

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СУСПЕНЗИЙ

Ю. А. Бувич, А. И. Леонов

(Москва)

Рассматриваются установившиеся одномерные движения суспензий, частицы которых имеют плотность, равную плотности соответствующей дисперсионной среды. В целом механическое поведение таких суспензий описывается уравнениями движения, совпадающими по форме с уравнениями Навье — Стокса для некоторой несжимаемой жидкости, вязкость которой известным образом зависит от концентрации частиц в суспензиях. Для замыкания этих уравнений постулируется принцип минимума диссипации энергии в стационарном движении, играющий роль уравнения состояния суспензии и позволяющий определить пространственное распределение концентрации твердой фазы. Приведены точные решения некоторых вариационных задач, возникающих при рассмотрении пуазейлевского течения такого рода жидкости в круглых трубах и куэттовских течений ее между концентрическими цилиндрами и параллельными плоскостями. Показано, что в большинстве случаев имеет место расслоение суспензии.

Для описания движения двухфазных дисперсных систем в работе [1] были предложены уравнения, основанные на представлениях о фазах как о взаимопроникающих взаимодействующих между собой сплошных средах. Однако этих уравнений недостаточно для полного описания движения, ибо отсутствует аналог уравнения состояния дисперсной системы в целом, который позволил бы определять поведение концентрации системы как функции пространственной точки и времени.

Нетрудно показать, например, что уже в случае простого установившегося движения в вертикальной круглой трубе указанные уравнения допускают как угодно много различных решений, отвечающих различным пространственным распределениям диспергированной фазы, причем для любого физически приемлемого распределения имеется свое решение этих уравнений. Вообще говоря, для ликвидации этого недостатка теории и замыкания системы ее уравнений необходимо рассматривать некоторое дополнительное уравнение квазидиффузионного типа, описывающее изменение концентрации частиц в системе, с учетом зависимости диффузионных процессов от градиентов скоростей фаз, напряжений в течениях и т. п. Такое уравнение должно представлять собой, по-видимому, некоторое обобщение уравнений Ланжевена или Фоккера — Планка. Очевидно, его формулировка и вычисление входящих в него кинетических коэффициентов представляет весьма серьезную самостоятельную задачу, решение которой сопряжено с почти непреодолимыми в настоящее время трудностями. Если, однако, ограничиться рассмотрением лишь установившихся стационарных движений, то по аналогии с известными результатами термодинамики необратимых процессов можно ввести в качестве некоторого эвристического принципа принцип, согласно которому распределение концентрации дисперсной фазы в потоке устанавливается таким образом, чтобы диссипация энергии потока была минимальной. Этот принцип минимума диссипации соответствует известному в термодинамике необратимых процессов принципу максимума прироста энтропии, хотя последний и не доказан строго для систем, не находящихся в состоянии механического равновесия.

Можно предположить, что в потоке дисперсной системы имеются некие малые случайные движения и связанные с ними силы, вызванные, например, кильватерными струями, образующимися за кормой движущихся частиц, и их взаимодействием, а также всевозможными флуктуационными возмущениями скоростей фаз, концентрации диспергированной фазы и давления. Под действием таких сил отдельные частицы смещаются в определенные «равновесные» положения, отвечающие данному стационарному движению (и удовлетворяющие сформулированному принципу). Описание случайного силового поля и процесса установления стационарного движения, а также обоснование введенного принципа минимума диссипации энергии может быть достигнуто, по-видимому, лишь в рамках соответствующей статистической теории. Заметим, однако, что существование флуктуационных сил и участков установления истинно стационарного движения было экспериментально доказано, например, в работе [2], в которой исследовалось движение отдельных частиц в вязкой жидкости. Без детального рассмотрения статистики указанных сил нельзя ответить также на вопрос о пределах приме-

нимости развиваемой ниже теории. Но из общих соображений следует, по-видимому, что при очень малых скоростях движения эти силы весьма малы, так что стационарный режим может достигаться слишком медленно, чтобы играть практически существенную роль. Наоборот, при высоких скоростях случайные силы могут оказаться весьма интенсивными, так что истинное распределение твердой фазы в потоке будет за счет флуктуаций весьма значительно отличаться от «теоретического» распределения, отвечающего минимуму диссипации энергии.

Для простоты в данной работе рассматриваем установившиеся движения суспензий таких твердых частиц, плотность которых равна плотности вязкой среды. В этом случае можно с достаточной степенью точности считать, что локальные значения скоростей фаз совпадают везде, за исключением тонких слоев у твердых стенок, ограничивающих движение. Переходя от уравнений работы [1] к эквивалентным уравнениям двухжидкостной гидродинамики дисперсной системы [3], можно показать, что уравнения движения такой суспензии в целом совпадают с уравнениями Навье — Стокса для вязкой жидкости с вязкостью, известным образом зависящей от концентрации частиц на стенках [3], в связи с чем вблизи от стенок локальные значения скоростей частиц и жидкой фазы могут не совпадать, а кроме того, может нарушаться обычно налагаемое условие прилипания. Однако, если радиус трубы R намного больше радиуса частицы a , то можно показать, что с точностью до a/R граничное условие прилипания на стенках выполняется. Заметим также, что в силу фактически используемого усреднения по пространственным объемам, линейные размеры которых значительно превосходят a , все получаемые ниже результаты относятся к расстояниям $l \gg a$.

§ 1. Общая постановка задачи о движении суспензий. Систему уравнений Навье — Стокса можно обычным образом дополнить уравнением неразрывности введенной жидкости и условием сохранения потока твердых частиц. Таким образом, получим замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu(\rho) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - dg \delta_{i1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \quad \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad u_i|_{\Gamma} = U_i \\ \min D &= \min \frac{1}{2} \int_V \mu(\rho) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь d — плотность, а $\mu(\rho)$ — вязкость жидкости, ρ — объемная концентрация твердых частиц, U_i — скорость твердой поверхности Γ .

