УДК 551.46.45

К ТЕОРИИ БАРОТРОПНЫХ ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

А. А. Зайцев, А. И. Руденко

"Калининградский государственный технический университет" —
Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота,
236035 Калининград, Россия
E-mails: zaitsev.anatoli@mail.ru, alex-rudenko@bk.ru

С использованием прямоугольной и полярной систем координат исследованы баротропные геострофические течения. Показано, что для анализа геострофических течений с радиальной симметрией использование полярной системы координат предпочтительнее. Получены соотношения между гидродинамическими характеристиками, в том числе выражения составляющих скорости частиц жидкости и завихренности через давление. Установлено, что в случае стационарных баротропных течений изобаты совпадают с линиями тока. Рассмотрены стационарные радиально-симметричные геострофические течения.

Ключевые слова: стационарные баротропные геострофические течения, вихрь, циклон, антициклон, радиальная и тангенциальная составляющие скорости частиц жидкости, распределение давления, функция тока, точечные вихри.

DOI: 10.15372/PMTF20190509

Введение. Теория вихревого движения создана в середине XIX в. В. Гельмгольцем [1]. Позднее У. Томсон сформулировал и доказал теорему о равенстве интегральной интенсивности вихревого движения и циркуляции скорости по замкнутому контуру, окружающему область вихревого движения [2–4]. Исследованию точечных (дискретных) вихрей посвящено множество работ (см., например, [5–10]).

Одним из важнейших видов вихревых движений являются геострофические течения, возникновение которых обусловлено наличием силы Кориолиса, связанной с вращением Земли. Геострофические течения оказывают значительное влияние на погоду, поэтому представляют интерес для геофизиков и синоптиков, что приводит к необходимости совершенствования теории геострофических течений.

В настоящей работе получены соотношения между гидродинамическими характеристиками, в том числе соотношение между скоростью частиц жидкости и давлением.

Для радиально-симметричных геострофических течений выполнен расчет интегральной интенсивности (по формуле Гельмгольца). В качестве примера рассмотрено геострофическое течение с локализованной завихренностью.

Уравнения стационарного баротропного геострофического течения в декартовой и полярной системах координат. Уравнения стационарного баротропного геострофического течения в декартовой системе координат имеют вид

$$-\rho f v^* + p_x = 0, \qquad \rho f u^* + p_y = 0, \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости, полагаемая постоянной; f — параметр Кориолиса; u^*, v^* — составляющие скорости частиц жидкости вдоль осей абсцисс и ординат (зональная и меридиональная компоненты скорости); p — давление.

Для вывода уравнений стационарного баротропного геострофического течения в полярной системе координат используем уравнения системы (1), выражения составляющих скорости частиц жидкости вдоль осей абсцисс и ординат через радиальную и тангенциальную составляющие скорости, а также выражения для производных r_x, r_y, φ_x, φ_y.

Ограничимся преобразованием левой части первого уравнения системы (1), поскольку преобразование левой части второго уравнения (1) аналогично.

Систему уравнений стационарного баротропного геострофического течения в полярной системе координат получаем следующим образом:

$$u^* = \cos\varphi\ u - \sin\varphi\ v, \quad v^* = \sin\varphi\ u + \cos\varphi\ v, \quad \varphi_x = -r^{-1}\sin\varphi, \quad \varphi_y = r^{-1}\cos\varphi,$$

$$p_x = p_r r_x + p_\varphi \varphi_x = \cos\varphi\ p_r - r^{-1}\sin\varphi\ p_\varphi, \qquad p_y = p_r r_y + p_\varphi \varphi_y = \sin\varphi\ p_r + r^{-1}\cos\varphi\ p_\varphi.$$

Преобразуя левые части уравнений (1), получаем равенства

$$-\rho f v^* + p_x = -\sin\varphi\ \rho f u - \cos\varphi\ \rho f v + \cos\varphi\ p_r - r^{-1}\sin\varphi\ p_\varphi,$$

$$\rho f u^* + p_y = \cos\varphi\ \rho f u - \sin\varphi\ \rho f v + \sin\varphi\ p_r + r^{-1}\cos\varphi\ p_\varphi.$$

Используя равенства для левых частей уравнений (1)

$$\cos\varphi\ (-\rho f v^* + p_x) + \sin\varphi\ (\rho f u^* + p_y) = -\rho f v + p_r,$$

$$-\sin\varphi\ (-\rho f v^* + p_x) + \cos\varphi\ (\rho f u^* + p_y) = \rho f u + r^{-1} p_\varphi,$$

получаем систему уравнений стационарного баротропного геострофического течения в полярной системе координат в окончательном виде:

$$-\rho f v + p_r = 0, \qquad \rho f u + r^{-1} p_\varphi = 0. \tag{2}$$

Далее рассмотрим радиально-симметричные геострофические течения, в которых радиальная скорость течения равна нулю, а тангенциальная скорость зависит только от расстояния до центральной точки течения ($u = 0$, $v = v(r)$).

