

ЗАТУХАНИЕ ПЛОСКИХ ВЫНУЖДЕННЫХ СЛАБЫХ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ГАЗАХ ПОД ВЛИЯНИЕМ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА

В. А. Прокофьев

(Москва)

Рассматривается влияние радиационного переноса тепла на распространение вынужденных плоских гармонических волн давления малой амплитуды в безграничном излучающем и поглощающем невязком и нетеплопроводном газе. Механическим действием радиации и ее вкладом во внутреннюю энергию среды пренебрегается. Цель исследования — построить теорию с учетом точного углового распределения интенсивности интегральной (осредненной по спектру) радиации и выполнить фактический расчет параметров волн, а также сравнением с выводами, полученными на основании осредненного по углам уравнения переноса радиации [1], оценить погрешность, которая вносится различными способами осреднения и продемонстрировать значение учета неізотропности излучения в радиационной гидродинамике.

Разделение задачи о распространении волн в среде на частные случаи, когда учитывается влияние каждый раз лишь одного какого-нибудь процесса, является обычным приемом определения коэффициентов затухания в линейной теории Стокса — Рэлея — Кирхгофа — Ланжевена. Это применимо, когда в первом приближении действия отдельных механизмов диссипации энергии (вязкости, теплопроводности, излучения и т. д.) аддитивны. Изолированное изучение одного из факторов сильно упрощает задачу и делает все выводы легко поддающимися физическому толкованию, а полученные таким образом результаты оказываются полезными и в решении с учетом всех действующих факторов.

§ 1. Характеристическое уравнение. Одномерное с плоскими волнами (вдоль оси x) движение сжимаемой невязкой жидкости с учетом притока тепла за счет поглощения (абсорбции) и излучения (эмиссии) радиационной энергии описывается системой уравнений газовой динамики излучающего газа, включающей уравнение переноса импульса, массы, энергии и радиации, а также уравнения состояния (для двухпараметрического газа) и уравнение состояния радиации — закон Кирхгофа (если радиацию считать локально равновесной)

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

$$\cos \vartheta \frac{\partial J}{\partial x} = \omega (B - J), \quad U = \varphi(\rho, T), \quad p = f(\rho, T), \quad B = \frac{\eta}{\alpha} = \frac{\sigma'}{\pi} T^4 \quad (1.1)$$

$$H(x, t) = 2\pi \int_0^\pi J(x, t, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \quad \omega \equiv \rho\alpha$$

Здесь p, ρ, T, u — давление, плотность, температура и скорость жидкости; x, t — координата и время; U — плотность внутренней термической энергии; J — интегральная интенсивность радиации; ϑ — угол между лучом, вдоль которого переносится радиационная энергия, и осью x ; H — поток радиации; α — массовый коэффициент поглощения радиации; η — интегральный коэффициент излучения; σ' — постоянная Стефана — Больцмана. Все функции, входящие в эти уравнения, считаются непрерывными.

Пусть в безграничном однородном покоящемся газе (его параметры будут отмечаться индексом 0) в координатной плоскости $x = 0$ возбуж-

даются малые плоские гармонические возмущения. В результате этого все параметры газа получают малые приращения (обозначены штрихами)

$$R(x, t) = R_0 [1 + R'(x, t)], \quad R'(x, t) = R'(0, 0) \exp(ax + i\sigma t) \quad (1.2)$$

$$u = c_0 u', \quad H = 2\pi B_0 H', \quad u_0 = 0, \quad H_0 = 0, \quad J_0 = B_0$$

Здесь под R понимаются p, ρ, T, ω, J, B ; c_0 — адиабатическая скорость звука; a — комплексная константа, подлежащая вычислению; σ — циклическая частота вынужденных колебаний. Считая все приращения и их производные малыми и подставляя (1.2) в линеаризованную систему уравнений (1.1), можно получить для определения приращений систему линейных однородных уравнений, условием существования нетривиального решения которой является характеристическое уравнение

$$\frac{1}{2q} \ln \frac{1+q}{1-q} = 1 + \gamma i \zeta_1 \frac{1+m^2}{\gamma + m^2} \quad (1.3)$$

$$q = \frac{a}{\omega_0} = mv \equiv q_r + iq_i, \quad m \equiv m_r + im_i = \frac{c_0 a}{\sigma}, \quad v = \frac{1}{w} = \frac{\sigma}{c_0 \omega_0}$$

$$\zeta_1 = \zeta^{-1} = \frac{v}{Z}, \quad Z = \frac{16\pi B_0}{(\rho c_v T)_0 c_0}, \quad c_0 = \left(\gamma h_1 \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

$$\gamma = 1 + \frac{h_2 h_3}{h_1 h_4} + \frac{h_2}{h_1 h_4} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad h_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_0, \quad h_2 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_0$$

$$h_3 = - \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_0, \quad h_4 = (c_v T)_0$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей, c_0 — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Логарифмическая функция в уравнении (1.3) написана взамен интеграла

$$\ln \frac{1+q}{1-q} = \int_{1-q}^{1+q} \frac{dz}{z} \quad (1.4)$$

где интегрирование на комплексной плоскости совершается вдоль отрезка прямой $1+q, 1-q$. Следовательно, берется лишь одна ветвь логарифмической функции с аргументом в интервале $(0, \pi)$.

Анализ влияния радиационного притока тепла на слабые волны сводится к определению q (m или a) из уравнения (1.3) в зависимости от частоты колебаний и свойств среды. Обе части уравнения — четные функции m : возбуждаемые колебания распространяются по одним и тем же законам в обе стороны. Не существует ни чисто мнимых, ни действительных корней характеристического уравнения, кроме тривиального корня, соответствующего покою. Возникают затухающие бегущие волны.