Эффективная вязкость $\mu(\rho)$ представляет собой функцию, вообще говоря, вогнутую, от ρ . Для простоты предполагаем, что при $\rho \rightarrow \rho_*$, где ρ_* — концентрация, соответствующая плотной упаковке частиц, величина $\mu(\rho)$ стремится к бесконечности; при $\rho \rightarrow 0$ имеем $\mu \rightarrow \mu_0$, где μ_0 — вязкость однородной дисперсионной среды. Удобно перейти от ρ к нормированной концентрации ρ' посредством определения $\rho = \rho' \rho_*$. В дальнейшем под ρ понимаем именно нормированную концентрацию ρ' . Заметим, что она удовлетворяет естественным неравенствам

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad (1.2)$$

Для конкретных расчетов ниже используем аппроксимационную зависимость для $\mu(\rho)$, удовлетворяющую сформулированным предельным соотношениям,

$$\mu(\rho) = \mu_0(1 - \rho)^{-n} \quad (n > 1) \quad (1.3)$$

Вариационная задача (1.1), (1.2) представляет собой весьма усложненный вариант задач теории оптимального управления. Поэтому в ряде случаев можно воспользоваться методами, характерными для этой теории, — использовать принцип максимума [4], либо же для получения численного решения задачи свести ее к функциональным уравнениям динамического программирования [5]. Однако для решения рассматриваемых в работе задач принцип максимума оказывается неэффективным, в связи с чем используем метод качественного исследования возникающих функционалов, объединяя его с методом экстремалей.

§ 2. Течение в круглой трубе. Рассмотрим осесимметричное стационарное течение суспензии в неограниченной круглой трубе радиуса R . Уравнения (1.1) и проинтегрированные условия сохранения потоков суспензии (или же введенной фиктивной жидкости) и частиц имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^4 \mu(\rho) \frac{du}{dr} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} = -P \quad (2.1)$$

$$U = \frac{2}{R^2} \int_0^R r u(r) dr, \quad U_\rho = \frac{2\rho_*}{R^2} \int_0^R r \rho(r) u(r) dr$$

Здесь U и U_ρ — среднерасходные скорости суспензии и частиц, соответственно. Выражение для энергии, диссипируемой на единицу длины трубы, представится в форме

$$D = \pi \int_0^R r \mu(\rho) \left(\frac{du}{dr} \right)^2 dr$$

Введем новые безразмерные переменные и среднюю по сечению концентрацию $\langle \rho \rangle$:

$$x = \left(\frac{r}{R} \right)^2, \quad y = \frac{2}{R^2} \int_0^r r \rho(r) dr = \int_0^x \rho(\xi) d\xi \quad (2.2)$$

$$y' = \rho(x), \quad y(0) = 0, \quad \langle \rho \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \rho(r) dr$$

Интегрируя первое уравнение (2.1) с учетом условия прилипания, подставляя результат в выражения для U , U_ρ , D и $\langle \rho \rangle$, а также используя выражение (1.3) для $\mu(\rho)$, получим

$$D = \frac{P^2 R^4}{16\mu_0} \int_0^1 x (1 - y')^n dx = \frac{P^2 R^4}{16\mu_0} J(y)$$

$$U = \frac{PR^2}{4\mu_0} \int_0^1 x (1 - y')^n dx = \frac{PR^2}{4\mu_0} J(y) \quad (2.3)$$

$$U_\rho = \frac{PR^2 \rho_*}{4\mu_0} \int_0^1 y (1 - y')^n dx = \frac{PR^2 \rho_*}{4\mu_0} G(y)$$

$$\langle \rho \rangle = \int_0^1 y' dx = y(1) = L(y), \quad y(0) = 0$$

Распределение скорости по сечению трубы описывается выражением

$$u(x) = \frac{PR^2}{4\mu_0} \int_x^1 (1 - y')^n dx \quad (2.4)$$

Таким образом, для определения $\rho(x)$ необходимо решить некоторую вариационную задачу с наложенным изопериметрическим условием и ограничением (1.2). Будем искать решение $\rho(x)$ в классе кусочно-непрерывных функций $\rho(x) \equiv y'(x) \in C'(0,1)$, причем для определенности предполагаем, что в точках разрыва $\rho \equiv y'$ непрерывна слева.

Движение суспензии существенно зависит от характера заданных внешних условий. Для различных внешних условий, а следовательно, для раз-

личных практических реализаций движения, конкретные формулировки вариационной задачи также будут различными. Ниже рассмотрены три простейшие задачи о движении суспензии:

- 1) течение, определенное заданием градиента давления P и средней концентрации частиц $\langle \rho \rangle$;
- 2) течение, определенное заданием $\langle \rho \rangle$ и расходом суспензии U ;
- 3) течение при заданных расходах суспензии и частиц, U и U_ρ .

Все эти задачи могут быть реализованы, например, при проведении соответствующего опыта с капиллярным вискозиметром большой длины. Возможны и другие типы течения, например, течение с заданными P и U_ρ .

При заданных $\langle \rho \rangle$ и P минимуму $D(y)$ соответствует минимум функционала $J(y)$. Для течения с заданными $\langle \rho \rangle$ и U имеем из (2.3)

$$P = 4\mu_0 UR^{-2}[J(y)]^{-1}, \quad D = \mu_0 U^2[J(y)]^{-1}$$

Отсюда следует, что в последнем случае $\min D(y)$ соответствует $\max J(y)$ при условии $L(y) = \langle \rho \rangle$. Поэтому первые две вариационные задачи удобно рассматривать одновременно.

§ 3. Решение вариационных задач, отвечающих заданной средней концентрации частиц в сечениях трубы. Введем новую переменную $z = 1 - y' = 1 - \rho$. Легко видеть, что $0 \leq z \leq 1$. Рассматриваемые задачи можно тогда сформулировать в следующем виде.