Из системы уравнений (2) следует, что для радиально-симметричных течений давление также зависит только от расстояния до центральной точки течения ($p = p(r)$).

Второе уравнение системы (2) в случае радиально-симметричных течений вырождается. Следовательно, в этом случае система уравнений стационарного баротропного геострофического течения в полярной системе координат сводится к единственному уравнению

$$-\rho f v(r) + p'(r) = 0. \tag{3}$$

Завихренность в полярной системе координат. Преобразуем выражение для завихренности ω двумерных течений в прямоугольной системе координат

$$\omega = u_y^* - v_x^*$$

к выражению для завихренности в полярной системе координат. При использовании стандартной методики замены независимых переменных получаем

$$\omega = u_y^* - v_x^* = (\cos\varphi\ u - \sin\varphi\ v)_y - (\sin\varphi\ u + \cos\varphi\ v)_x = (u_\varphi - (rv)_r)/r.$$

Таким образом, выражение для завихренности стационарного геострофического течения в полярной системе координат имеет вид

$$\omega = (u_\varphi - (rv)_r)/r.$$

В случае радиально-симметричного течения жидкости выражение для завихренности принимает вид

$$\omega = \omega(r) = -(rv)'/r. \tag{4}$$

Связь давления и функции тока. Соотношение, связывающее давление и функцию тока, несложно получить, выразив составляющие скорости через функцию тока:

$$u = \psi_\varphi/r, \qquad v = -\psi_r. \tag{5}$$

Из (2), (5) следуют уравнения

$$p_r = -\rho f \psi_r, \qquad p_\varphi = -\rho f \psi_\varphi. \tag{6}$$

Интегрируя систему (6), получаем соотношение, связывающее давление и функцию тока, в виде

$$p = -\rho f \psi. \tag{7}$$

Из равенства (7) следует

Утверждение 1. *В стационарных баротропных геострофических течениях изобары совпадают с линиями тока.*

Стационарные радиально-симметричные геострофические течения. В стационарных радиально-симметричных геострофических течениях частицы жидкости движутся по концентрическим окружностям, радиальная составляющая скорости равна нулю ($u = 0$), тангенциальная компонента скорости, давление и функция тока зависят только от расстояния до центральной точки семейства круговых движений геострофического течения: $v = v(r)$, $p = p(r)$.

Большую роль играет соотношение (3), связывающее давление $p = p(r)$ и тангенциальную составляющую скорости $v(r)$. Его следствием является

Утверждение 2. *В Северном и Южном полушариях циклон является областью пониженного давления, антициклон — областью повышенного давления.*

Доказательство. Поскольку в Северном полушарии параметр Кориолиса положителен ($f > 0$), из соотношения (3) следует, что знаки тангенциальной составляющей скорости и производной давления совпадают. Так как в Северном полушарии в циклоне тангенциальная составляющая скорости положительна, то давление увеличивается в направлении от ядра циклона к его периферии. Это означает, что циклон является областью пониженного давления.

В Южном полушарии параметр Кориолиса отрицателен ($f < 0$), поэтому из соотношения (3) следует, что знаки тангенциальной составляющей скорости и производной давления противоположны. Так как в Южном полушарии в циклоне тангенциальная составляющая скорости отрицательна, давление увеличивается в направлении от ядра циклона к его периферии. Это означает, что циклон в Южном полушарии, как и в Северном, является областью пониженного давления.

Замечание 1. В случае циклона преобладает пасмурная погода с сильными ветрами, поскольку понижение давления сопровождается уменьшением температуры (в соответствии с уравнением состояния газа Клапейрона — Менделеева).

Замечание 2. Замечание 1 справедливо только для умеренных широт, где эффект Кориолиса значителен. В экваториальной области этот эффект ослабляется и большое значение приобретает бета-эффект, обусловленный увеличением градиента параметра Кориолиса. Поэтому в экваториальной зоне отсутствуют циклон и антициклон, а ветрами являются слабые пассаты.

