ζ_k, отличается от решения для плоских волн над горизонтальным дном лишь видом функции $\omega_k(\nu)$. Затухание ζ_k при $t \to \infty$, $y / t = \mathrm{const}$ происходит из-за того, что $d^2\omega_k / d\nu^2 \not\equiv 0$. Начальное возвышение свободной поверхности расслаивается на все большее число волн (горбов и впадин), а длина каждой волны (по оси y) увеличивается. При этом амплитуда волны ζ_k уменьшается как $t^{-1/2}$, если $d^2\omega_k / d\nu^2 \neq 0$. Если же в некоторой точке $\nu_k \in (\alpha_k, \beta_k)$ функция $d^2\omega_k / d\nu^2$ имеет нуль порядка m, то окрестность точки ν_k в интеграле (4.5) дает группу относительно медленно расслаивающихся волн амплитуды $\sim t^{-1/(m+2)}$, движущихся со средней скоростью $d\omega_k(\nu_k) / d\nu$ вдоль оси y. Изучение нулей функции $d^2\omega_k / d\nu^2$ в зависимости от формы хребта показывает, что

$$\zeta_k \sim t^{-\gamma} \sim |y|^{-\gamma} \tag{5.1}$$

где γ принимает одно из значений ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_4$ и определяется только формой дна. Так, $\gamma = {}^1/_4$, если форма хребта удовлетворяет некоторому равенству.

Чтобы разобраться в этом явлении, воспользуемся приближенными уравнениями (2.6), (2.7), которые после линеаризации и упрощения в предположении (3.10) дают уравнение

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2\zeta}{\partial X^2} + (1 - \alpha h(X)) \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{3} \frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}, \quad X = \sqrt{\alpha}\, x \tag{5.2}$$

Это уравнение отличается от уравнения линейной теории мелкой воды последним слагаемым. При подстановке в уравнение (5.2) функции вида (4.1) получается уравнение

$$\alpha \frac{d^2\psi}{dX^2} + \left(-\nu^2 + \omega^2 + \alpha\left(\nu^2 h(X) + \frac{\nu^4}{3}\right)\right) \psi(X) = 0 \tag{5.3}$$

Пусть

$$h(X) = \begin{cases} q, & |X| \leqslant 1 \\ 0, & |X| > 1 \end{cases}$$

В силу четности функции $h(X)$ собственные функции уравнения (5.3) могут быть только четными и нечетными. Поэтому достаточно рассмотреть отдельно четные решения

$$\psi = \begin{cases} a \cos \mu X & (0 < X < 1) \\ b \exp\left(-\sqrt{\nu^{*2} - \mu^2}\right)(X - 1) & (X > 1) \end{cases} \tag{5.4}$$

и нечетные решения, взяв в интервале $(-1, 1)$ синус вместо косинуса. Здесь обозначено

$$\mu^2 = \frac{(-\nu^2 + \omega^2)}{\alpha} + \nu^2 q + \frac{1}{3}\nu^4, \quad q > 0 \tag{5.5}$$

Подставив выражения (5.4) в условия сопряжения в точке $X = 1$ (непрерывность ψ и $(1 - \alpha h)\, d\psi / dX$, или с принятой точностью $d\psi / dX$), можно получить

$$\mu_k = {}^1/_2\, \pi\, (k-1) + \eta_k \qquad (0 \leqslant \eta_k < {}^1/_2\pi) \tag{5.6}$$

Здесь η_k определяется неявным уравнением

$$ {}^1/_2\pi\, (k-1) + \eta_k = \nu^* \cos \eta_k, \quad {}^1/_2\pi\, (k-1) \leqslant \nu^* < \infty \tag{5.7}$$

С другой стороны, из определения (5.5) с точностью $O\,(\alpha^2)$ следует:

$$\frac{d^2\omega_k}{d\nu^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{q}} \left(\frac{q^2}{2} \frac{d^2}{d\nu^{*2}} \left(\frac{\mu_k{}^2\,(\nu^*)}{\nu^*} \right) - \nu^* \right) \tag{5.8}$$

Из формулы (5.7) вытекает, что в окрестности $\nu^* = {}^1/_2\pi\, (k-1)$ функция

$$\frac{d^2}{d\nu^{*2}} \left(\frac{\mu_k{}^2}{\nu^*} \right) < 0$$

и положительна в окрестности $\nu^* = \infty$. Следовательно, правая часть равенства (5.8) при достаточно малых q не имеет нулей, при достаточно больших q имеет нули. Численные расчеты показывают, что при $q > q_k$ функция $d^2\omega_k / d\nu^2$ имеет два нуля первого порядка, которые при $q = q_k$ сливаются, образуя нуль второго порядка. Следует заметить, что в приближении мелкой воды в (5.8) отсутствует слагаемое — ν^* в скобке, поэтому имеется один нуль первого порядка при всех $q > 0$.

Итак, если дно представляет собой широкую ступеньку небольшой высоты, то вдоль хребта распространяется очень медленно затухающая группа волн. Скорость ее затухания $|y|^{-\gamma}$ зависит от площади ступеньки S следующим образом:

$$\begin{gathered} \gamma = {}^1/_2 \text{ при } 0 < 2q = S / h^2 < 33.6 \\ \gamma = {}^1/_4 \text{ при } S / h_0^2 = 43.0, 33.6,\ 34.4,\ \ldots \\ \gamma = {}^1/_3 \text{ при остальных } S / h_0^2 \end{gathered} \tag{5.9}$$

Таким образом, влияние подводного хребта на распространение волн сводится не только к простому увеличению амплитуды, но существенным образом определяет сам процесс распространения волны, изменяя характер затухания ее вдоль хребта. Вдоль хребта могут распространяться очень медленно затухающие волны (5.1), в то время как в бассейне с ровным дном асимптотика волн имеет вид [8]

$$\zeta \sim (x^2 + y^2)^{-{}^1/_2} \tag{5.10}$$

Поступила 4 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Munk W. H., Arthur R. S. Wave intensity along a refracted ray. Gravity waves., Nat. Bur. Standards Circ., 1952, p. 521.
2. Сунь Цао О волноводе поверхностных волн в тяжелой жидкости. Изв. СО АН СССР, 1959, № 5.
3. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., Гостехиздат, 1936.
6. Ursell F. Edge waves on a sloping beach. Proc. Roy. Soc. A, 1952, vol. 214, No. 116, pp. 79—97.
7. Гарипов Р. М. Неустановившиеся волны над подводным хребтом. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 3.
8. Газарян Ю. Л. О поверхностных волнах в океане, возбуждаемых подводными землетрясениями. Акуст. ж., 1955, т. 1, № 3.