В классе функций $z' \in C'(0,1)$ найти функции, доставляющие функционалу

$$J_0(z) = \int_0^1 x z^n dx \quad (n > 1) \quad (3.1)$$

минимальное и максимальное значения (минималь и максималь, соответственно) при условии

$$L_0(z) = \int_0^1 z dx = \langle z \rangle \quad (0 < \langle z \rangle < 1) \quad (3.2)$$

и ограничении

$$0 \leq z \leq 1 \quad (3.3)$$

Основная трудность решения заключена в том, что искомые экстремали не удовлетворяют, вообще говоря, уравнению Эйлера — это связано с возможностью произвольного числа разрывов экстремалей на $[0, 1]$, а также с возможным выходом экстремалей на границы $z = 0$ или $z = 1$ допустимой области изменения $z(x)$. Фундаментальный факт, следующий из качественного рассмотрения функционалов, состоит в монотонности экстремалей. Его доказательство основано на лемме.

Лемма 3.1. Минималь (максималь) $z_0 \in C'(0,1)$, представляющая решение вариационной задачи (3.1) — (3.3), на любом интервале Δ ненулевой меры ($\Delta \subseteq (0, 1)$), на котором она непрерывна, не возрастает (не убывает).

Доказательство. Предположим от противного, что минималь $z_0(x)$ на участке $\Delta(x_1, x_2)$ своей непрерывности ($0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$) не убывает. Построим функцию

$$z_*(x) = \begin{cases} z_0(x_1 + x_2 - x), & x \in \Delta \\ z_0(x), & x \notin \Delta \end{cases}$$

представляющую зеркальное отражение $z_0(x)$ на отрезке Δ относительно прямой $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Функция $z_*(x)$ удовлетворяет ограничению (3.3), а также условию (3.2), ибо площади под кривыми z_0 и z_* одинаковы. В силу основного свойства свертки

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \varphi(x_1 + x_2 - x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x_1 + x_2 - x) \varphi(x) dx$$

имеем после вычислений

$$J_0(z_*) - J_0(z_0) = 2 \int_0^{1/2(x_2-x_1)} \xi \left[z_0^n \left(\frac{x_1+x_2}{2} - \xi \right) - z_0^n \left(\xi + \frac{x_1+x_2}{2} \right) \right] d\xi \leq 0$$

Последнее нестрогое неравенство следует из неубывания $z_0(x)$ на Δ , причем равенство реализуется лишь при $z_0(x) \equiv \text{const}$ ($x \in \Delta$). Заметим, что оно имеет место при произвольном $n > 0$ в (1.3). Совершенно аналогично проводятся рассуждения для максимали, которая от противного предполагается невозрастающей. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Для доказательства монотонности экстремалей на интервале $[0, 1]$ необходимо показать, что минималь (максималь) не может возрастать (убывать) скачком. Назовем разрыв кусочно-монотонной функции $z(x) \in C'$ правильным, если он сохраняет монотонность $z(x)$, и неправильным в противном случае. Имеем следующую теорему.

Теорема 3.1. Минималь (максималь) задачи (3.1) — (3.3) не возрастает (не убывает) на интервале $[0, 1]$.

Доказательство. Будем доказывать сформулированный факт для минимали; доказательство для максимали совершенно аналогично. Положим от противного, что минималь $z_0(x)$ имеет N неправильных скачков, расположенных в точках $0 < x_0 < \dots < x_{N-1}$, и рассмотрим z_0 на $[0, x_1]$. Обозначим $z_0^- = z_0(x_0 - 0)$, $z_0^+ = z_0(x_0 + 0)$, причем в силу предположения $z_0^+ > z_0^-$. Обозначим также $z_0(x)$ слева от x_0 через $\varphi_1(x)$, а справа от x_0 (т. е. на интервале $(x_0, x_1]$) — через $\varphi_2(x)$ и выделим в окрестности x_0 малый интервал $\Delta(x_\alpha, x_\beta) \subseteq [0, x_1]$ такой, что $\varphi_1(x_\alpha) \leq \varphi_2(x_\beta)$. Интервал Δ существует ввиду кусочной непрерывности и следующей из леммы 3.1 кусочной монотонности $z_0(x)$. В интервале $\Delta(x_\alpha, x_\beta)$ построим новую функцию $z_*(x)$, представляемую линией $C'D'A'B'$, по функции z_0 , представляемой линией $ABCD$ (фиг. 1). Для этого сдвинем кусок CD влево в горизонтальном направлении параллельно самому себе до совмещения точки C с C' , имеющей абсциссу x_α , а кусок AB аналогичным образом перенесем вправо до совмещения B с точкой B' , имеющей абсциссу x_β . Условия (3.2) и (3.3) инвариантны, как легко видеть, относительно этих параллельных переносов. Аналитическое представление $z_*(x)$ имеет вид

$$z_*(x) = \begin{cases} z_0(x), & x \in \Delta(x_\alpha, x_\beta) \\ \varphi_2(x - x_\alpha + x_0), & x_\alpha < x < x_\alpha + x_\beta - x_0 \\ \varphi_1(x - x_\beta + x_0), & x_\alpha + x_\beta - x_0 < x < x_\beta \end{cases}$$

После простого вычисления получим

$$J_0(z_*) - J_0(z_0) = (x_\beta - x_0) \int_{x_\alpha}^{x_0} \varphi_1^n(x) dx - (x_0 - x_\alpha) \int_{x_0}^{x_\beta} \varphi_2^n(x) dx$$

Во втором интеграле введем замену переменных

$$x = a\xi + b, \quad a = \frac{x_\beta - x_0}{x_0 - x_\alpha}, \quad b = x_0 - ax_\alpha$$

которая переводит отрезок (x_0, x_β) в отрезок (x_α, x_0) . Тогда

$$(x_0 - x_\alpha) \int_{x_0}^{x_\beta} \varphi_2^n(x) dx = (x_\beta - x_0) \int_{x_\alpha}^{x_0} \varphi_2^n(ax + b) dx$$