Интегральная интенсивность вихревых течений. Основной характеристикой геострофических и других вихревых течений является интегральная интенсивность [1]. Согласно работе [1] в случае вихревого движения, быстро замедляющегося на бесконечности, интегральная интенсивность определяется по формуле

$$k = 2\pi \int\limits_{0}^{+\infty} r\omega(r)\, dr,$$

которая используется для расчета интегральной интенсивности одного семейства двумерных вихрей.

Дельтообразная последовательность функций. Рассмотрим геострофические течения, создаваемые локализованным двумерным вихрем и двумерным точечным вихрем. Для этого используем специальную дельтообразную последовательность.

Определение понятия дельтообразной последовательности дается в общем случае для пространства $\mathbb{R}^n$, затем конкретизируется для двумерных радиально-симметричных функций.

Определение 1. Семейство гладких функций $\{\delta_a(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqslant a < +\infty\}$ называется дельтообразной последовательностью, если выполняются три условия:

$$\lim_{a\to+\infty} \delta_a(0) = +\infty, \qquad \lim_{a\to+\infty} \delta_a(x) = 0, \quad x \neq 0, \qquad \lim_{a\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\, dx = 1.$$

Из определения 1 следует

Утверждение 3. *Для каждой дельтообразной последовательности* $\{\delta_a(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$ $0 \leqslant a < +\infty\}$ *справедливо предельное равенство*

$$\lim_{a\to+\infty} \delta_a(x) = \delta(x)$$

($\delta(x)$ — *дельта-функция Дирака*).

Замечание 3. Определение 1 для двумерного случая эквивалентно следующему определению.

Определение 2. Семейство гладких функций $\{\delta_a(r),\ 0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant a < +\infty\}$ называется дельтообразной последовательностью двумерных радиально-симметричных функций, если выполняются три условия:

$$\lim_{a\to+\infty} \delta_a(0) = +\infty, \qquad \lim_{a\to+\infty} \delta_a(r) = 0, \quad r > 0, \qquad 2\pi \lim_{a\to+\infty} \int\limits_{0}^{+\omega} r\delta_a(r)\, dr = 1.$$

Приведем пример дельтообразной последовательности двумерных радиально-симметричных функций.

Утверждение 4. *Семейство гладких функций*

$$\delta_a(r) = \frac{(n-1)a^{2(n-1)}}{\pi(r^2+a^2)^n}, \qquad n > 1, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant a < +\infty \tag{8}$$

является дельтообразной последовательностью двумерных радиально-симметричных функций.

Для того чтобы доказать утверждение 4, нужно проверить выполнение для семейства функций (8) трех условий, указанных в определении 2.

Геострофическое течение, создаваемое локализованным двумерным вихрем. Рассмотрим семейство стационарных радиально-симметричных геострофических течений, в которых распределение завихренности имеет вид

$$\omega(r) = k\delta_a(r) \tag{9}$$

($\delta_a(r)$ — дельтообразная последовательность, для которой справедливо выражение (8)).

Используя выражение (9) для завихренности $\omega = \omega(r)$ и соотношение (4), связывающее завихренность и тангенциальную составляющую скорости, получаем выражение для тангенциальной составляющей скорости рассматриваемого геострофического течения:

$$v(r) = \frac{ka^{2(n-1)}}{2\pi r(r^2 + a^2)^{n-1}}, \qquad n > 1, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant a < +\infty. \tag{10}$$

Из выражения (10) следует, что тангенциальная компонента скорости является положительной. Следовательно, рассматриваемое геострофическое течение представляет собой циклон. Как и предполагалось, скорость в центре циклона бесконечна.

Для того чтобы получить выражения для распределения давления $p = p(r)$ в рассматриваемом геострофическом течении, используем соотношение $-\rho f v(r) + p'(r) = 0$, а также выражение (10).

Ограничимся расчетом для двух случаев ($n = 2$, 3). В результате для давления получаем выражения

$$p(r) = \frac{k\rho f}{4\pi} \ln \frac{r^2}{r^2 + a^2}, \qquad n = 2,$$

$$p(r) = \frac{k\rho f}{4\pi} \Big(\ln \frac{r^2}{r^2 + a^2} + \ln \frac{a^2}{r^2 + a^2} \Big), \qquad n = 3,$$

которые показывают, что в обоих случаях с увеличением расстояния r давление, обусловленное распределением завихренности (9), увеличивается от $-\infty$ до нуля. Следовательно, в этих случаях геострофическое течение является циклоном.