Все параметры могут быть выражены через один из них, например через относительное приращение температуры

$$p' = \frac{\gamma h_2}{\gamma + m^2} T', \quad \rho' = \frac{h_2}{h_1} \frac{m^2}{\gamma + m^2} T', \quad u' = i \frac{h_2}{h_1} \frac{m}{\gamma + m^2} T', \quad B' = 4T' \quad (1.5)$$

$$U' = \left(h_4 + \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{m^2}{\gamma + m^2} \right) T', \quad J' = \frac{4T'}{1 + q \cos \Phi}, \quad H' = \frac{2}{q} \left(1 - \frac{1}{2q} \ln \frac{1+q}{1-q} \right) T'$$

Физический смысл v, w, Z, ζ, m_r, m_i объяснен ранее [1]; соответствие величин следующее:

$$w = gw^\circ, \quad Z = 2 \frac{g'}{g} Z^\circ, \quad \zeta = 2g' \zeta^\circ, \quad Zv = 2 \frac{g'}{g^2} Z^\circ v^\circ \quad (1.6)$$

Знаком $^\circ$ отмечены величины статьи [1]; g, g' — постоянные коэффициенты осреднения по направлениям уравнения переноса радиации. Зна-

чение q видно из тождеств

$$\begin{aligned} |q_r| \equiv \xi = \alpha_\tau = |m_r| v = \lambda_r |a_r|, \quad \lambda_r = \frac{1}{\omega_0}, \quad v = \frac{2\pi\lambda_r}{l_0} = \frac{2\pi}{l_{\tau 0}} = 2\pi n_{\tau 0} \\ |q_i| \equiv \eta = |m_i| v = \frac{\sigma}{\omega_0 c_a} = v_a = \frac{1}{w_a} = \frac{2\pi\lambda_r}{l} = \frac{2\pi}{l_\tau} = 2\pi n_\tau \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь α_τ — коэффициент поглощения волн на длине свободного пробега радиации λ_r ; $l_{\tau 0}$, l_τ — оптические длины волн адиабатической звуковой волны и волны давления; $n_{\tau 0}$ и n_τ — соответствующие оптические волновые числа.

Далее вычисляются коэффициенты затухания волн давления: 1) α_{a0} на длине звуковой волны $l_0 = 2\pi c_0 / \sigma$; 2) α_a на длине волны давления; 3) α_{a1} на единице длины; 4) α_2 , пропорциональное представляющему интерес в акустике отношению коэффициента α_{a1} к квадрату частоты:

$$\alpha_{a1} = |a_r|, \quad \alpha_{a0} = 2\pi\alpha_{10} = 2\pi |m_r|, \quad \alpha_a = 2\pi\alpha_1 = 2\pi \frac{m_r}{m_i}, \quad \alpha_2 = \frac{|m_r|}{|v|} \quad (1.8)$$

В характеристическое уравнение входят два определяющих безразмерных числа v и Z или их комбинации. Их можно описать через характерное время колебаний в волне — период Φ , через характерное время абсорбции t_{ra} , равное времени прохождения волной длины свободного пробега радиации, и через характерное время эмиссии (высвечивания) t_{re} , равное времени, потребному на эмиссию всей изменяемой части внутренней энергии

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{2\pi}{\sigma}, \quad t_{ra} = \frac{\lambda_r}{c_0} = \frac{1}{c_0 \omega_0}, \quad t_{re} = \frac{\vartheta_0}{E} = \left(\frac{\rho c_v T}{4\pi B \omega} \right)_0 \\ E = 4\pi \eta_0, \quad \vartheta_0 = h_4 = (c_v T)_0 \\ v = \frac{2\pi t_{ra}}{\Phi}, \quad Z = \frac{4t_{ra}}{t_{re}}, \quad \xi_1 = \frac{\pi t_{re}}{2\Phi}, \quad Zv = \frac{8\pi t_{ra}}{\Phi t_{re}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Можно дать также энергетическое толкование этих чисел (1.10)

$$Z = 4 \frac{4\pi \eta_0 t_{ra}}{c_{v0} T_0}, \quad \xi_1 = \frac{\pi}{2} \frac{c_{v0} T_0}{4\pi \eta_0 \Phi}, \quad Zv = \frac{6\pi k_r T_0}{l_0 (\rho c_v T c_0)_0}, \quad k_r = \frac{16\pi \lambda_r B_0}{3T_0}$$

Здесь E — излучаемая единицей массы в единицу времени тепловая энергия, ϑ_0 — внутренняя термическая энергия газа, k_r — коэффициент радиационной теплопроводности. Число Z характеризует отношение излученной за время t_{ra} единицей массы энергии и внутренней термической энергии единицы массы, ξ_1 характеризует отношение внутренней термической энергии и энергии, излучаемой единицей массы за период, произведение Zv характеризует отношение потока тепла за счет радиационной теплопроводности к потоку тепла за счет конвекции. Здесь всюду в качестве характерной скорости введена скорость звука c_0 . Как нетрудно видеть, Zv является (с точностью до постоянного множителя) обратной величиной числа Пекле, построенного для k_r , c_0 .

Физическое истолкование результатов исследования уравнения (1.3) можно дать в рамках терминологии релаксационной акустики и с энергетической точки зрения.