Учитывая, что по построению отрезка Δ имеем $\varphi_1 < \varphi_2$, получим отсюда

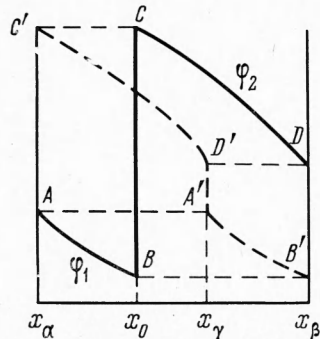
$$J_0(z_*) - J_0(z_0) = (x_\beta - x_0) \int_{x_\alpha}^{x_0} [\varphi_1^n(x) - \varphi_2^n(ax + b)] dx < 0$$

Таким образом, если $x_\alpha = 0$, $x_\beta = x_1$ (т. е. $z_0(0) \leq z_0(x_1)$), в точке x_0 минималь не может иметь неправильного скачка.

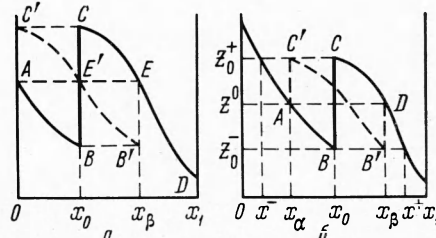
Рассмотрим теперь общий случай. Без ограничения общности достаточно рассмотреть ситуацию, когда имеют место неравенства

$$z_0(0) > z_0^+ > z_0^- > z_0(x_1) \quad (3.4)$$

Действительно, пусть, например, $z_0(0) < z_0^+$, $z_0(x_1) < z_0^-$. Тогда функция $z_*(x)$, изображаемая ломаной $C'E'B'ED$ на фиг. 2, а, на основании доказанного дает меньшее значение функционалу $J_0(z)$, чем $z_0(x)$, изображаемая ломаной $ABCED$, причем условия (3.2) и (3.3) инвариантны относительно перехода от z_0 к z_* . Легко видеть, что



Фиг. 1



Фиг. 2

для $z_*(x)$, которую только и нужно рассматривать, на самом деле имеют место неравенства (3.4). Совершенно аналогично проводятся рассуждения и для случая, когда

$$z_0^- < z_0(x_1), \quad z_0(0) > z_0^+$$

Таким образом, пусть $z_0(x)$, удовлетворяющая (3.4), имеет вид, представленный на фиг. 2, б. Проведем прямую $z = z^0 = 1/2(z_0^+ + z_0^-)$, параллельную оси абсцисс до пересечения с кривыми $z = \varphi_1(x)$ и $z = \varphi_2(x)$ в точках A и D , соответственно (фиг. 2, б) с абсциссами x_α и x_β . На основании доказанного функция $z_1(x)$, совпадающая с $z_0(x)$ всюду вне отрезка $\Delta(x_\alpha, x_\beta)$, а на Δ представляемая ломаной $AC'B'D$, дает меньшее значение функционалу $J_0(z)$, чем $z_0(x)$. Заметим, что построенная функция $z_1(x)$ имеет два неправильных скачка в точках x_α и x_β на $[0, x_1]$, причем величина этих скачков равна половине первоначального. Прделав аналогичную процедуру с неправильными скачками функции $z_1(x)$, получим функцию $z_2(x)$, дающую меньшее значение функционалу при сохранении условий (3.2) и (3.3), причем $z_2(x)$ будет иметь четыре неправильных скачка, величина каждого из которых равна одной четверти величины первоначального скачка функции $z_0(x)$. Абсциссы этих скачков никогда не совпадают. Нетрудно видеть по индукции, что k -я функция $z_k(x)$ имеет 2^k неправильных скачков с величиной $2^{-k}(z_0^+ - z_0^-)$. Продолжая процесс неограниченно, получим функцию $z_n(x)$, не имеющую скачков на интервале $[0, x_1]$, в которых $z_n(x)$ возрастала бы, и дающую функционалу (3.1) меньшее значение, чем $z_0(x)$. Повторяя доказательство для интервала $[0, x_2]$, получим, что и на этом интервале минималь не может иметь неправильных скачков. Рассуждая далее по индукции, приходим к такому же выводу для всего интервала $[0, 1]$. Тем самым теорема доказана.

Отметим, что в доказательстве существен был только факт, что $n > 0$. Последнее соответствует возрастанию текучести суспензии с увеличением z . Вместо текучести z^n в (3.1), следующей из выражения (1.3) для эффективной вязкости, в доказательстве могла бы фигурировать произвольная возрастающая функция $\Psi(z)$, такая что $\Psi(0) = 0$.

Априори возможны две ситуации: либо минималь (максималь) идет только по границе области, принимая значения нуль или единица, либо она на некотором интервале проходит в открытой области $0 < z < 1$. В первом случае по доказанному она может иметь лишь один скачок; во втором случае на интервале, где $0 < z < 1$, она описывается уравнением Эйлера. Уравнение Эйлера для функционала (3.1) с условием (3.2) суть

$$n x z^{n-1} = \lambda, \quad z = \left(\frac{x_0}{x} \right)^{1/(n-1)}, \quad x_0 = \frac{\lambda}{n} \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что экстремаль указанного типа существует лишь при $n \neq 1$, причем, как просто показать, при $n > 1$ функция (3.5) доставляет локальный минимум функционалу (3.1), а при $n < 1$ — локальный максимум. Докажем лемму (3.2).

Лемма 3.2. Если существует интервал $\Delta(x_1, x_2)$, где экстремаль удовлетворяет условию $0 < z_0 < 1$, то на этом интервале $z_0(x)$ непрерывна.

