

УДК 539.312, 539.377

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЛОСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

А. Д. Чернышов

Воронежская государственная технологическая академия, 394000 Воронеж  
E-mail: kafvm@vgta.vrn.ru

Предложен новый численно-аналитический метод, показанный на примере динамических задач для термовязкоупругого тела. Задача термовязкоупругости в общей постановке разбивается на три более простые. В первой задаче подбором находятся граничные функции, которые должны удовлетворять только граничным условиям. Вторая задача с однородными граничными и неоднородными начальными условиями введением специальных  $\xi$ -переменных и отделением времени приводится к задаче о нахождении собственных функций и собственных значений. Для ее решения организуются интегральные суперпозиции по угловому параметру. В итоге получена линейная алгебраическая система как результат выполнения граничных условий в точках деления криволинейной границы тела на мелкие части. После нахождения собственных функций и собственных значений третья задача с однородными граничными и начальными условиями решается при помощи спектральных разложений искомых функций и неоднородных слагаемых в связанной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

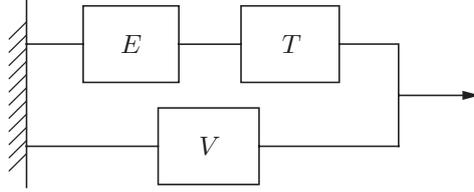
**Ключевые слова:** термовязкоупругая среда, динамическая краевая задача, собственные функции, собственные значения.

**Введение.** В работах [1–3] и ряде других представлены модели термоупругого тела. Модель термовязкоупругого тела для геометрически многомерных случаев весьма сложна, так как кроме упругих и температурных свойств учитываются еще и вязкие. Поэтому аналитических исследований для подобных материалов известно небольшое количество.

В данной работе ограничимся линейным вариантом модели, для чего в уравнении теплопроводности приходится пренебрегать квадратичными членами тензора скорости деформаций, характеризующими вязкую диссипацию энергии. Подобное упрощение допустимо для таких времен от начала процесса нагрузки тела, когда тепловое накопление указанной диссипации мало.

Большинство известных методов решения термоупругих задач основаны на использовании потенциалов [4], интегральных преобразованиях [5, 6]. Используются также методы Ритца [7], Бубнова — Галеркина [1], вариационные принципы [8], конечно-разностные методы [8, 9]. Эффективность этих методов ограничена в случаях, когда тело имеет сложную криволинейную форму. Об этом свидетельствует малое количество работ с решениями начально-краевых задач даже для простых термоупругих тел. В данной работе предлагается численно-аналитический метод решения подобных задач.

**1. Постановка задачи.** Под термовязкоупругим телом будем понимать термоупругое тело с вязкими свойствами. Подобными свойствами обладают металлы и их сплавы при небольших механических и тепловых нагрузках. Реологическая модель такого тела представлена на рисунке. Тогда полное напряжение  $\sigma_{ij}$  будет состоять из суммы упру-



гой  $\sigma_{ij}^{(e)}$  и вязкой  $\sigma_{ij}^{(v)}$  составляющих

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} + \sigma_{ij}^{(v)}, \quad \sigma_{ij}^{(v)} = \zeta \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\chi \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

В (1)  $\zeta$  и  $\chi$  — коэффициенты вязкости. На основе законов термодинамики необратимых процессов таким же образом, как и в [4], можно получить линейные уравнения движения в перемещениях в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{xx} + (\lambda + \mu)v_{xy} + \mu u_{yy} + (\zeta + 2\chi)u_{txx} + (\zeta + \chi)v_{txy} + \chi u_{tyy} - \gamma T_x + \tilde{G}_1 &= \rho u_{tt}, \\ (\lambda + 2\mu)v_{yy} + (\lambda + \mu)u_{xy} + \mu v_{xx} + (\zeta + 2\chi)v_{tyy} + (\zeta + \chi)u_{txy} + \chi v_{txx} - \gamma T_y + \tilde{G}_2 &= \rho v_{tt}, \quad (2) \\ \gamma &= (3\lambda + 2\mu)\alpha_t, \end{aligned}$$

где  $\lambda, \mu$  — коэффициенты упругости;  $\rho$  — плотность;  $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$  — массовые силы;  $\alpha_t$  — коэффициент температурного расширения. Дифференциальные уравнения системы (2) качественно отличаются от соответствующих уравнений для термоупругого тела, так как каждое из них теперь имеет третий порядок при коэффициентах вязкости. Это создает дополнительные трудности для их решения. В уравнении теплопроводности вследствие вязкой диссипации появляется квадратичное слагаемое с тензором скорости деформаций  $\varepsilon_{ij}$ . При малых  $\varepsilon_{ij}$  его можно отбросить, и тогда это уравнение примет такой же вид, как и для термоупругого тела:

$$a\Delta T - \eta(u_{xt} + v_{yt}) + \tilde{q} = T_t, \quad \eta = \gamma T_0 / (C\rho). \quad (3)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $T_0$  — начальная абсолютная температура тела;  $C$  — удельная теплоемкость;  $\tilde{q}$  — внутренний источник тепла. Следует отметить, что хотя отброшенная вязкая диссипация и мала, но со временем она может накапливаться и оказывать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние. Поэтому замкнутая линейная система (2), (3) относительно  $u, v$  и  $T$  справедлива только для некоторого конечного промежутка времени  $t_0$ .