§ 2. Почти адиабатические волны. Из характеристического уравнения следует, что необходимым и достаточным условием существования волн, близких к адиабатическим (слабо затухающим и распространяющимся почти со скоростью звука), является малость параметра β , причем здесь (и ниже)

$$\beta = KZ, \quad K = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{1}{v} \arctg v \right), \quad K_2 = \frac{\alpha_2}{2} \frac{v}{K}, \quad \alpha_3 = 2 \frac{\gamma - 1}{1 + v^2} \quad (2.1)$$

При малых β , если γ не близко к 1, получается

$$\begin{aligned} \pm m_r = & \frac{\gamma-1}{2\gamma} \beta - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \beta^3 \left\{ 1 - \frac{K_2}{8\gamma^2} (3 + 9\gamma - \alpha_3) + \frac{K_2^2}{4\gamma^2} \right\} + \\ & + \frac{\gamma-1}{256\gamma^5} \beta^5 \left\{ 128(3\gamma-2)\gamma^3 + K_2 \left[5(1+5\gamma+19\gamma^2-153\gamma^3) - (1-2\gamma-159\gamma^2)\alpha_3 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\alpha_3^2 \left(\frac{1}{3} + 13\gamma - \alpha_3 \right) \right] + 4K_2^2 \left[5(1+6\gamma+25\gamma^2) - 2(3+17\gamma)\alpha_3 + \frac{11}{3}\alpha_3^2 \right] - \right. \\ & \left. - 8K_2^3 [5(1+3\gamma) - 3\alpha_3] + 8K_2^4 \right\} + O(\beta^7) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \pm m_i = & 1 + \frac{\gamma-1}{8\gamma^2} \beta^2 (1+3\gamma-2K_2) + \frac{\gamma-1}{128\gamma^4} \beta^4 \left\{ 1 + 5\gamma + 35\gamma^2 - 105\gamma^3 + \right. \\ & \left. + 4K_2 \left[1 + 6\gamma + 41\gamma^2 - (1+7\gamma)\alpha_3 + \frac{2}{3}\alpha_3^2 \right] - 24K_2^2 \left(1 + 3\gamma - \frac{1}{2}\alpha_3 \right) + 8K_2^3 \right\} + O(\beta^6) \end{aligned}$$

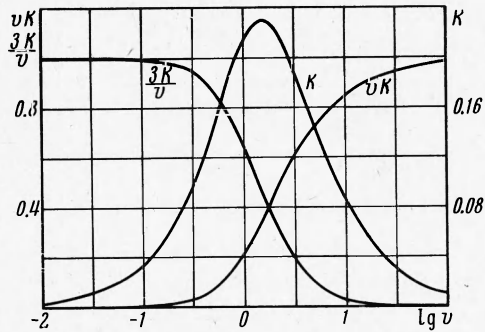
$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{\gamma-1}{2\gamma} \beta + \frac{\gamma-1}{16\gamma^3} \beta^3 \{ 1 + 2\gamma - 11\gamma^2 + K_2(1+11\gamma-\alpha_3) - 2K_2^2 \} + \\ & + \frac{\gamma-1}{256\gamma^5} \beta^5 \left\{ 3 + 12\gamma + 20\gamma^2 - 462\gamma^3 + 555\gamma^4 + K_2 [7 + 67\gamma + 293\gamma^2 - 1007\gamma^3 - \right. \\ & \left. - (7 + 26\gamma - 193\gamma^2)\alpha_3 - 26\gamma\alpha_3^2 + 2\alpha_3^3] + 4K_2^2 \left[8\gamma + 154\gamma^2 - 2(1+19\gamma)\alpha_3 + \frac{11}{3}\alpha_3^2 \right] - \right. \\ & \left. - 8K_2^3 (3 + 17\gamma - 3\alpha_3) + 8K_2^4 \right\} + O(\beta^7) \end{aligned}$$

Положительная функция $K(v)$ имеет единственный экстремум — максимум (фиг. 1) в точке $v = v_m$, причем $v_m = 1.514994$ ($w_m = 0.660068$), $K(v_m) = 0.229878$. Параметр $\beta \leq 0.2299Z$, т. е. при любой частоте мал, если Z мало, что имеет место во всех газах и жидкостях, не чрезмерно далеких от нормального состояния. Неравенство $\beta \ll 1$ выполняется при любом Z , если v либо достаточно мало, либо достаточно велико, при этом неравенство $\beta \ll 1$ превращается в следующие:

$$\begin{aligned} 1) \quad v & \ll 1, \quad Zv \ll 1 \\ 2) \quad v & \gg 1, \quad \xi \ll 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

В первом приближении из (2.2) имеем (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \alpha_a \approx \alpha_{a0} = & \pi \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta, \quad \alpha_r = \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta v \\ \alpha_2 = & \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\beta}{v} \end{aligned} \quad (2.4)$$



Фиг. 1. Коэффициенты поглощения (приведенные) волн давления, близких к адиабатическим

Истинный коэффициент поглощения достигает максимума $\alpha_{a \max} = 0.229878 \times \pi (\gamma-1) Z\gamma^{-1}$ при $v = v_m$, а при неограниченном убывании и возрастании v стремится к нулю. Коэффициент α_r с ростом v монотонно растет от 0 до $\frac{1}{2}(\gamma-1) Z\gamma^{-1}$. Коэффициент $\alpha_{a1} \sim \sigma^2$ лишь при $v \leq \sim 0.1$. Общий ход кривых совпадает с полученным в статье [1], но количественное различие может быть значительным. Все коэффициенты поглощения $\sim Z$, они тем больше, чем больше γ .