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь такие Δ , где существует единственный разрыв экстремали $z_0(x)$. Ввиду аддитивности функционалов (3.1) и (3.2) $z_0(x)$ представляет собой решение изопериметрической задачи об экстремуме $J_0(z_0, \Delta)$:

$$J_0(z_0, \Delta) = \int_{x_1}^{x_2} x z_0^n dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} z_0 dx = \langle z_0 \rangle(\Delta)$$

Вводя новую переменную $z_0 = w' = dw/dx$ и рассматривая обычным образом функционал

$$\int_{x_1}^{x_2} [x(w')^n - \lambda w'] dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x, w') dx$$

получим, что экстремаль $w(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_{w'} = nx(w')^{n-1} - \lambda = A = \text{const} \quad (3.6)$$

и условиям Вейерштрасса — Эрдмана в точке разрыва $c \in \Delta$:

$$[F_{w'}]_{c-0}^{c+0} = 0, \quad [F - w'F_{w'}]_{c-0}^{c+0} = 0 \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что

$$[F_{w'}]_{c-0}^{c+0} = nc \{ [w'(c+0)]^{n-1} - [w'(c-0)]^{n-1} \} = 0$$

Отсюда следует непрерывность $w' = z$ в Δ .

Из доказанной леммы 3.2 следует, что экстремаль $z_0(x)$ на $[0, 1]$ может иметь не более двух скачков в точках $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, причем для минимали выполняются неравенства $z_0(x^{(1)} - 0) = 1$, $z_0(x^{(2)} + 0) = 0$, а для максимали — $z_0(x^{(1)} - 0) = 0$, $z_0(x^{(2)} + 0) = 1$. Имеет место теорема 3.2.

Теорема 3.2. Если n в (3.1) больше единицы, то минималь $z_0(x)$ вариационной задачи единственна, непрерывна и представима выражениями

$$z_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_0 \\ (x_0/x)^{1/(n-1)}, & x_0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

где x_0 — единственный корень трансцендентного уравнения

$$\langle z \rangle = \frac{n-1}{n-2} x_0^{1/(n-1)} - \frac{x_0}{n-2} \quad (3.9)$$

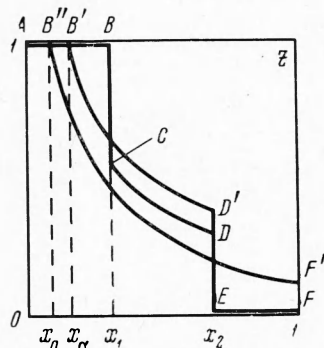
а максималь $z^0(x)$ единственна и определяется выражениями

$$z^0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 - \langle z \rangle \\ 1, & 1 - \langle z \rangle < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

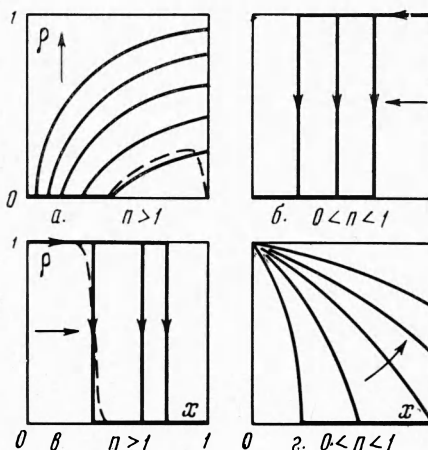
Доказательство. По-прежнему используем метод от противного. Согласно лемме 3.2 можно без ограничения общности принять, что минималь представляется ломаной $ABCDEF$ на фиг. 3, причем участки AB и EF лежат в ε -окрестностях прямых $z = 1$ и $z = 0$, соответственно, а кривая CD определяется уравнением (3.5). Построим новую функцию, такую, что условия (3.2) и (3.3) не изменяются, и эта функция совпадает с прежней при $x < x_1$ и $x > x_2$ (ломаная $AB'D'EF$ на фиг. 3). Пользуясь леммой 3.2 и уравнением (3.5), легко видеть, что кривая $B'D'$ единственна и также принадлежит к классу (3.5), причем роль x_0 в (3.5) играет величина x_z , $x_z < x_1$. Непосредственный подсчет показывает, что $AB'D'EF$ доставляет функционалу (3.1) меньшее значение, чем $ABCDEF$. Устремляя ε к нулю, получим доказательство непрерывности минимали слева. Далее, построим функцию $AB''F'$, совпадающую с $AB'D'EF$ в области $x < x_0$

и не изменяющую условий (3.2) и (3.3). Эта функция в области $x > x_0$ также принадлежит к классу (3.5), причем всегда найдется соответствующее значение x_0 . Непосредственный подсчет показывает, что она дает функционалу (3.1) меньшее значение, чем $AB'D'EF$. Следовательно, минимальная $z_0(x)$ непрерывна также справа и представима выражениями (3.8).

Величина x_0 в (3.8) определяется из изопериметрического условия



Фиг. 3



Фиг. 4

(3.2), которое приводит к уравнению (3.9). Правая часть $f(x_0)$ этого уравнения монотонно возрастает на интервале $[0, 1]$ от нуля до единицы, так как

$$f'(x_0) = (x_0^{-(n-2)/(n-1)} - 1) (n-2)^{-1} > 0, \quad n > 1$$

Отсюда следует, что при выполнении условия $0 < \langle z \rangle < 1$ всегда существует единственный корень уравнения (3.9), откуда следует единственность минимали при $n > 1$.

Второе утверждение теоремы при $n > 1$ очевидно. Действительно, если предположить, что имеется некоторый интервал $\Delta(x_1, x_2)$, в котором максимальная z^0 удовлетворяет неравенству $0 < z^0 < 1$, то на некотором внутреннем отрезке этого интервала (там, где z^0 непрерывна, а такой отрезок непрерывности всегда существует, ибо $z^0 \in C'$), максимальная должна удовлетворять уравнению Эйлера (3.5). Однако последнее при $n > 1$ имеет только решения, отвечающие минимуму функционала (3.1). Отсюда следует, что $z^0(x)$ может принимать лишь значения нуля или единицы. Тогда в силу теоремы 3.1 максимальная представима в виде (3.10). Теорема доказана.