Пусть форма тела — ограниченная область  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Граничные и начальные условия запишем в виде

$$u|_{\Gamma} = F_1(t, x_{\Gamma}, y_{\Gamma}), \quad v|_{\Gamma} = F_2(t, x_{\Gamma}, y_{\Gamma}), \quad T|_{\Gamma} = F_0(t, x_{\Gamma}, y_{\Gamma}); \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \tilde{\psi}_1(x, y), \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = \tilde{\varphi}_2(x, y), \quad v_t|_{t=0} = \tilde{\psi}_2(x, y), \quad T|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(x, y).$$

Для решения задачи (2)–(5) неизвестные  $u, v$  и  $T$  представим суммой трех функций, зависящих от  $x, y$  и  $t$ :

$$u = M_1 + u^{(1)} + v^{(1)}, \quad v = M_2 + u^{(2)} + v^{(2)}, \quad T = M_0 + u^{(0)} + v^{(0)}. \quad (6)$$

Функции  $M_b$  ( $b = 0, 1, 2$ ) назовем граничными и найдем их подбором так, чтобы выполнялись граничные условия (4). При этом  $M_b$  могут и не удовлетворять уравнениям (2) и (3), но должны быть трижды дифференцируемыми по всем своим переменным, т. е.

$$M_b|_{\Gamma} = F_b(t, x_{\Gamma}, y_{\Gamma}), \quad M_b \in C^3(\Omega, 0 \leq t \leq t_0), \quad b = 0, 1, 2. \quad (7)$$

Пусть  $u^{(0)}$ ,  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$  удовлетворяют несвязной однородной системе

$$a\Delta u^{(0)} = u_t^{(0)}, \quad (\lambda + 2\mu)u_{xx}^{(1)} + \mu u_{yy}^{(1)} = \rho u_{tt}^{(1)}, \quad (\lambda + 2\mu)u_{yy}^{(2)} + \mu u_{xx}^{(2)} = \rho u_{tt}^{(2)} \quad (8)$$

с однородными граничными

$$u^{(b)}|_{\Gamma} = 0, \quad b = 0, 1, 2 \quad (9)$$

и неоднородными начальными условиями

$$u^{(b)}|_{t=0} = \tilde{\varphi}_b - M_b|_{t=0} = \varphi_b, \quad b = 0, 1, 2, \quad u_t^{(c)}|_{t=0} = \tilde{\psi}_c - M_{ct}|_{t=0} = \psi_c, \quad c = 1, 2. \quad (10)$$

Из решения задачи (8)–(10) будем находить собственные функции и собственные значения (СФЗ), с помощью которых затем найдем  $v^{(b)}$ , т. е. решение всей задачи. Если  $u$ ,  $v$  и  $T$  из (6) подставить в (2) и (3), то с учетом (8) для  $v^{(b)}$  ( $b = 0, 1, 2$ ) придем к следующей неоднородной связанной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a\Delta v^{(0)} - \eta(v_{tx}^{(1)} + v_{ty}^{(2)}) + q &= v_t^{(0)}, \\ q &= \tilde{q} + a\Delta M_0 - \eta(M_{1tx} + M_{2ty} + u_{tx}^{(1)} + u_{ty}^{(2)}) - M_{0t}, \\ (\lambda + 2\mu)v_{xx}^{(1)} + (\lambda + \mu)v_{xy}^{(2)} + \mu v_{yy}^{(1)} - \gamma v_x^{(0)} + (\zeta + 2\chi)v_{txx}^{(1)} + (\zeta + \chi)v_{txy}^{(2)} + \chi v_{tyy}^{(1)} + G_1 &= \rho v_{tt}^{(1)}, \\ (\lambda + 2\mu)v_{yy}^{(2)} + (\lambda + \mu)v_{xy}^{(1)} + \mu v_{xx}^{(2)} - \gamma v_y^{(0)} + (\zeta + 2\chi)v_{tyy}^{(2)} + (\zeta + \chi)v_{txy}^{(1)} + \chi v_{txx}^{(2)} + G_2 &= \rho v_{tt}^{(2)}, \\ G_1 &= \tilde{G}_1 + (\lambda + 2\mu)M_{1xx} + (\lambda + \mu)(M_{2xy} + u_{xy}^{(2)}) + \mu M_{1yy} + (\zeta + 2\chi)(M_{1txx} + u_{txx}^{(1)}) + \\ &\quad + (\zeta + \chi)(M_{2txy} + u_{txy}^{(2)}) + \chi(M_{1tyy} + u_{tyy}^{(1)}) - \gamma(M_{0x} + u_x^{(0)}) - \rho M_{1tt}, \\ G_2 &= \tilde{G}_2 + (\lambda + 2\mu)M_{2yy} + (\lambda + \mu)(M_{1xy} + u_{xy}^{(1)}) + \mu M_{2xx} + (\zeta + 2\chi)(M_{2tyy} + u_{tyy}^{(2)}) + \\ &\quad + (\zeta + \chi)(M_{1txy} + u_{txy}^{(1)}) + \chi(M_{2txx} + u_{txx}^{(2)}) - \gamma(M_{0y} + u_y^{(0)}) - \rho M_{2tt}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для системы (11) относительно неизвестных  $v^{(b)}$  ( $b = 0, 1, 2$ ) из (4) с учетом (6), (7) и (9) получим однородные граничные условия

$$v^{(b)}|_{\Gamma} = 0, \quad b = 0, 1, 2, \quad (12)$$

а из (5) и (10) — однородные начальные условия

$$v^{(b)}|_{t=0} = 0, \quad b = 0, 1, 2; \quad v_t^{(c)}|_{t=0} = 0, \quad c = 1, 2. \quad (13)$$

**2. Нахождение граничных функций  $M_b$ .** Функции  $M_b$  необходимы в явном виде для реализации предлагаемого ниже метода. Проблема продолжения функций  $F_b$  с  $\Gamma$  во внутренние точки  $\Omega$  достаточно полно изучена в работах С. М. Никольского [10]. Приведем примеры продолжений.

Наиболее простой и важный для приложений случай, когда граничные условия не зависят от точек границы  $\Gamma$ , а зависят только от  $t$ . Тогда  $M_b = F_b(t)$ . Пусть функции  $F_b$  зависят от точек границы  $\Gamma$ . Если к граничным условиям (7) добавить, например, уравнение Лапласа  $\Delta M_b = 0$ , то для  $M_b$  получим выражение в интегральной форме через функцию Грина [11]

$$M_b = \int_{\Gamma} F_b \frac{\partial G}{\partial n} dl, \quad M_b|_{\Gamma} = F_b. \quad (14)$$

Функции  $M_b$  могут быть получены также при помощи  $R$ -функций с использованием булевой алгебры [12].

