

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА  
ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ  
МНОГОРЯДНЫХ ПАКЕТОВ СТЕРЖНЕЙ

В. И. Феденко

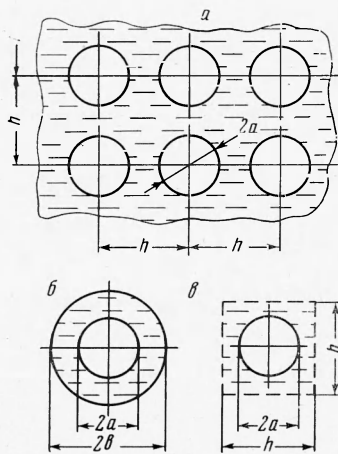
(Ленинград)

Излагается метод расчета присоединенных масс многорядных пакетов упругих цилиндрических стержней. Течение жидкости, вызванное поперечными колебаниями стержней, приближенно описывается с помощью модели ячеек.

**1. Модель ячеек.** Расчету присоединенных масс одnorядных пакетов цилиндрических стержней посвящена работа [1]. Что касается расчета присоединенных масс многорядных пакетов, то до настоящего времени этот вопрос остался малоизученным вследствие сложности учета стесненности течения жидкости в пакете.

Предлагаемый метод основан на замене многорядного пакета цилиндрических стержней (фиг. 1, а) совокупностью изолированных ячеек, одна из которых показана на фиг. 1, б. Ячейка состоит из двух коаксиальных цилиндров: внутренний цилиндр представляет собой стержень пакета, а наружный цилиндр имитирует стесненность течения, вызванную поперечными колебаниями внутреннего цилиндра.

Пусть каждый стержень пакета окружен жидкостью, заполняющей некоторую область (фиг. 1, в). Тогда из условия равенства расходов жидкости при протекании через ячейку и через указанную область можно найти зависимость между радиусом наружного цилиндра  $b$  и шагом разбивки стержней в пакете  $h$ , а также связь между отношением радиусов цилиндров, образующих ячейку, и плотностью пакета



Фиг. 1

$$b = \pi^{-1/2} h, \quad a/b = 1/2 \pi^{1/2} q \quad (q = 2a/h) \quad (1.1)$$

где  $a$  — наружный радиус стержня пакета,  $q$  — плотность пакета.

Таким образом, определение присоединенной массы стержня, находящегося в пакете, сводится к вычислению присоединенной массы этого стержня, расположенного внутри цилиндра с радиусом  $b$ .

Задача решается в предположении, что стержни пакета имеют конечную длину, произвольное закрепление по концам и совершают малые упругие колебания.

Жидкость, обтекающая стержни, считается идеальной и сжимаемой, а ее течение — безвихревым.

Течение жидкости в ячейке описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \frac{\partial x}{\partial t} \cos \theta, & \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=b} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=l} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал скоростей,  $l$  — длина стержня,  $x$  — перемещение стержня, равное

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) f_n(z), \quad q_n = C_1 \cos p_n^\circ t + C_2 \sin p_n^\circ t \quad (1.4)$$

В этих выражениях  $f_n$  — форма  $n$ -го тона колебаний стержня в жидкости, принимаемая равной форме колебаний в пустоте;  $q_n$  — главная координата;  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями задачи;  $p_n^\circ$  — частота  $n$ -го тона свободных колебаний стержня в жидкости.

Потенциал скоростей определяется в следующем виде

$$\varphi = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \sum_{s=1}^{\infty} F_s(r) N_s(z) \quad (1.5)$$

Функция  $F_s(r)$  должна удовлетворять первым двум граничным условиям (1.3), а функция  $N_s(z)$  — остальным граничным условиям. Последние два условия удовлетворяются, если принять

$$N_s(z) = \cos(\pi s z / l) \quad (1.6)$$

Подставляя выражение (1.5) в исходное уравнение (1.2) с учетом (1.6) имеем

$$\frac{d^2 F_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_s}{dr} - \left[ \left( \frac{\pi s}{l} \right)^2 + \frac{1}{r} \left( \frac{p_n^\circ}{c} \right)^2 \right] F_s = 0 \quad (1.7)$$

Решением этого уравнения будет

$$F_s = A I_1 \left[ \left( \frac{\pi s}{l} + \frac{p_n^\circ}{c} \right) r \right] + B K_1 \left[ \left( \frac{\pi s}{l} + \frac{p_n^\circ}{c} \right) r \right] \quad (1.8)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные,  $I_1$ ,  $K_1$  — модифицированные функции Бесселя.