При $0 < n < 1$ точно таким же образом показывается, что единственная минимальная представима в виде

$$z_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 - \langle z \rangle \\ 0, & 1 - \langle z \rangle < x \leq 1 \end{cases}$$

а единственная максимальная определяется выражениями

$$z^0(x) = \begin{cases} \langle z \rangle \frac{2-n}{1-n} x^{1/(1-n)}, & \langle z \rangle < \frac{1-n}{2-n} \\ \begin{cases} (x/x_0)^{1/(1-n)}, & 0 \leq x \leq x_0 \\ 1, & x_0 < x \leq 1 \end{cases}, & \langle z \rangle > \frac{1-n}{2-n} \end{cases}$$

Заметим теперь, что все качественные результаты (а также количественные, относящиеся к разрывным распределениям) имеют место для произвольной функции текучести $\Psi(z)$, возрастающей с z ($\Psi(0) = 0$), которой можно заменить z^n в (3.1). При этом случае $n > 1$ соответствуют вогнутые функции $\Psi(z)$, а случае $n < 1$ — выпуклые $\Psi(z)$. В возможности такого рода обобщений можно легко убедиться, просматривая доказательства теорем.

На основании полученных результатов качественный вид искомых распределений концентрации твердых частиц в суспензии $\rho(x)$ представлен на фиг. 4 (а, б — минимали; в, г — максимали); стрелки указывают

смещение кривых с ростом $\langle \rho \rangle$. Эксперименты свидетельствуют, что реальные $\mu(\rho)$ представляют собой вогнутые функции, поэтому в реальных случаях имеем качественные распределения, отвечающие случаю $n > 1$ на фиг. 4.

Заметим еще, что, как указывалось в § 1, результаты не могут быть справедливыми на расстояниях от стенки, имеющих порядок размера частиц, поскольку у стенок возникают смазочные слои, оттесняющие частицы. Аналогично, получаемые из анализа разрывы распределений $\rho(x)$ соответствуют фактически резкому изменению $\rho(x)$ на расстояниях порядка a . Отсюда следует, что реальные распределения несколько отличаются от полученных выше (см. пункт на фиг. 4). Пользуясь формулами § 2, по известным функциям $\rho(x)$ нетрудно получить выражения для интегральных характеристик движения суспензии и поля скорости в потоке. Из-за недостатка места эти формулы не выписываются.

§ 4. Решение задачи, отвечающей заданным расходам частиц и суспензии в целом. Исключая из (2.3) неизвестный градиент давления P , приходим к задаче отыскания функции $y_0 \in C_1'$, дающей максимум функционалу

$$J(y) = \int_0^1 x(1-y')^n dx, \quad y(0) = 0 \quad (4.1)$$

при изопериметрическом условии

$$G(y) - KJ(y) = \int_0^1 (y - Kx)(1-y')^n dx = 0, \quad K = \frac{U_e}{\rho_* \bar{U}} < 1 \quad (4.2)$$

и ограничении

$$0 \leq y'(x) \leq 1 \quad (4.3)$$

Нетрудно видеть, что максимальь $y_0(x)$, представляющая решение задачи (4.1) — (4.3), монотонно возрастает (не убывает) и расположена в треугольнике, ограниченном осью абсцисс ($y = 0$), биссектрисой первого квадранта и прямой $x = 1$. Из (4.2) видно, что максимальь $y_0(x)$ доставляет одновременно максимум функционалу $G(y)$, если только выполняется изопериметрическое условие (4.2).

Пусть максимальь y_0 существует. Тогда существует и

$$\max y_0(x) = y_0(1) = \langle \rho \rangle \quad (0 < \langle \rho \rangle < 1) \quad (4.4)$$

Рассмотрим вспомогательные задачи.

Задача 1. В классе $y \in C_1'$ найти $\max J(y)$ при условии (4.4), ограничении (4.3) и условии $y(0) = 0$.

Задача 2. В классе $y \in C_1'$ найти $\max G(y)$ при тех же условиях и ограничении.

Задача 1 была решена в предыдущем параграфе; в обозначениях этого параграфа ее решение имеет вид

$$y_1(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \langle \rho \rangle \\ 0, & \langle \rho \rangle < x \leq 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Оказывается, что решение задачи 2 совпадает с $y_1(x)$ из (4.5). Точно так же, как и в § 3, доказывается, что при $n > 1$ (или вообще при вогнутой вязкостной характеристике) решение уравнения Эйлера доставляет локальный минимум функционалу $G(y)$ при указанных выше условиях. Отсюда сразу следует, что искомая максимальь $y_2(x)$ задачи 2 имеет производную, равную либо нулю, либо единице, т. е. идет все время по границе области (4.3). Она может быть представлена ломаной, изображенной на

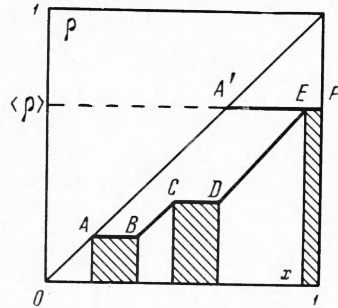
фиг. 5. Нетрудно видеть, что из всех таких ломаных наибольшее значение функционалу $G(y)$ доставляет кривая (4.5) (ломаная $OA'F$ на фиг. 5). Последнее следует из того обстоятельства, что вклад в $G(y)$ дают лишь участки «плато», где $y' \equiv 0$, причем $G(y)$ равен просто сумме площадей под этими участками (фиг. 5).

Из доказанного вытекает следствие: при заданном $\langle \rho \rangle$ принцип минимума диссипации при дополнительном задании U эквивалентен принципу максимума расхода частиц при дополнительном задании P . Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть (2.3).