**3. Организация интегральных суперпозиций и построение собственных функций.** Вначале рассмотрим вспомогательную задачу (8)–(10) для данной области  $\Omega$  и  $0 \leq t \leq t_0$ . Будем искать частные решения системы (8) без учета начальных условий. Для этого в функциях  $u^{(b)}$  ( $b = 0, 1, 2$ ) отделим временную переменную следующим образом:

$$u^{(c)} = (A_c \cos \nu_c t + B_c \sin \nu_c t) U_c(x, y), \quad c = 1, 2; \quad u^{(0)} = A_0 e^{-\nu_0^2 at} U_0(x, y). \quad (15)$$

Здесь  $A_0, A_c, B_c$  ( $c = 1, 2$ ) — неизвестные постоянные;  $\nu_b$  ( $b = 0, 1, 2$ ) — собственные значения (СЗ);  $U_b$  — собственные функции (СФ). Для их нахождения подставим  $u^{(b)}$  из (15) в (8) и (9). После сокращения на функции времени относительно  $U_b$  будем иметь систему несвязных и независимых друг от друга однородных уравнений с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} \Delta U_0 + \nu_0^2 U_0 &= 0, & U_b|_{\Gamma} &= 0, & b &= 0, 1, 2, \\ (\lambda + 2\mu)U_{1xx} + \mu U_{1yy} + \rho \nu_1^2 U_1 &= 0, & & & & (16) \\ (\lambda + 2\mu)U_{2yy} + \mu U_{2xx} + \rho \nu_2^2 U_2 &= 0. \end{aligned}$$

Нахождение таких  $\nu_b$  ( $b = 0, 1, 2$ ), при которых существуют нетривиальные решения  $U_b$  системы (16) для заданной области  $\Omega$ , называется задачей о СФЗ. Обычно подобные краевые задачи решают методом Ритца, Бубнова — Галеркина, интегральными преобразованиями, конечно-разностными методами. Ниже предлагается следующий численно-аналитический метод.

В области  $\Omega$  выберем за полюс какую-нибудь точку  $O$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$  так, чтобы любой луч  $E$ , проведенный через  $O$  под любым углом  $\theta$  к оси  $x$ , пересекал границу  $\Gamma$  только в двух точках  $D^+$  и  $D^-$ . Для каждого из трех уравнений системы (16) введем три новые геометрические переменные  $\xi^{(b)}$  ( $b = 0, 1, 2$ ) равенствами

$$\begin{aligned} \xi^{(b)} &= a_b(x - x_0) \cos \theta + c_b(y - y_0) \sin \theta, & (x, y) \in \Omega, & \quad b = 0, 1, 2, \\ a_0 = c_0 &= 1, & a_1 = c_2 &= \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}, & a_2 = c_1 &= \sqrt{\rho/\mu}. \end{aligned} \quad (17)$$

В (17)  $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$  — единичный вектор вдоль луча  $E$ .

Будем искать частные решения системы (16) без учета граничных условий, когда  $U_b$  зависят только от одной переменной  $\xi^{(b)}$ . Полагая  $U_b = P(\xi^{(b)})$ , все три уравнения из (16) запишем в одинаковом виде:

$$P''(\xi^{(b)}) + \nu_b^2 P(\xi^{(b)}) = 0, \quad b = 0, 1, 2. \quad (18)$$

Общее решение уравнений (18) имеет вид

$$P(\xi^{(b)}) = K_b \cos(\nu_b \xi^{(b)}) + L_b \sin(\nu_b \xi^{(b)}), \quad b = 0, 1, 2, \quad (19)$$

где  $K_b$  и  $L_b$  ( $b = 0, 1, 2$ ) — произвольные постоянные, которые считаем функциями углового параметра  $\theta$ . При изменении  $\theta$  в пределах  $[0, \pi)$  множество точек пересечения  $D^+$  образуют границу  $\Gamma^+$ , а множество точек  $D^-$  — границу  $\Gamma^-$ . То есть вся граница  $\Gamma$  состоит из двух частей  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ . При различных  $\theta$  в точке  $O$  будем иметь пучок лучей  $E$ . При  $\theta = \pi$  положение прямой  $E$  совпадет с ее положением при  $\theta = 0$ . Если продолжить поворот прямой  $E$  в пределах  $\theta \in [\pi, 2\pi)$ , то точками  $D^+$  и  $D^-$  граница  $\Gamma$  будет пройдена второй раз, что является излишним. Этими соображениями и обоснованы пределы изменения  $\theta$  в нижеследующих определенных интегралах и конечных суммах. Функции  $P(\xi^{(b)})$  ( $b = 0, 1, 2$ ) из (19) тождественно удовлетворяют системе (16) при любом  $\theta$ , поэтому при помощи

интегральной суперпозиции по  $\theta$  из решений (19) можно построить следующее решение системы (16):

$$U_b = \int_0^\pi [K_b(\theta) \cos(\nu_b \xi^{(b)}) + L_b(\theta) \sin(\nu_b \xi^{(b)})] d\theta + \sum_{i=1}^n [K_{bi}^* \cos(\nu_b \xi_i^{(b)}) + L_{bi}^* \sin(\nu_b \xi_i^{(b)})], \quad (20)$$

$$\xi_i^{(b)} = a_b(x - x_0) \cos \theta_i + c_b(y - y_0) \sin \theta_i, \quad 0 \leq \theta_i < \pi, \quad b = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $K_b(\theta)$ ,  $L_b(\theta)$  — неизвестные суммируемые в смысле Лебега функции от  $\theta$ ;  $K_{bi}^*$ ,  $L_{bi}^*$  и  $\theta_i$  — неизвестные коэффициенты и углы в конечных суммах;  $n$  — неизвестное количество слагаемых. Присутствие конечной суммы из  $n$  слагаемых в СФ (20) придает большую общность будущему выражению решения, так как в некоторых задачах [13] решение может состоять только из таких слагаемых, в других же случаях (например, для круга) — только из определенных интегралов по параметру  $\theta$ . Для нахождения всех вышеперечисленных неизвестных подставим  $U_b$  из (20) в граничные условия из (16)