После вычисления произвольных постоянных (используя первые два условия (1.3)) формула потенциала скоростей принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{2}{\pi} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left[ K_1(\alpha r) - \frac{K_1(\alpha b)}{I_1(\alpha b)} I_1(\alpha r) \right] \times \\ \times \left[ K_1(\alpha a) - \frac{K_1(\alpha b)}{I_1(\alpha b)} I_1(\alpha a) \right]^{-1} \frac{1}{s} \cos \frac{\pi s z}{l} \int_0^l f_n(z) \cos \frac{\pi s z}{l} dz \quad \left( \alpha = \frac{\pi s}{l} + \frac{p_n^\circ}{c} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Кинетическая энергия жидкости, заполняющей двухсвязную область, равна

$$T = -\frac{\rho^{\circ}}{2} \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_1 \quad (1.10)$$

Здесь  $S_1$  — поверхность стержня,  $\rho^{\circ}$  — плотность жидкости.

Аналогичный интеграл по поверхности наружного цилиндра ячейки в этой же формуле исчезает в силу второго условия (1.3).

После подстановки в эту формулу значения потенциала скоростей и интегрирования, которое производится по поверхности стержня, определяется кинетическая энергия жидкости

$$T = a\rho^{\circ} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\xi_{sn}}{s} \left[ \int_0^l f_n(z) \cos \frac{\pi s z}{l} dz \right]^2 \quad (1.11)$$

В этом выражении

$$\xi_{sn} = \frac{K_1(\beta_1) + I_1(\beta_1) \zeta(\beta_2)}{K_0(\beta_1) + \beta_1^{-1} K_1(\beta_1) - [I_0(\beta_1) - \beta_1^{-1} I_1(\beta_1)] \zeta(\beta_2)}$$

$$\beta_1 = \left( \frac{\pi s}{l} + \frac{p_n^{\circ}}{c} \right) a, \quad \beta_2 = \frac{\beta_1 b}{a}, \quad \zeta(\beta_2) = \frac{\beta_2 K_0(\beta_2) + K_1(\beta_2)}{\beta_2 I_0(\beta_2) - I_1(\beta_2)} \quad (1.12)$$

Для кинетической энергии жидкости имеем [2]

$$T = 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} M_n^{\circ} q_n^2 \quad (1.13)$$

Здесь  $M_n^{\circ}$  — приведенная присоединенная масса стержня, находящегося в ячейке, соответствующая  $n$ -му тону колебаний;  $q_n$  — скорость точки приведения стержня при его колебаниях по  $n$ -й форме.

Приравняв правые части выражений (1.11) и (1.13), имеем

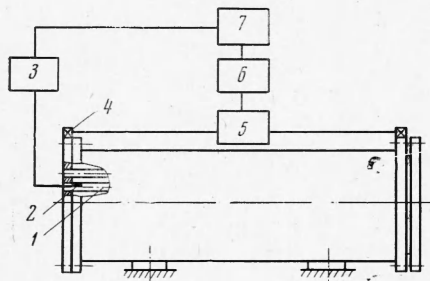
$$M_n^{\circ} = 2 \frac{m_0}{\pi a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\xi_{sn}}{s} \left[ \int_0^l f_n(z) \cos \frac{\pi s z}{l} dz \right]^2 \quad (1.14)$$

**2. Экспериментальное обоснование модели ячеек.** При замене пакета совокупностью изолированных ячеек в расчет присоединенных масс вносится определенная погрешность. Во-первых, при такой замене не учитывается расположение стержней в пакете (коридорное, шахматное и др.). Во-вторых, реальные пакеты состоят из конечного числа стержней, и поэтому обтекание центральных и периферийных стержней, вообще говоря, различно.

Влияние указанных факторов на присоединенные массы пакетов было проанализировано при помощи опытных данных, полученных на экспериментальной установке, схема которой приведена на фиг. 2.

В качестве модели пакета использовался пучок трубок 1, межтрубное пространство которого заполнялось водой.

Колебания трубок возбуждались кратковременным импульсом, создаваемым при сбросе плиты ударного копра, на которой установлена модель, на амортизаторы.



Фиг. 2

Запись процесса колебаний осуществлялась тензометрическим трактом состоящим из тензодатчиков 2 и тензостанции 3.

Граница зоны свободных колебаний трубок устанавливалась по записям ускорений их опорных сечений, которые производились измерительным трактом, состоящим из датчиков ускорений 4, катодного повторителя 5 и усилителя 6. Процессы регистрировались с помощью шлейфного осциллографа 7.