Значение $\langle \rho \rangle$, фигурирующее в (4.5), находится из изопериметрического условия (4.2) и равно

$$\langle \rho \rangle = K(2 - K)^{-1} \quad (4.6)$$

Заметим, что если на вход трубы подается суспензия с заданными U и U_p , то K можно рассматривать как среднюю концентрацию на входе. Тогда, согласно (4.6), на участке установившегося течения средняя концентрация $\langle \rho \rangle$ может существенно отличаться от K , причем это отличие особенно заметно при малых K .



Фиг. 5

Заметим еще, что если задано изопериметрическое условие (4.2), определяющее соотношение между потоками частиц и суспензии в целом, и градиент давления P , то принцип минимума диссипации энергии приводит к выводу об отсутствии течения в трубе. Физически это легко понять, если рассматривать специальный опыт, в котором в цилиндр, ограниченный поршнем под постоянным давлением, поступает суспензия с заданной средней концентрацией K . Поршень проталкивает эту суспензию в капилляр существенно меньшего диаметра. Через некоторое время после начала процесса частицы в капилляре приходят в плотно упакованное состояние, после чего движение в нем прекращается, а новые поступающие в цилиндр объемы суспензии приводят только к поднятию поршня.

§ 5. Куэттово течение суспензии. Рассмотрим течение Куэтта между концентрическими цилиндрами радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Система уравнений, соответствующая (2.1), имеет в этом случае вид

$$d \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{dp}{dr}, \quad \frac{dp_{r\varphi}}{dr} + \frac{2p_{r\varphi}}{r} = 0$$

$$p_{r\varphi} = \mu(\rho) r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right), \quad D = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r p_{r\varphi} \dot{\gamma}_{r\varphi} dr$$

Вводя безразмерную переменную $x = (r/R_2)^2$ и используя при интегрировании формулу (1.3), получим систему функционалов, характеризующих движение

$$D = \frac{\pi \tau_0^2 R_2^2}{\mu_0} \int_0^1 z^n \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi \tau_0^2 R_2^2}{\mu_0} M(z), \quad k = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2$$

$$V = \frac{R_2 \tau_0}{\mu_0} \int_0^1 z^n \frac{dx}{x^2} = \frac{R_2 \tau_0}{\mu_0} M(z), \quad z = 1 - \varphi \quad (5.1)$$

$$\langle z \rangle = \frac{1}{1-k} \int_0^1 z dx = \frac{1}{1-k} L(z)$$

Здесь τ_0 — напряжение на внешнем цилиндре, D — диссипируемая энергия, V — линейная скорость на внешнем цилиндре. Скорость внутрен-

него цилиндра предполагается равной нулю, что, как легко видеть, не ограничивает общности рассмотрения. Так, например, при вращении внутреннего и неподвижности внешнего цилиндров второй функционал в (5.1) не изменяется, а первый и третий вообще постоянны. Так же, как и в § 3, приходим к вариационной задаче.

В классе $z \in C'$ найти $z_0(x)$, доставляющую минимум (максимум) функционалу

$$M(z) = \int_k^1 z^n \frac{dx}{x^2} \quad (5.2)$$

при условии

$$N(z) = \frac{1}{1-k} \int_k^1 z dx = \langle z \rangle \quad (0 < \langle z \rangle < 1) \quad (5.3)$$

и ограничении

$$0 \leq z \leq 1 \quad (5.4)$$

Заметим, что задача о $\min M(z)$ соответствует определению поля концентраций при задании средней концентрации в суспензии и напряжения на внешнем цилиндре. Задача о $\max M(z)$ соответствует определению поля концентраций при заданных средней концентрации суспензии и скорости внешнего цилиндра.

Аналогично § 3 поведение экстремалей определяется из качественного исследования вариационной задачи (5.2) — (5.4) с использованием на последнем этапе уравнения Эйлера. Качественное поведение экстремалей определяется двумя утверждениями, аналогичными лемме 3.1 и теореме 3.1.

Лемма 5.1. Функция $z_0 \in C'(k, 1)$, доставляющая минимум (максимум) функционалу (5.2) при условии (5.3) и ограничении (5.4) на любом интервале своей непрерывности Δ ненулевой меры не убывает (не возрастает).

Теорема 5.1. Функция $z_0 \in C'(k, 1)$, доставляющая минимум (максимум) функционалу (5.2) при условии (5.3) и ограничении (5.4), на всем интервале $[k, 1]$ не убывает (не возрастает).

Доказательство этих утверждений проводится теми же методами, что и доказательство леммы 3.1 и теоремы 3.1 и потому опускается. Несколько «обратный» характер этих утверждений по сравнению с такими утверждениями в § 3 объясняется различием оптимизируемых функционалов $J(z)$ и $M(z)$.

Далее аналогично § 3 доказывается, что минималь на участках своей непрерывности описывается соответствующим уравнением Эйлера, решение которого может иметь угловые точки лишь на границах $z = 0$ и $z = 1$ области изменения z_0 . Максималь же может принимать только значения $z = 0$ или $z = 1$. В силу монотонности (невозрастания) максимали, последняя имеет вид

$$z_0(x) = \begin{cases} 1, & k \leq x \leq \alpha \\ 0, & \alpha < x \leq 1 \end{cases} \quad (\alpha = k + (1-k)\langle z \rangle) \quad (5.5)$$

Здесь константа α определена из изопериметрического условия.