$$U_b|_\Gamma = \int_0^\pi [K_b(\theta) \cos(\nu_b \xi_\Gamma^{(b)}) + L_b(\theta) \sin(\nu_b \xi_\Gamma^{(b)})] d\theta + \sum_{i=1}^n [K_{bi}^* \cos(\nu_b \xi_{i\Gamma}^{(b)}) + L_{bi}^* \sin(\nu_b \xi_{i\Gamma}^{(b)})] = 0, \quad (21)$$

$$\xi_\Gamma^{(b)} = a_b(x_\Gamma - x_0) \cos \theta + c_b(y_\Gamma - y_0) \sin \theta, \quad (x_\Gamma, y_\Gamma) \in \Gamma,$$

$$\xi_{i\Gamma}^{(b)} = a_b(x_\Gamma - x_0) \cos \theta_i + c_b(y_\Gamma - y_0) \sin \theta_i, \quad 0 \leq \theta_i < \pi, \quad b = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, мы получили следующую задачу о СФЗ: из трех независимых между собой однородных интегральных уравнений (21) найти такие три спектра СЗ  $\{\nu_{bi}\}$ , при которых существуют нетривиальные решения  $U_{bi}$ . Для ее решения интервал  $[0, \pi)$  разобьем на мелкие секторы  $\Delta\theta_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) и представим интегралы в (20) и (21) конечными суммами. Этот прием позволяет найти средние значения функций  $K_b(\theta_k^*)$  и  $L_b(\theta_k^*)$  [14], что достаточно для данного метода. Здесь  $\theta_k^*$  — некоторые средние значения углов  $\theta$  в интервалах  $\Delta\theta_k$ . Предполагаем разбиение настолько мелким ( $m \gg n$ ), что в каждый сектор  $\Delta\theta_k$  будут попадать не более чем по одному углу  $\theta_i$  из конечных сумм в (20). При этом заранее неизвестно, в какие секторы  $\Delta\theta_j$  попадут дискретные углы  $\theta_i$  из конечных сумм. Для преодоления этой неопределенности предположим, что углы  $\theta_i$  попадут в каждый малый сектор  $\Delta\theta_j$ . Если, допустим, в какой-то сектор не попадут углы  $\theta_i$  из конечных сумм, то соответствующие  $K_{bi}^*$ ,  $L_{bi}^*$  будут равны нулю. Итак, функции  $U_b$  из (20) приближенно представим суммами

$$U_b = \sum_{j=1}^m [K_{bj} \cos(\nu_b \xi_j^{(b)}) + L_{bj} \sin(\nu_b \xi_j^{(b)})], \quad 0 \leq \theta_j < \pi,$$

$$K_{bj} \cos \nu_b \xi_j^{(b)} = K_b(\theta_j^*) \cos \nu_b \xi_j^{(b)}(\theta_j^*) \Delta\theta_j + K_{bj}^* \cos \nu_b \xi_j^{(b)},$$

$$L_{bj} \sin \nu_b \xi_j^{(b)} = L_b(\theta_j^*) \sin \nu_b \xi_j^{(b)}(\theta_j^*) \Delta\theta_j + L_{bj}^* \sin \nu_b \xi_j^{(b)}, \quad (22)$$

$$\xi_j^{(b)} = a_b(x - x_0) \cos \theta_j + c_b(y - y_0) \sin \theta_j,$$

где  $\theta_j^*$  — некоторые средние значения углов  $\theta$  в секторах  $\Delta\theta_j$ . В (22) интегральные суммы и конечные суммы из  $n$  слагаемых объединены. Поэтому выражения для  $K_{bj} \cos \nu_b \xi_j^{(b)}$  и  $L_{bj} \sin \nu_b \xi_j^{(b)}$  в (22) состоят из двух частей. Первые части типа  $K_b(\theta_j^*) \cos \nu_b \xi_j^{(b)}(\theta_j^*) \Delta\theta_j$  (от

интегральных сумм) зависят от способа разбиения, а вторые части типа  $K_{bj}^* \cos \nu_b \xi_j^{(b)}$  (от конечных сумм) не зависят от этого способа. Данное свойство и используем для нахождения величин  $K_{bj}^*$ ,  $L_{bj}^*$  и их количества  $n$  в конечных суммах выражений (20) и (21). Если при уменьшении  $\Delta\theta_j$  порядок некоторых  $K_{bj}$ ,  $L_{bj}$  не изменится, то соответствующие  $K_{bj}^*$ ,  $L_{bj}^*$  существуют, а их количество равно искомому  $n$ . При построении решения не обязательно искать точки пересечения  $D^+$  и  $D^-$  прямых  $E$  с границей. Проще разбить  $\Gamma$  на мелкие участки независимо от углов  $\theta_j$  и прямых  $E$  так, чтобы количество точек разбиения на  $\Gamma$  было  $2m$ , т. е. в два раза больше, чем углов  $\theta_j$ , и в дальнейшем выполнять граничные условия в этих точках. Поэтому, полагая в (21)  $\mathbf{r}_\Gamma = \mathbf{r}_k$  ( $k = 1, \dots, 2m$ ), запишем данные граничные условия в виде

$$U_b|_\Gamma = \sum_{j=1}^m [K_{bj} \cos(\nu_b \xi_{kj}^{(b)}) + L_{bj} \sin(\nu_b \xi_{kj}^{(b)})] = 0, \quad b = 0, 1, 2,$$

$$\xi_{kj}^{(b)} = a_b(x_k - x_0) \cos \theta_j + c_b(y_k - y_0) \sin \theta_j, \quad 0 \leq \theta_j < \pi, \quad k = 1, \dots, 2m. \quad (23)$$