При малых v правые части (2.2) упрощаются

$$\begin{aligned} \pm m_r = & \frac{\gamma-1}{2\gamma} z_1 \left(1 - \frac{3}{5} v^2 + \frac{3}{7} v^4 \right) - \frac{\gamma-1}{16\gamma^3} z_1^3 \left[5\gamma^2 - 30\gamma + 33 + \frac{3}{5} (-35\gamma^2 + \right. \\ & \left. + 154\gamma - 143) v^2 \right] + \frac{\gamma-1}{256\gamma^5} z_1^5 (543\gamma^4 - 3012\gamma^3 + 7794\gamma^2 - 9876\gamma + 4679) + O(k_7) \pm \\ \pm m_i = & 1 + \frac{\gamma-1}{8\gamma^2} z_1^2 \left[7 - 3\gamma + \frac{6}{5} (5\gamma - 9) v^2 \right] + \frac{\gamma-1}{128\gamma^4} z_1^4 (35\gamma^3 - 385\gamma^2 - 1001\gamma - 715) + \\ & + O(k_6) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma-1}{2\gamma} z_1 \left(1 - \frac{3}{5} v^2 + \frac{3}{7} v^4 \right) - \frac{\gamma-1}{8\gamma^3} z_1^3 \left[\gamma^2 - 10\gamma + 13 - \frac{3}{10} (42\gamma^2 - 163\gamma + 145) v^2 \right] +$$

$$+ \frac{\gamma-1}{256\gamma^5} z_1^5 (496\gamma^4 - 2502\gamma^3 + 6314\gamma^2 - 8242\gamma + 4062) + O(k_7)$$

$$z_1 = 1/2 Zv, \quad k_6 = z_1^2 (v^4 + z_1^2 v^2 + z_1^4), \quad k_7 = z_1 (v^6 + z_1^2 v^4 + z_1^4 v^2 + z_1^6)$$

В главных членах получается качественное соответствие с формулами осредненной теории. Количественное совпадение получится при надлежащем выборе коэффициентов осреднения, например, при 1) $g = 1/\sqrt{3}$, $g' = 1/2$, или 2) $g = g' = 2/3$, или 3) $g = 0.6402$, $g' = 0.6146$. Однако в последующих членах будет различие с осредненной теорией. В первом приближении $\alpha_a = \alpha_{a0} \sim \sigma$, $\alpha_\tau \sim \sigma^2$, $\alpha_{a1} \sim \sigma^2$, все коэффициенты пропорциональны Z ; $\alpha_{a1} \sim \lambda_r$, $\alpha_a \sim \lambda_r$, $\alpha_\tau \sim \lambda_r^2$.

При больших v из (2.2) следует

(2.6)

$$\pm m_r = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \zeta \left\{ 1 + \frac{1}{v^2} - \frac{\gamma^2 + 2\gamma + 5}{8\gamma^2} \zeta^2 - \frac{\pi}{2v} \left(1 - \frac{\gamma^2 + \gamma + 1}{\gamma^2} \zeta^2 \right) - \frac{1}{3v^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{3(\pi^2 + 4)}{32} \frac{5\gamma^2 + 2\gamma + 1}{\gamma^2} \frac{\zeta^2}{v^2} + \frac{7\gamma^4 + 12\gamma^3 + 18\gamma^2 + 28\gamma + 63}{128\gamma^4} \zeta^4 + O(v^{-6} + \zeta^6) \right\}$$

$$\pm m_i = 1 + \frac{(\gamma-1)(\gamma+3)}{8\gamma^2} \zeta^2 - \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)\pi}{4\gamma^2} \frac{\zeta^2}{v} + \frac{(\gamma-1)(3\gamma+1)}{32\gamma^2} (\pi^2 + 8) \frac{\zeta^2}{v^2} -$$

$$- \frac{(\gamma-1)(5\gamma^3 + 9\gamma^2 + 15\gamma + 35)}{128\gamma^4} \zeta^4 + O(v^{-5} + \zeta^5)$$

В первом приближении получается качественное совпадение с осредненной теорией, различие может быть лишь в значениях символов ζ и Z . Коэффициенты поглощения $\sim Z$; $\alpha_a = \alpha_{a0} \sim \sigma^{-1}$, α_{a1} и α_τ не зависят от σ ; $\alpha_{a1} \sim \lambda_r^{-1}$, $\alpha_a \sim \lambda_r^{-1}$, α_{a0} не зависит от λ_r . Когда разность $\gamma - 1 \equiv \delta \ll 1$, то волны также будут близки к адиабатическим при любых Z , v

(2.7)

$$\pm m_r = a_1 \delta (1 + b_1 \delta) + O(\delta^3), \quad \pm m_i = 1 + a_2 \delta (1 + b_2 \delta) + O(\delta^3)$$

$$a_1 = 1/2 \beta (1 + \beta^2)^{-1}, \quad a_2 = a_1 \beta, \quad b_1 = 1/2 (1 + \beta^2)^{-2} [\beta^2 (3 - \beta^2) K_1 + 2 (\beta^4 - 2\beta^2 - 1)]$$

$$b_2 = 1/4 (1 + \beta^2)^{-2} [2 (3\beta^2 - 1) K_1 - (\beta^4 + 14\beta^2 + 5)], \quad K_1 = v(1 + v^2)^{-1} K^{-1}$$

В первом приближении отсюда следует

$$\alpha_1 = \alpha_{10} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{\beta}{1 + \beta^2}, \quad \alpha_\tau = \frac{\gamma-1}{2} \frac{\beta v}{1 + \beta^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma-1}{2} \frac{Zv}{3} \quad \text{при } v \ll 1, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma-1}{2} \zeta \quad \text{при } v \gg 1 \quad (2.8)$$

При $\beta(v_m) \ll 1$ коэффициент $\alpha_1(v)$ имеет единственный экстремум — максимум в точке $v = v_m$. При $\beta(v_m) > 1$ имеются три экстремальные точки: минимум при $v = v_m$ и по обе стороны от этой точки по максимуму, равному $1/4\delta$, при v_{m1} и v_{m2} . Величины v_{m1} и v_{m2} являются корнями уравнения $\beta = 1$, зависят от числа Z и с ростом Z от $Z = K^{-1}(v_m)$ до бесконечности v_{m1} убывает от v_m до нуля, а v_{m2} растет от v_m до ∞ . При $Z \gg 1$ имеет место соотношение $v_{m1} v_{m2} = 3$.