Семейство отрезков минималей, удовлетворяющих уравнению Эйлера, представляется выражениями

$$z_0(x) = Cx^{2/(n-1)} \quad (C > 0)$$

$$C = \frac{\langle z \rangle (1-k)(n+1)}{[1 - k^{(n+1)/(n-1)}](n-1)} \quad (n > 1) \quad (5.6)$$

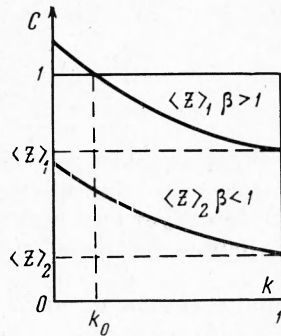
Из (5.6) просто видеть, что при $1 < n < 3$ функция $z_0(x)$ вогнута, при $n > 3$ — выпукла. Вопрос о попадании минимали на границу $z = 1$ решается путем исследования поведения $z(1) = C(\langle z \rangle, k, n)$, причем

$$\frac{n+1}{n-1} = \beta > 1, \quad C(\langle z \rangle, k, n) = \langle z \rangle \beta \frac{1-k}{1-k^\beta}$$

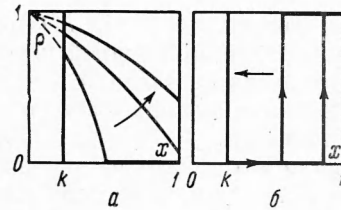
При фиксированных $\langle z \rangle, \beta$ имеем

$$C|_{k=0} = \langle z \rangle \beta, \quad C|_{k=1} = \langle z \rangle, \quad \frac{dC}{dk} < 0, \quad \frac{dC}{dk} \Big|_{k=1} = 0 \quad (5.7)$$

Поведение $C(\langle z \rangle, k, \beta)$ как функции k представлено на фиг. 6. Если $\langle z \rangle \beta > 1$, то существует такое k_0 , что при $k < k_0$ имеем $C > 1$. Если $\langle z \rangle \beta \leq 1$, то $C < 1$ при всех возможных k . В первом случае при $k < k_0$ (достаточно широкие зазоры) минималь при некотором $x = x_0$ попадает на границу



Фиг. 6



Фиг. 7

$z = 1$ и далее идет по границе, а при $k > k_0$ минималь на границу не выходит. Таким образом, поведение минималей (т. е. решений задачи при заданных τ_0 и $\langle \rho \rangle$) и максималей (решений при заданных V и $\langle \rho \rangle$) аналогично поведению кривых на фиг. 7, а, б, соответственно. В случае, когда зазоры весьма узкие ($k \rightarrow 1$), из (5.7), следует, что распределение концентрации суспензии при заданных τ_0 и $\langle \rho \rangle$ стремится к равномерному.

Течение и распределение концентрации в плоском потоке Куэтта нетрудно получить из (5.5) и (5.6), переходя к пределу при $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 \rightarrow -R_1 = h = \text{const}$, $r - R_1 = y = \text{const}$. Для минимали из (5.6) имеем

$$z_1(y) = \lim z_0(x) = \langle z \rangle, \quad R_1 \rightarrow \infty, \quad r - R_1 = \text{const} \quad (5.8)$$

Для максимали получим из (5.5)

$$z_2(y) = \lim z_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq \langle z \rangle, \\ 0, & \langle z \rangle < y \leq 1 \end{cases}, \quad R_1 \rightarrow \infty, \quad r - R_1 = \text{const} \quad (5.9)$$

Следует заметить, что непосредственное исследование максимали в плоском куэтовом потоке показывает, что существует континуум функций $\{z_0(y)\} \in L(0, 1)$, доставляющих максимум соответствующему функционалу при условиях типа (5.3), (5.4). Эти функции представляются выражениями

$$z_0(y) = \begin{cases} 0, & y \in E, \text{ mes } E = 1 - \langle z \rangle \\ 1, & y \in [0, 1] / E = E', \text{ mes } E' = \langle z \rangle \end{cases} \quad (5.10)$$

Доказательство этого факта следует из того, что максималы $z \in C'$ может принимать значения нуль или единица (это следует из исследования уравнения Эйлера для данной задачи), а также из инвариантности функционала (5.2) при $k = 0$ по отношению к сдвигу.

Далее, поскольку $z_0 \in L$ есть предел в среднем ступенчатых функций $z_k \in C'$, имеющих значение либо нуль, либо единица, а аналог леммы 5.1 и теоремы 5.1 для

плоского куэттова течения не имеет места, получаем доказательство формулы (5.10).

§ 6. Обсуждение. Изложенные результаты показывают, что в реологическом отношении суспензия не может рассматриваться как некая обычная жидкость. В частности, она не обладает такой однозначной структурной константой, как вязкость, ибо различные вискозиметрические эксперименты могут, как это показано выше, привести к получению совершенно различных вязкостных зависимостей. Это обстоятельство (неинвариантность реологических кривых относительно типа вискозиметрического эксперимента) неоднократно отмечалось в литературе. Существен также эффект расслоения суспензий при их течениях. Необходимо отметить, что прямое экспериментальное подтверждение полученных в работе результатов в настоящее время отсутствует. Тем не менее, многие экспериментальные данные косвенно свидетельствуют о существовании такого рода эффектов: пристеночный эффект при движении суспензий, отмечаемый различными авторами, неравномерное распределение концентрации эритроцитов в плазме крови при движении по сосудам и др. Авторам известны также опыты Г. В. Виноградова с равноплотными суспензиями мыл в различных органических жидкостях, проведенные на капиллярном вискозиметре постоянных давлений. В этих опытах в центре капилляра наблюдалась область, занятая преимущественно жидкой фазой, а частицы оттеснялись к стенкам капилляра.

Заметим, что использованная модель окажется, по-видимому, полезной при исследовании движений неравноплотных суспензий (пульп и т. п.), которые играют весьма важную роль в ряде областей народного хозяйства (нефтяная промышленность, гидротехника, химическая технология и др.).

В заключение авторы благодарят Ю. П. Гупало и В. Н. Калашникова за плодотворное обсуждение затронутых в работе вопросов.

Поступила 18 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, № 3, стр. 261.
2. Jeffrey R. C., Pearson J. R. A. Particle Motion in Laminar Vertical Tube Flow, J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, № 4, p. 721.
3. Бувевич Ю. А. Двухжидкостная гидродинамика взвешенного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. К., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. Изд-во иностр. лит., 1960.