В (23) имеем три независимые между собой алгебраические линейные однородные системы, в каждой из них по  $2m$  уравнений относительно  $2m$  неизвестных  $K_{bj}$  и  $L_{bj}$ . Условием существования нетривиального решения этих систем является равенство нулю их определителей

$$\Delta_{2m}^{(b)} = |\cos(\nu_b \xi_{kj}^{(b)}), \sin(\nu_b \xi_{kj}^{(b)})| = 0, \quad b = 0, 1, 2. \quad (24)$$

Это и есть искомые характеристические уравнения для нахождения независимых между собой спектров  $\{\nu_{bi}, U_{bi}\}$ . В [15] доказано, что все корни подобных спектров  $\nu_{bi}$  действительные и различны. Если в системе (23) положить  $\nu_b = \nu_{bi}$ , то определители  $\Delta_{2m}^{(b)}$  обратятся в нуль. Понимать это будем так, что в каждой из трех систем (23) по одному уравнению становятся зависимыми от всех остальных уравнений соответствующей системы и их поэтому можно отбросить. Все уравнения рассматриваемых систем равноправны, поэтому отбросим, например, по одному последнему уравнению и получим три укороченные линейные системы с определителями  $\Delta_{2m-1}^{(b)}$ . При  $\nu_b = \nu_{bi}$  в системах (23) коэффициентам  $K_{bj}$  и  $L_{bj}$  следует добавить индекс  $i$ , т. е. теперь эти коэффициенты будут обозначены  $K_{bij}$  и  $L_{bij}$ . Данные коэффициенты из укороченных систем (23) находятся с точностью до произвольного множителя, который будет определяться в дальнейшем при выполнении начальных условий. Поэтому вполне можно распорядиться одним из этих коэффициентов и считать его равным единице, например  $L_{bim} = 1$ . После отбрасывания по одному уравнению в каждой из трех систем (23) будем иметь укороченные системы, состоящие из  $(2m - 1)$  уравнений каждая относительно такого же количества неизвестных  $K_{bij}$  и  $L_{bij}$ :

$$\sum_{j=1}^m K_{bij} \cos[\nu_{bi}^*(\theta_j) \xi_{kj}] + \sum_{j=1}^{m-1} L_{bij} \sin[\nu_{bi}^*(\theta_j) \xi_{kj}] = -\sin[\nu_{bi}^*(\theta_m) \xi_{km}],$$

$$b = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, \infty, \quad k = 1, \dots, (2m - 1). \quad (25)$$

Из трех систем (25) найдем коэффициенты  $K_{bij}$  и  $L_{bij}$ , подставим их в выражения (22) и определим искомые СФЗ  $\{U_{bi}\}$ :

$$U_{bi} = \sum_{j=1}^m K_{bij} \cos(\nu_{bi}\xi_j) + \sum_{j=1}^m L_{bij} \sin(\nu_{bi}\xi_j),$$

$$b = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, \infty, \quad j = 1, \dots, m. \quad (26)$$

Нахождение спектров  $\{\nu_{bi}, U_{bi}\}$  в явном виде (26) является важным моментом, так как с их использованием удобно строить решение задачи (2)–(5) в общем случае. Для этого решение задачи (8)–(10) при помощи (15) представим суммой

$$u^{(c)} = \sum_{i=1}^{\infty} (A_{ci} \cos(\nu_{ci}t) + B_{ci} \sin(\nu_{ci}t)) U_{ci}, \quad c = 1, 2,$$

$$u^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{0i} U_{0i} e^{-a\nu_{0i}^2 t}. \quad (27)$$

По построению функции  $u^{(c)}$  и  $u^{(0)}$  из (27) удовлетворяют системе (8) и граничным условиям (9) в точках  $r_k$  при любых  $A_{bi}$  и  $B_{ci}$ . Эти коэффициенты найдем из начальных условий (10), которые принимают следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{bi} U_{bi} = \varphi_b, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{ci} B_{ci} U_{ci} = \psi_c, \quad b = 0, 1, 2, \quad c = 1, 2. \quad (28)$$

Равенства (28) следует рассматривать как разложения Фурье функций  $\varphi_b$  и  $\psi_c$  в ряды по функциональным базисам  $\{U_{bi}\}$ , а  $A_{bi}$  и  $B_{ci}$  — коэффициенты разложений. Если  $\varphi_b \in L_p^\alpha$  и  $\psi_c \in L_p^\alpha$  ( $L_p^\alpha$  — классы функций Соболева — Лиувилля [15]), то ряды (28) в  $\Omega$  равномерно сходятся [15] и их коэффициенты разложения находятся по формулам

$$A_{bi} = \frac{1}{N_{bi}} \iint_{\Omega} \varphi_b U_{bi} ds, \quad B_{ci} = \frac{1}{\nu_{ci} N_{ci}} \iint_{\Omega} \psi_c U_{ci} ds,$$

$$N_{bi} = \iint_{\Omega} U_{bi}^2 ds, \quad b = 0, 1, 2, \quad c = 1, 2. \quad (29)$$

Итак, решение задачи (8)–(10) строится следующим образом: функции  $u^{(b)}$  ( $b = 0, 1, 2$ ) следует взять из (27), коэффициенты  $A_{bi}$  и  $B_{ci}$  — из (29), СФ  $U_{bi}$  — из (26), а СЗ  $\nu_{bi}$  — из решения характеристических уравнений (24). Теперь можно переходить к решению задачи (11)–(13).