Коэффициенты присоединенных масс вычислялись по формуле

$$\gamma = \frac{M^\circ}{M_0} = \frac{M}{M_0} \left[ \left( \frac{p}{p^\circ} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.1)$$

Здесь  $M^\circ$  — присоединенная масса трубки;  $M$  — масса трубки;  $M_0$  — масса воды, вытесненная трубкой;  $p$ ,  $p^\circ$  — частоты свободных колебаний трубок в воздухе и воде, определяемые по осциллограммам напряжений.

Опыты проводились при густотах пакетов, равных 0,61, 0,70, 0,78, 0,87.

Для оценки влияния вида разбивки стержней в пакетах на величины присоединенных масс были испытаны пучки с шахматным и коридорным расположением трубок. Опыты показали, что вид разбивки не оказывает существенного влияния на присоединенные массы при одних и тех же густотах пакетов (фиг. 3, кривая 1 — коридорное расположение трубок, кривая 2 — шахматное расположение трубок).

Путем определения коэффициентов  $\gamma$  для трубок, расположенных в разных местах пакета, был выяснен вопрос о различии в величинах присоединенных масс центральных и периферийных трубок. Результаты опытов показали, что это различие для одного и того же пакета не превышало 10 ÷ 15%.

Это говорит о том, что для многорядного пакета, содержащего  $k$  стержней, присоединенную массу можно определить как присоединенную массу одного стержня, увеличенную в  $k$  раз.

**3. Анализ полученных результатов.** Из (1.14) вытекает, что присоединенная масса стержня, находящегося в ячейке, зависит от безразмерной величины  $p_n^\circ a / c$ , которая характеризует сжимаемость жидкости. Анализ показывает, что снижение присоединенной массы за счет сжимаемости жидкости становится заметным лишь при весьма высокочастотных колебаниях ( $p_n^\circ a / c > 2$ ). Поэтому при практических расчетах жидкость можно считать несжимаемой, т. е. в соотношении (1.12) принять  $c = \infty$ .

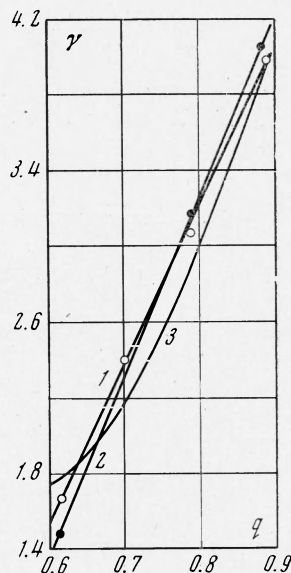
С учетом изложенного выше выражение для определения присоединенной массы пакета стержней имеет вид

$$M_n^\circ = 2k \frac{m_0}{\pi a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\xi_{sn}}{s} \left[ \int_0^l f_n(z) \cos \frac{\pi s z}{l} dz \right]^2 \quad (3.1)$$

где коэффициент  $\xi_{sn}$  вычисляется по формуле (1.12) при значениях

$$\beta_1 = \pi s a / l, \quad \beta_2 = 2\pi^{-1/2} \beta_1 / q \quad (3.2)$$

Входящий в формулу (3.1) ряд сходится быстро. Во многих случаях первые два-три члена ряда дают точность, достаточную для практики.



Фиг. 3

Из формул (3.2) видно, что присоединенная масса пакета зависит от относительной длины стержней  $l/a$  и густоты  $q$ .

Для относительно коротких стержней ( $l/a < 5$ ) осевая составляющая движения частиц жидкости имеет существенное значение. Однако при возрастании относительной длины роль этой составляющей уменьшается, и при  $l/a \geq 30$  можно учитывать только радиальную составляющую движения частиц жидкости, т. е. рассматривать течение как плоское.

Что касается густоты пакета, то при ее возрастании присоединенная масса увеличивается, что видно из графика зависимости  $\gamma(q)$ , приведенного на фиг. 3 (кривая 3) и построенного для случая  $l/a = 30$ .

Из сопоставления этого графика с кривыми 1 и 2, построенными по опытными данным, видно, что расчетные данные достаточно хорошо согласуются с результатами опытов. Это говорит о возможности использования рассмотренной модели для приближенного расчета присоединенных масс многорядных пакетов стержней.

Поступила 23 XII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ashley H., Asher G. W. The virtual mass of clustered boosters. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 6.
2. Шиманский Ю. А. Динамический расчет судовых конструкций. Л., Судпромгиз, 1963.