§ 3. Почти изотермические волны. В случае $\beta \gg 1$ образуются волны, скорость которых отличается от изотермической скорости звука лишь на величины порядка β^{-2} ; корни характеристического уравнения представляются рядами

(3.1)

$$\pm m_r = 1/2 (\gamma - 1) [\beta_1 + b_3 \beta_1^3 + b_5 \beta_1^5 + O(\beta_1^7)], \quad \beta_1 = (K'Z)^{-1}, \quad K' = K(v')$$

$$\pm m_i = \sqrt{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma-1}{8\gamma} \beta_1^2 (b_2 + b_4 \beta_1^2) + O(\beta_1^6) \right], \quad v' = \sqrt{\gamma} v,$$

$$b_2 = 5\gamma - 1 - 2K_2', \quad b_3 = 1 - 2\gamma + 1/8 K_2' \gamma^{-1} [3(5\gamma - 1) + \alpha_3' - 4K_2']$$

$$b_4 = \frac{1 - 5\gamma + 2K_2'}{16\gamma} [(\gamma - 1)(19\gamma + 1) - 2(7\gamma - 3)K_2' - 6\alpha_3' K_2' + 4K_2'^2] + 4(\gamma - K_2') b_3 -$$

$$- 1/12 \gamma^{-1} [6\gamma(\gamma - 1)^2 - 1/4 (5 - 3v'^2) \alpha_3'^2 K_2'], \quad K_2' = K_2(v'), \quad \alpha_3' = \alpha_3(v')$$

$$b_5 = \frac{K_2' - \tilde{\gamma}}{4\gamma} b_4 - \frac{b_3}{8\gamma} \{(\gamma - 1)(7\gamma + 1) + (3 - 11\gamma - 3\alpha_3' + 4K_2')K_2'\} + \\ + \frac{b_2}{64\gamma^2} \left\{ 3\gamma(\gamma - 1)(7\gamma - 3) + \frac{1}{2} K_2' \left[3(\gamma - 1)(1 - 9\gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{65\gamma - 29 + 3(11\gamma + 1)v^2}{6(\gamma - 1)} \alpha_3'^2 + \frac{3(3 + v^2)}{\gamma - 1} \alpha_3' K_2' \right] \right\} - \frac{3v^4 - 8v^2 + 1}{768\gamma^2} K_2' a_3'^3$$

Условие $\beta \gg 1$ для малых v переходит в требование $\xi \ll 1$, а для больших — в условие $Zv \gg 1$, т. е. формулы (3.1) справедливы при больших значениях Z в диапазоне $Z^{-1} \ll v \ll Z$. В первом приближении

$$\alpha_{10} = \frac{\gamma - 1}{2} \beta_1, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}} \beta_1, \quad \alpha_\tau = \frac{\gamma - 1}{2} \beta_1 v \quad (3.2)$$

$$v \ll 1, \quad m_r = \pm \frac{\gamma - 1}{2Zv}, \quad m_i = \pm \sqrt{\gamma} \left[1 - \frac{(\gamma - 1)(5 - \gamma)}{2\gamma^2 Z^2 v^2} \right]$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma Z v}, \quad \alpha_\tau = \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma} Z}$$

$$v \gg 1, \quad m_r = \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v'}{Z}, \quad m_i = \pm \sqrt{\gamma} \left[1 - \frac{(\gamma - 1)(3\gamma + 1)}{2\gamma} \frac{v'^2}{Z^2} \right]$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma - 1}{2} \xi_1, \quad \alpha_\tau = \frac{\gamma - 1}{2} \xi_1 v'$$

Коэффициенты α_{10} , α_1 достигают минимума

$$v_{\min} = v_m / \sqrt{\gamma}, \quad \alpha_{10\min} = 2.175 (\gamma - 1) / Z, \quad \alpha_{1\min} = 2.175 (\gamma - 1) / (\sqrt{\gamma} Z)$$

§ 4. Диффузно излучающие волны. Пусть $Z \gg 1$, $\beta = O(1)$. Это равносильно условиям

$$Z \gg 1, \quad v \ll 1, \quad Zv = O(1); \quad Z \gg 1, \quad v \gg 1, \quad \xi = O(1) \quad (4.1)$$

При $v \ll 1$ получается

$$m_r = m_{r0} \mp 0.3 (A_2^2 + B_2^2)^{-1} [m_{r0} (A_1 A_2 + B_1 B_2) + m_{i0} (A_1 B_2 - A_2 B_1)] v^2 + O(v^4)$$

$$m_i = m_{i0} \mp 0.3 (A_2^2 + B_2^2)^{-1} [m_{i0} (A_1 A_2 + B_1 B_2) - m_{r0} (A_1 B_2 - A_2 B_1)] v^2 + O(v^4)$$

$$A_1 = \gamma (m_{r0}^2 - m_{i0}^2) + (m_{r0}^4 - 6m_{r0}^2 m_{i0}^2 + m_{i0}^4), \quad A_2 = \gamma + 2 (m_{r0}^2 - m_{i0}^2)$$

$$B_1 = 2m_{r0} m_{i0} [\gamma + 2 (m_{r0}^2 - m_{i0}^2)], \quad B_2 = 4m_{r0} m_{i0} - \gamma z_1$$