**4. Построение решения для перемещений точек тела.** Так как три базиса  $\{U_{bi}\}$  ( $b = 0, 1, 2$ ) принадлежат классу  $C^\infty(\Omega)$  и независимы между собой, то каждую СФ (или ее частные производные по  $x$  и  $y$ ) из одного базиса можно разложить по СФ другого базиса. В дальнейшем понадобятся следующие спектральные разложения:

$$U_{2ixy} = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}^{(1)} U_{1i}, \quad U_{1ixy} = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}^{(2)} U_{2j},$$

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \frac{1}{N_{1j}} \iint_{\Omega} U_{2ixy} U_{1j} ds, \quad \alpha_{ij}^{(2)} = \frac{1}{N_{2j}} \iint_{\Omega} U_{1ixy} U_{2j} ds; \quad (30)$$

$$U_{1ix} = \sum_{j=1}^p \gamma_{ij}^{(1)} U_{0j}, \quad U_{2iy} = \sum_{j=1}^p \gamma_{ij}^{(2)} U_{0j},$$

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \frac{1}{N_{0j}} \iint_{\Omega} U_{1ix} U_{0j} ds, \quad \gamma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{N_{0j}} \iint_{\Omega} U_{2iy} U_{0j} ds;$$
(31)

$$G_c = \sum_{j=1}^p g_{cj} U_{cj}, \quad g_{cj} = \frac{1}{N_{cj}} \iint_{\Omega} G_c U_{cj} ds, \quad c = 1, 2;$$
(32)

$$U_{0ix} = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}^{(0)} U_{1i}, \quad U_{0iy} = \sum_{j=1}^p \beta_{ij}^{(0)} U_{2i}, \quad q = \sum_{i=1}^p q_i U_{0i},$$

$$\alpha_{ij}^{(0)} = \frac{1}{N_{1j}} \iint_{\Omega} U_{0ix} U_{1j} ds, \quad \beta_{ij}^{(0)} = \frac{1}{N_{2j}} \iint_{\Omega} U_{0iy} U_{2j} ds, \quad q_i = \frac{1}{N_{0i}} \iint_{\Omega} q U_{0i} ds;$$
(33)

$$U_{1ixx} = \sum_{j=1}^p \beta_{ij}^{(1)} U_{1j}, \quad U_{2iyy} = \sum_{j=1}^p \beta_{ij}^{(2)} U_{2j},$$

$$\beta_{ij}^{(1)} = \frac{1}{N_{1j}} \iint_{\Omega} U_{1ixxy} U_{1j} ds, \quad \beta_{ij}^{(2)} = \frac{1}{N_{2j}} \iint_{\Omega} U_{2iyy} U_{2j} ds.$$
(34)

Необходимы также спектральные разложения для  $U_{1iyy}$  и  $U_{2ixx}$ , которые можно получить при помощи уравнений из системы (15) и разложений для  $U_{1ixx}$  и  $U_{2iyy}$ , взятых из (34):

$$U_{1iyy} = -\frac{\rho}{\mu} \nu_{1i}^2 U_{1i} - \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \sum_{j=1}^p \beta_{ij}^{(1)} U_{1j}, \quad U_{2ixx} = -\frac{\rho}{\mu} \nu_{2i}^2 U_{2i} - \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \sum_{j=1}^p \beta_{ij}^{(2)} U_{2j}.$$
(35)

Число слагаемых  $p$  в (30)–(35) определяется заданной точностью вычислений. Необходимость в этих формулах обусловлена связностью уравнений системы (11). Решение задачи (11)–(13) будем искать в виде

$$v^{(b)} = \sum_{i=1}^p T_{bi}(t) U_{bi}, \quad b = 0, 1, 2,$$
(36)

где  $T_{bi}(t)$  — неизвестные функции, зависящие только от  $t$ . Для их нахождения подставим выражения  $v^{(b)}$  из (36) в систему (11):

$$a \sum_{i=1}^p T_{0i} \Delta U_{0i} - \eta \sum_{i=1}^p [T'_{1i} U_{1ix} + T'_{2i} U_{2ix}] + q = \sum_{i=1}^p T'_{0i} U_{0i},$$

$$(\lambda + 2\mu) \sum_{i=1}^p T_{1i} U_{1ixx} + (\lambda + \mu) \sum_{i=1}^p T_{2i} U_{2ixy} + \mu \sum_{i=1}^p T_{1i} U_{1iyy} + (\zeta + 2\chi) \sum_{i=1}^p T'_{1i} U_{1ixx} +$$

$$+ (\zeta + \chi) \sum_{i=1}^p T'_{2i} U_{2ixy} + \chi \sum_{i=1}^p T'_{1i} U_{1ixx} - \gamma \sum_{i=1}^p T_{0i} U_{0ix} + G_1 = \rho \sum_{i=1}^p T''_{1i} U_{1i},$$

$$(\lambda + 2\mu) \sum_{i=1}^p T_{2i} U_{2iyy} + (\lambda + \mu) \sum_{i=1}^p T_{1i} U_{1ixy} + \mu \sum_{i=1}^p T_{2i} U_{2ixx} + (\zeta + 2\chi) \sum_{i=1}^p T'_{2i} U_{2iyy} +$$

$$+ (\zeta + \chi) \sum_{i=1}^p T'_{1i} U_{1ixy} + \chi \sum_{i=1}^p T'_{2i} U_{2ixx} - \gamma \sum_{i=1}^p T_{0i} U_{0iy} + G_2 = \rho \sum_{i=1}^p T''_{2i} U_{2i}.$$
(37)

Каждое слагаемое в первом уравнении системы (37) следует представить в виде разложений по СФ  $U_0(\nu_{0i})$ , во втором — по СФ  $U_1(\nu_{1i})$ , в третьем — по СФ  $U_2(\nu_{2i})$ . Это можно сделать при помощи уравнений (16) и спектральных разложений (30)–(35). Затем после приравнивания коэффициентов перед соответствующими СФ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $T_{bi}(t)$  ( $b = 0, 1, 2$ )