Геострофическое течение, создаваемое двумерным точечным вихрем. Рассмотрим случай, когда в выражении (9) $a \to 0$. В соответствии с формулами (8)–(10) в этом случае для завихренности справедливо выражение

$$\omega(r) = k\delta(x, y), \tag{11}$$

где $\delta(x, y)$ — дельта-функция Дирака. Это означает, что вихрь, порождающий рассматриваемое геострофическое течение, стягивается в точку.

Получим значения тангенциальной составляющей скорости и распределение давления в геострофическом течении с завихренностью, описываемой (11).

Уравнения завихренности и несжимаемости в декартовой системе координат принимают вид

$$u_x^* + v_y^* = 0, \qquad u_y^* - v_x^* = k\delta(x, y).$$

Следствием этих уравнений являются уравнения для горизонтальной и вертикальной составляющих скорости частиц жидкости:

$$u_{xx}^* + u_{yy}^* = k\delta_y(x, y), \qquad v_{xx}^* + v_{yy}^* = -k\delta_x(x, y).$$

Используя фундаментальную функцию двумерного оператора Лапласа [11, 12]

$$E(r) = -(2\pi)^{-1} \ln r,$$

получаем выражения для составляющих вдоль осей x и y скорости геострофического течения, порожденного двумерным точечным вихрем:

$$u^* = kE_y(r) = -ky/(2\pi r), \qquad v^* = -kE_x(r) = kx/(2\pi r). \tag{12}$$

Из формул (12) получаем выражение для тангенциальной составляющей скорости геострофического течения

$$v = k/(2\pi r). \tag{13}$$

Это известное выражение можно также получить из теоремы Томсона о равенстве интегральной интенсивности вихря и циркуляции скорости по контуру, окружающему вихревую область [2–4].

Таким образом, теория обобщенных функций подтверждает правильность выражения (13) для тангенциальной составляющей скорости геострофического течения.

Из выражения (13) и соотношения (3) для радиально-симметричного течения получаем распределение давления в рассматриваемом геострофическом течении:

$$p = \frac{k\rho f}{2\pi r} \ln \frac{r}{a}. \tag{14}$$

Из соотношения (14) следует, что при $r = 0 \div +\infty$ давление монотонно увеличивается от $-\infty$ до $+\infty$.

Заключение. В работе показано, что теория геострофических течений связана с теорией двумерных точечных вихрей. Это можно использовать для развития теории геострофических течений, порожденных двумерными точечными вихрями, путем анализа динамики систем этих вихрей и их взаимодействия, а также поведения давления в геострофических течениях. В стандартной теории двумерных точечных вихрей формулы для давления отсутствуют.

Развить теорию геострофических течений можно также, исследуя порожденное точечным вихрем течение вблизи морских берегов [13] с использованием распределения давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гельмгольц Г.** Основы вихревой теории. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.
2. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
3. **Пуанкаре А.** Теория вихрей. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр “Регуляр. и хаотич. динамика”, 2000.
4. **Козлов В. В.** Общая теория вихрей. М.: Науч. мир, 2000.
5. **Богомолов В. А.** О двумерной гидродинамике на сфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 1. С. 23–36.
6. **Гряник В. М.** Динамика сингулярных геострофических вихрей в двухуровенной модели атмосферы (океана) // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19, № 3. С. 227–240.
7. **Курганский М. В.** Введение в крупномасштабную динамику атмосферы. СПб.: Гидрометеоиздат, 1993.
8. **Aref H.** The motion of three vorteces // Phys. Fluids. 1979. V. 23, N 3. P. 393–400.

9. **Aref H., Kadtke J. B., Zawadzki I., et al.** Point vortex dynamics: recent results and open problems // Fluid Dynamics Res. 1988. V. 3. P. 63–70.
10. **Монин А. С.** Изменчивость Мирового океана / А. С. Монин, В. М. Каменкович, В. Г. Корт. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
11. **Шварц Л.** Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
12. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
13. **Зайцев А. А., Руденко А. И.** Влияние границ различной формы на динамику вихрей // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 6. С. 25–34.

Поступила в редакцию 13/VII 2018 г.,
после доработки — 7/III 2019 г.
Принята к публикации 25/III 2019 г.