$$m_{r0} = \pm \frac{v_1}{\sqrt{2z_1}}, \quad m_{i0} = \pm \frac{v_2}{\sqrt{2z_1}}, \quad v_1 = \left[\frac{\gamma}{2} (a_4 - a_2 - z_1) \right]^{1/2}$$

$$v_2 = \left[\frac{\gamma}{2} (a_4 + a_2 + z_1) \right]^{1/2}, \quad a_1 = \left[(1 - z_1^2)^2 + \frac{4(2 - \gamma)^2}{\gamma^2} z_1^2 \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

$$a_2 = [1/2 (a_1 - 1 + z_1^2)]^{1/2}, \quad a_3 = [1/2 (a_1 + 1 - z_1^2)]^{1/2}$$

$$a_4 = [1 + a_1 + z_1^2 + 2(a_2 z_1 - v a_3)]^{1/2} \quad (v = 1, \text{ если } \gamma < 2, \quad v = -1, \text{ если } \gamma > 2)$$

В первом приближении формулы совпадают с полученными в осредненной теории, но там $z_1 = Z^0 v^0$. Числа Z и v входят только в комбинации Zv . Коэффициент α_τ возрастает вместе с z_1 от $(\gamma - 1) Z v^2 / (6\gamma)$, пропорциональной σ^2 и λ_r^2 , до $3(\gamma - 1) / (2\sqrt{\gamma} Z)$, что не зависит от σ и λ_r . Для одинаковых z_1 значения $Z\alpha_\tau$ тем больше, чем больше γ . При малых z_1 в первом приближении $\alpha_{10} \sim \sigma$ и $\sim \lambda_r$, при больших z_1 $\alpha_{10} \sim \sigma^{-1}$ и $\sim \lambda_r^{-1}$, причем

$$z_1 \ll 1, \quad \alpha_{10} = \alpha_1 = (\gamma - 1) Z v / (6\gamma); \quad z_1 \gg 1, \quad \alpha_{10} = \alpha_1 = 3(\gamma - 1) / (2\sqrt{\gamma} Z v) \quad (4.4)$$

В остальном диапазоне z_1 при одинаковых z_1 и γ будет $\alpha_1 < \alpha_{10}$, но общий ход кривых $\alpha_{10}(z_1)$ и $\alpha_1(z_1)$ одинаков; они имеют по одной экстремальной точке — максимуму

$$z_{1\max} = 1, \quad \alpha_{10\max} = \frac{1}{2} (2\sqrt{\gamma} - \gamma - \sqrt{\gamma(2 - \gamma)})^{1/2}$$

$$\alpha_{1\max} = (1 - \sqrt{2 - \gamma}) (1 + \sqrt{\gamma})^{-1} \quad (4.5)$$

Рассмотренный случай соответствует учету радиации в диффузионном приближении. Если считать, что радиационный теплообмен осуществляется механизмом радиационной теплопроводности, то в системе (1.1) вместо уравнения переноса радиации следует использовать соотношение $H = -k_r \partial T / \partial x$ и вместо характеристического уравнения (1.3) получится (4.3).

§ 5. Вывеивающиеся волны. В случае $Z \gg 1$, $\xi = 0$ (1) имеем

$$m_r = m_{r0} \mp \frac{\pi(\gamma-1)(\gamma-\xi^2)\xi}{4(1+\xi^2)(\gamma^2+\xi^2)} v^{-1} + \frac{(\gamma-1)(m_{i0}A - m_{r0}B)\xi}{2\gamma(1+\xi^2)^2} v^{-2} + \dots \quad (5.1)$$

$$m_i = m_{i0} \mp \frac{\pi(\gamma^2-1)\xi^2}{4(1+\xi^2)(\gamma^2+\xi^2)} v^{-1} - \frac{(\gamma-1)(m_{r0}A + m_{i0}B)\xi}{2\gamma(1+\xi^2)^2} v^{-2} + \dots$$

$$A = 1 - \xi^2 + a\xi[4\xi^4 + (3\gamma^2 - 2\gamma - 11)\xi^2 - (9\gamma^2 + 2\gamma - 1)]$$

$$B = -2\xi + a[(\gamma+1)\xi^4 + (9\gamma^2 - 5)\xi^2 - \gamma(3\gamma+1)], \quad a = \frac{\pi^2\xi}{16(\gamma^2+\xi^2)(1+\xi^2)}$$

$$m_{r0} = \pm \left\{ \frac{\gamma[V\gamma^2\xi_1^4 + (\gamma^2+1)\xi_1^2 + 1 - \gamma\xi_1^2 - 1]}{2(1+\gamma^2\xi_1^2)} \right\}^{1/2}$$

$$m_{i0} = \pm \left\{ \frac{\gamma[V\gamma^2\xi_1^4 + (\gamma^2+1)\xi_1^2 + 1 + \gamma\xi_1^2 + 1]}{2(1+\gamma^2\xi_1^2)} \right\}^{1/2} \quad (5.2)$$