$$T'_{0i} + \eta \sum_{j=1}^p (\gamma_{ji}^{(1)} T'_{1j} + \gamma_{ji}^{(2)} T'_{2j}) + a\nu_{0i}^2 T_{0i} = q_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\begin{aligned} \rho T''_{1i} + \rho\nu_{1i}^2 T_{1i} - (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^p \alpha_{ji}^{(1)} T_{2j} - (\zeta + 2\chi) \sum_{j=1}^p \beta_{ji}^{(1)} T'_{1j} - (\zeta + \chi) \sum_{j=1}^p \alpha_{ji}^{(1)} T'_{2j} + \\ + \chi \frac{\rho}{\mu} \nu_{1i}^2 T'_{1i} + \chi \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \sum_{j=1}^p \beta_{ji}^{(1)} T'_{1j} + \gamma \sum_{j=1}^p \alpha_{ji}^{(0)} T_{0j} = g_{1i}, \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho T''_{2i} + \rho\nu_{2i}^2 T_{2i} - (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^p \alpha_{ji}^{(2)} T_{1j} - (\zeta + 2\chi) \sum_{j=1}^p \beta_{ji}^{(2)} T'_{2j} - (\zeta + \chi) \sum_{j=1}^p \alpha_{ji}^{(2)} T'_{1j} + \\ + \chi \frac{\rho}{\mu} \nu_{2i}^2 T'_{2i} + \chi \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \sum_{j=1}^p \beta_{ji}^{(2)} T'_{2j} + \gamma \sum_{j=1}^p \beta_{ji}^{(0)} T_{0j} = g_{2i}. \end{aligned}$$

Используя (13), для неоднородной системы (38) будем иметь следующие однородные начальные условия:

$$T_{bi}|_{t=0} = 0, \quad b = 0, 1, 2; \quad T'_{ci}|_{t=0} = 0, \quad c = 1, 2. \quad (39)$$

Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (39) состоит из  $3p$  уравнений относительно  $3p$  неизвестных  $T_{0i}$ ,  $T_{1i}$  и  $T_{2i}$ . Ее решение с начальными условиями (39) может быть записано в квадратурах, например при помощи метода вариации произвольных постоянных [16].

Будем считать, что система (38) с начальными условиями (39) решена и функции  $T_{bi}$  ( $b = 0, 1, 2, i = 1, \dots, p$ ) найдены. Теперь при помощи полученных  $T_{bi}(t)$  и  $U_{bi}$  по формулам (36) определим  $v^{(b)}$ . После подстановки  $u^{(b)}$  и  $v^{(b)}$  в (6) будем иметь искомое решение задачи (2)–(5).

**5. Оценка погрешности.** Погрешность метода обусловлена заменой интегралов в (20) и (21) на их интегральные суммы (22) и удовлетворением граничных условий не всюду на  $\Gamma$ , а только в расчетных точках. При замене интегралов на интегральные суммы используют формулу трапеций, формулу Симпсона и др. [17]. Каждая из подобных формул имеет вид линейной связи значений подынтегральной функции в расчетных точках переменной  $\theta$ . Эта связь с точностью до обозначений всегда может быть приведена к виду (22). Разность между точным решением  $U$  и приближенным  $\tilde{U}$  обозначим через  $\delta U = U - \tilde{U}$ . Если использовать формулу Симпсона, то можно записать

$$\delta U = \Delta\theta^5 W(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad \Delta\theta = \max \Delta\theta_k \quad (40)$$

( $W(x, y)$  — ограниченная в  $\Omega$  функция). Так как  $U \in C^\infty(\Omega)$  и  $\tilde{U} \in C^\infty(\Omega)$ , то и  $W \in C^\infty(\Omega)$ . Для оценки функции  $W$  используем шаблон из двух точек  $D_i$  и  $D_{i+1}$  на  $\Gamma$ . Введем локальную систему координат: ось  $x$  проведем через эти точки, а ось  $y$  — через середину отрезка  $D_i D_{i+1}$ . Уравнение участка границы  $D_i D_{i+1}$  запишем в виде

$$y = y(0) + y'(0)x + y''(0)x^2/2 + O(h^3) \quad (41)$$

( $2h$  — расстояние между соседними точками деления  $\Gamma$ ). Используя условие  $y(\pm h) = 0$ , упрощаем уравнение (41):

$$y = \varkappa(x^2 - h^2)/2 + O(h^3), \quad \varkappa = y''(0). \tag{42}$$

Разложим  $W$  в ряд Тейлора в окрестности начала координат, ограничиваясь линейными членами по  $y$  и квадратными по  $x$ :

$$W = W(0, 0) + W_{xx}x^2/2 + W_{xy}xy + W_yy + \dots \tag{43}$$

Для  $y$  в (42) удержаны члены до  $x^2$ , тогда и в (43) следует удерживать линейные члены по  $y$  и квадратные по  $x$  как члены одинакового порядка малости. Используя условие  $W(D_i) = W(D_{i+1}) = 0$ , упрощаем разложение (43):

$$W = W_{xx}(0, 0)(x^2 - h^2)/2 + W_y(0, 0)y + \dots \tag{44}$$

Из параболической зависимости  $W$  от  $x$  в (44) следует, что  $\max |W|$  достигается на  $\Gamma$  в середине между  $D_i$  и  $D_{i+1}$ , т. е. в точке  $Q(0, -\varkappa h^2/2)$ :

$$\max |W| = (1/2)h^2|W_{xx} + \varkappa W_y|_{\Gamma} + \dots$$

Отсюда с учетом (40) получаем

$$|\delta U| = (1/2)h^2\Delta\theta^5|W_{xx} + \varkappa W_y|_{\Gamma} + \dots$$

Если обозначить через  $D_0$  наибольший диаметр области  $\Omega$ , то  $D_0\Delta\theta > 2h$ , и тогда окончательно будем иметь следующую оценку погрешности:

$$|\delta U| < (1/8)D_0^2\Delta\theta^7|W_{xx} + \varkappa W_y|_{\Gamma} + \dots \tag{45}$$

Оценка (45), в частности, показывает, что на участках границы  $\Gamma$  с большой кривизной  $\varkappa$  шаг  $h$  следует уменьшать.

**6. Численный эксперимент.** Проводились численные эксперименты с целью сравнения приближенного решения с точным для области единичного круга. С помощью линейного преобразования дифференциальный оператор в левой части (16) можно привести к оператору Лапласа, для которого и был поставлен численный эксперимент. Погрешность в методе возникает вначале при определении собственных функций  $U_{bi} = U_i$  из (22) при  $\nu_b = \nu_{bi} = \nu_i$  и затем при всех последующих спектральных разложениях. Поэтому можно ограничиться рассмотрением погрешностей при вычислении  $U_i$  и  $\nu_i$ . Погрешности СФ  $\delta U_i$  и их частных производных определялись на  $\Gamma$  в средних точках между точками деления. Примерно в таких точках погрешность  $\delta U_i$  принимает наибольшее значение.

В табл. 1 приведены погрешности для  $\delta\nu_i$  при разных значениях  $m$  ( $m$  — количество прямых  $E$ ). Из таблицы видно, что при использовании 50 лучей ( $m = 50$ ) и 100 точек деления  $\Gamma$  можно вычислить 24 СФЗ  $U_i$  и  $\nu_i$  с высокой точностью. Если для  $U_i$  и  $\nu_i$  погрешности чрезвычайно малы, то с увеличением номера  $i$  погрешности  $\delta U_i$  и  $\delta\nu_i$  монотонно возрастают. Этот недостаток частично устраняется, так как с ростом  $i$  влияние СФ  $U_i$  уменьшается в силу сходимости спектральных разложений. Можно сделать вывод, что при использовании  $2m$  ( $m > 30$ ) точек деления  $\Gamma$  данный метод позволяет

Таблица 1

$m$	$\delta\nu_1$	$\delta\nu_2$	$\delta\nu_i$
20	$10^{-45}$	$10^{-30}$	$\max i = 8, \delta\nu_8 = 10^{-6}$
30	$10^{-77}$	$10^{-55}$	$\max i = 13, \delta\nu_{13} = 10^{-6}$
50	$10^{-150}$	$10^{-114}$	$\max i = 24, \delta\nu_{24} = 10^{-6}$

Таблица 2

$m$	$\delta U_1$	$\delta U_2$	$\delta U_{1x}$	$\delta U_{2x}$	$\delta U_{1xx}$	$\delta U_{2xx}$	$\delta U_{1xxx}$	$\delta U_{2xxx}$
20	$10^{-45}$	$10^{-30}$	$10^{-43}$	$10^{-29}$	$10^{-42}$	$10^{-27}$	$10^{-39}$	$10^{-24}$
50	$10^{-150}$	$10^{-114}$	$10^{-148}$	$10^{-112}$	$10^{-146}$	$10^{-110}$	$10^{-142}$	$10^{-106}$

вычислять примерно  $m/2$  собственных значений и функций с точностью не меньше  $10^{-6}$ . С увеличением  $m$  все погрешности быстро уменьшаются. Погрешность для  $\delta \nu_1 \approx 10^{-3m}$ . Выбор значения  $m$  зависит не только от погрешностей  $\delta U_i$ , но и от количества слагаемых в спектральных разложениях, необходимых для поддержания заданной точности. В данном методе частные производные можно вычислять аналитически. В табл. 2 приведены погрешности для частных производных в граничных точках на оси  $x$ . Отсюда следует, что каждые две частные производные увеличивают погрешность примерно на 3 порядка. Тем не менее погрешности даже для четвертой частной производной очень малы. Влияние расположения полюса  $r_0$  на погрешность вычислений несущественное.

В конечно-разностных методах при расчетной сетке для единичного круга из 100 узлов погрешность значительно больше, а весь вычислительный процесс необходимо повторять многократно на каждом малом временном слое, что сопряжено с приграничными проблемами и также увеличивает погрешность.

Отметим, что полученное приближенное решение начально-краевой задачи хотя и приближенно удовлетворяет граничным условиям на  $\Gamma$  между ее расчетными точками, но в самих расчетных точках эти условия выполняются точно. Приближенное решение имеет аналитический вид, что позволяет проводить различные модельные эксперименты и исследования. Кроме того, оно удовлетворяет исходной системе дифференциальных уравнений и потому точно описывает физические свойства, которые были заложены в математическую модель. Начальные условия (5) могут быть выполнены с любой заданной точностью, что обеспечивается количеством слагаемых  $p$  в разложениях (30)–(35). Здесь при 100 точках разбиения границы приходится решать всего один раз линейную систему из 100 уравнений. При этом получаем решение, пригодное для любого конечного промежутка времени. Частные решения, полученные данным методом для более простых моделей, опубликованы (см., например, [10, 18]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабешко В. А., Калинин В. В.** Метод фиктивного поглощения в связанных смешанных задачах теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 2. С. 285–292.
2. **Гришанина Т. В., Шклярчук Ф. Н.** Связанная задача термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня при солнечном нагреве // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 161–166.
3. **Ломазов В. А., Немировский Ю. В.** Учет термочувствительности в задаче диагностики термоупругих сред // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 176–184.
4. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
5. **Попов Г. Я.** Точные решения некоторых смешанных задач несвязной термоупругости для конечного кругового полого цилиндра с вырезом вдоль образующей // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 4. С. 694–704.
6. **Ермоленко Г. Ю.** Квадратуры решений первой и второй начально-краевых задач теории упругости для анизотропного материала // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 2. С. 325–329.

7. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979.
8. Леонтьев В. Л. Вариационно-сеточный метод решения задач о собственных колебаниях упругих трехмерных тел, связанный с использованием ортогональных финитных функций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 3. С. 117–126.
9. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
10. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
12. Рвачев В. Л., Синекон Н. С. Метод  $R$ -функций в задачах теории упругости и пластичности. Киев: Наук. думка, 1990.
13. Чернышов А. Д. Нестационарное течение вязкой жидкости в трубе треугольного сечения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 5. С. 199–203.
14. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
15. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1991.
16. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
17. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1967. Т. 1.
18. Чернышов А. Д. Об одном методе решения линейных динамических задач теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 131–142.

*Поступила в редакцию 3/IX 2003 г.,  
в окончательном варианте — 24/III 2004 г.*

---