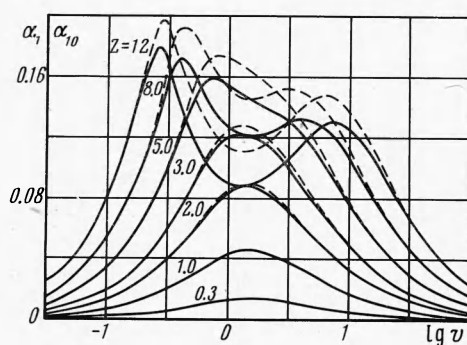
В первом приближении образуются чисто излучающие волны [1], которые зависят только от эмиссии радиации в волне. По форме выражения в первом приближении совпадают с выведенными из осредненного уравнения переноса радиации. В предельных случаях

$$\xi_1 \ll 1, \quad \alpha_{i0} = \frac{V\gamma}{2}(\gamma-1)\xi_1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}(\gamma-1)\xi_1$$

$$\alpha_\tau = \frac{V\gamma}{2}(\gamma-1)Z\xi_1^2, \quad \alpha_{a1} = \frac{\gamma-1}{2}V\gamma\xi_1 \frac{\sigma}{c_0} \quad (5.3)$$

$$\xi_1 \gg 1, \quad \alpha_{i0} = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\xi, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\xi, \quad \alpha_\tau = \frac{\gamma-1}{2\gamma}Z, \quad \alpha_{a1} = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\xi \frac{\sigma}{c_0}$$

Величины ξ_1 , α_{i0} и α_1 имеют единственные экстремумы-максимумы



Фиг. 2. Коэффициенты поглощения на длине волны α_1 (сплошные линии) и на длине адиабатической звуковой волны α_{i0} (пунктирные линии) при $\gamma = 5/3$. На кривых указаны числа Z

$$\xi_{1 \max} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{3\gamma+1}{\gamma+3} \right)^{1/2} \quad (5.4)$$

$$\alpha_{i0 \max} = \frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{V\gamma(\gamma+1)}$$

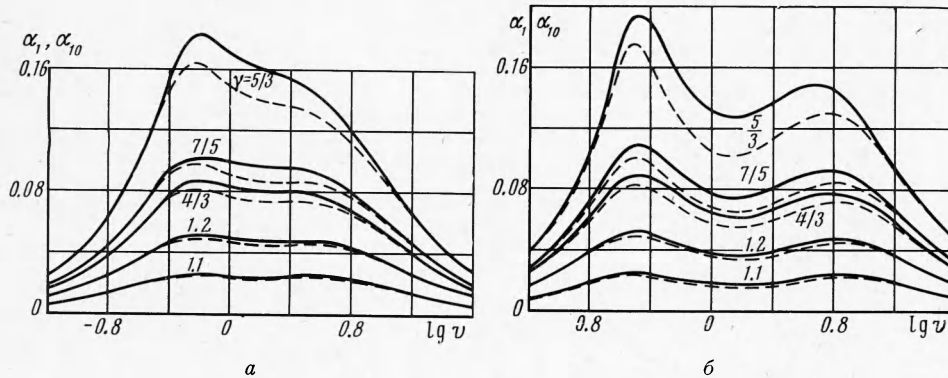
$$\xi_{1 \max} = \frac{1}{V\gamma}, \quad \alpha_{1 \max} = \frac{V\gamma-1}{V\gamma+1}$$

Коэффициенты поглощения тем больше, чем больше γ .

Рассмотренный здесь случай в первом приближении равносителен ньютоновскому случаю движения волн в чисто излучающей среде [2,3] без учета поглощения радиации. Предположив, что перенос тепла вызван только отклонением эмиссии радиационной энергии от равновесной, следует в уравнения переноса радиации (1.1) в правую часть вместо $B - J$ подставить $B - B_0$, тогда вместо (1.3) получится (5.2).

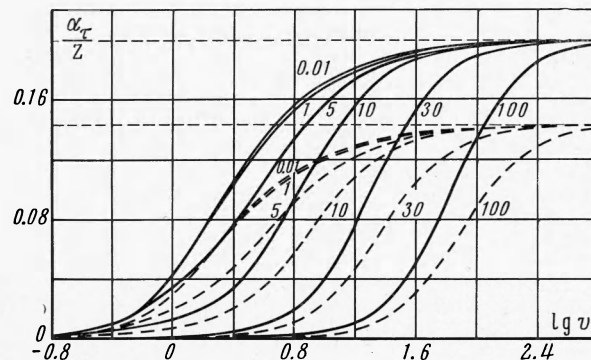
§ 6. Затухание волн в излучающем и поглощающем газе. При малых Z переносимая радиацией доля энергии мала, процесс почти адиабатический, волны давления слабо затухают, распространяются с лапласовской скоростью звука; они описаны в § 2. В случае больших оптических длин внутри волны устанавливается радиационное равновесие, в случае больших частот — замороженное состояние. При умеренных оптических длинах волн достигается максимум коэффициентов поглощения α_{i0} , α_1 и мини-

мум скорости. С увеличением Z до значений 4—5 коэффициенты поглощения возрастают, но общая картина зависимости от v сохраняется, как видно из фиг. 2—4, построенных на основании численных решений уравнения (1.3). С дальнейшим ростом Z происходят качественные изменения кривых α_{10} и α_1 в области $v = 0$ (1): сначала справа от максимума появляются две дополнительные точки перегиба кривой, а затем образуется точка минимума и максимума кривой. Эта трансформация кривых тем яснее выражена, чем больше γ . При малом $\gamma - 1$ первоначальный максимум ($Z \ll 1$) при $v = 1$ раздваивается с ростом Z , в прежней точке образуется минимум. При умеренных Z поведение волн в случае малых и больших v описывается формулами (2.2),



Фиг. 3а, б. Коэффициенты поглощения α_1 (сплошные линии) и α_{10} (пунктирные) при различных значениях отношений удельных теплоемкостей (указаны на кривых): а—число $Z = 6$, б—число $Z = 10$.

в остальном диапазоне — уравнением (1.3). Появляется зависимость величины $\alpha_\tau Z^{-1}$ от Z : кривая тем сильнее сдвигается в сторону больших v , чем больше Z , коэффициент $\alpha_\tau(v)$ монотонно возрастает и тем он больше, чем больше γ . Возрастание α_{10} и α_1 с ростом Z при любом γ имеет место лишь при малых Z . При умеренных и больших Z это правило сохраняется лишь в областях $z_1 \ll 1$ и $\xi \ll 1$.



Фиг. 4. Коэффициент поглощения волн давления α_τ на длине свободного пробега радиации при $\gamma = 5/3$ (сплошные линии) и $\gamma = 7/5$ (пунктирные). На кривых указаны числа Z

При $Z \gg 1$ и малых и больших v , когда $z_1 \ll 1$ или $\xi \ll 1$, волны описываются формулами § 2. В области умеренных z_1 и ξ действительны формулы и выводы § 4 и 5. Когда β велико, то справедливы результаты § 3. Эти предельные формулы описывают весь диапазон v . При достаточно больших Z , следовательно, достигается по два максимума и по одному минимуму коэффициентов α_{10} , α_1 .

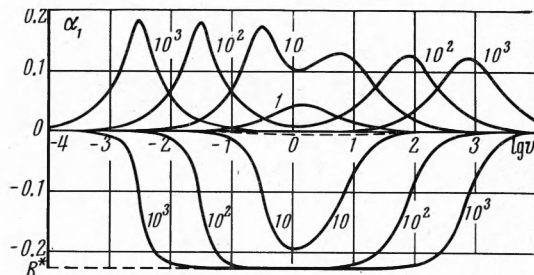
Величины максимумов зависят только от γ , положение первого из них зависит только от Z , а второго — от γ и Z . Существенны два времени «релаксации». Минимумы зависят от γ и Z , а их положение — только от γ .

Коэффициент αZ^{-1} монотонно растет с v от 0 до $1/2(\gamma - 1)/\gamma$ и почти одинаков для всех больших Z . Кривые α_{10} , α_1 , α_7 лежат тем ниже, чем меньше γ . При любом γ левый максимум α_{10} или α_1 больше правого. С увеличением γ все экстремумы увеличиваются, причем левые максимумы α_{10} и α_1 при равных Z находятся в одной и той же точке и остаются неподвижными, а минимумы и правые максимумы при этом сдвигаются влево, причем всегда правый максимум $\alpha_{10}(v)$ левее правого максимума $\alpha_1(v)$.

Общий ход изменения истинного коэффициента поглощения и скорости волн при больших Z показан на фиг. 5. Различаются четыре области:

1) В интервале $v \ll Z^{-1}$ внутри волны перенос тепла осуществляется механизмом радиационной теплопроводности, однако относительная величина теплового потока при этом мала, условия близки к адиабатическим: волны распространяются с адиабатической скоростью звука и слабо затухают.

2) В области $v = O(Z^{-1})$ с уменьшением оптической длины волны обмен энергией с окружающей средой механизмом радиационной теплопроводности увеличивается,



Фиг. 5. Коэффициент поглощения и мера дисперсии r , $\gamma = 5/3$, значения чисел Z указаны на кривых. По оси ординат (в отрицательном направлении) отложены величины $R = r - 1$. Значение

R при $r = 1/V\gamma$ обозначено R^*

4) При $v = O(Z)$ оптическая длина волны настолько мала, что излученная в волне радиация не успевает поглотиться, происходит высвечивание волн, скорость волн в этом диапазоне v растет от изотермической до адиабатической скорости звука, а коэффициенты поглощения еще раз достигают максимума в центре области.

5) При $v \ll Z$ волны становятся столь короткими, а частоты столь большими, что за время одного колебания в волне обмен энергией не успевает произойти, условия становятся адиабатическими.

Охарактеризовать основные случаи распространения волн можно также на основании оценки величины β . Если $\beta \ll 1$, то, как следует из (1.5), приток тепла будет мал и волны будут слабо затухающими, близкими к адиабатическим звуковым волнам и будут описываться формулами § 2. Если же $\beta \gg 1$, что может быть только при больших Z , то волны близки к изотермическим и описываются формулами § 3. Наконец, если $\beta = O(1)$, то скорость волн не может быть близкой ни к адиабатической, ни к изотермической скоростям звука, а заключена между ними. При этом следует различать три случая:

1) $v = O(1)$, $Z = O(1)$, необходимо исходить из полного характеристического уравнения; 2) $v \ll 1$, $z_1 = O(1)$, диссипация энергии происходит путем радиационной теплопроводности (по законам диффузии), справедливы формулы § 4; 3) при $v \gg 1$, $\zeta = O(1)$ справедливы формулы § 5; излучаемая в волне радиация не успевает заметно поглотиться внутри нее, получается стоковский случай высвечивания волн.

В терминах релаксационной теории существуют три времени релаксации в областях $\Phi = O(t_{ra})$, $\Phi = O(t_{re})$, $t_{ra}^2 = O(\Phi t_{re})$, причем при $Z \ll 1$ существенно лишь первое из них. Эти времена через v , Z , γ определены выше.

Поступила 25 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. П р о к о ф ь е в В. А. Теория распространения вынужденных гармонических волн давления малой амплитуды, основанная на газодинамических уравнениях Эйлера с учетом теплопередачи излучением. Вестн. Моск. ун-та, матем., мех., 1960, № 2, стр. 33—52; № 3, стр. 31—49.
2. S t o k e s G. An examination of the possible effect of radiation of heat on the propagation of sound. Philos. Mag., ser. 4, 1851, vol. 1, p. 305—317.
3. T r u e s d e l l C. Precise theory of the absorption and dispersion of forced plane infinitesimal waves according to the Navier — Stokes equations. J. Ration. Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, No 4, p. 643—741.