УДК 620.170.5; 539.4

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ НАКЛОННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДЕФЕКТА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ

А. А. Остсемин, П. Б. Уткин*

ООО "Южно-Уральский научно-производственный центр", 450019 Челябинск
* Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск
E-mail: shum@math.susu.ac.ru

Рассматривается задача определения напряженного состояния пластины с наклонным эллиптическим вырезом при двухосном нагружении. Методом Колосова — Мусхелишвили получено выражение для напряжений вблизи вершины наклонного эллипса, из которого в частном случае получаются выражения для напряжений в случае наклонной трещины. Методом голографической интерферометрии экспериментально определены коэффициенты интенсивности напряжений $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$ в случае растяжения пластины с наклонным трещиноподобным дефектом. Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: механика разрушения, коэффициенты интенсивности напряжений, метод Колосова — Мусхелишвили, напряженное состояние, пластина с наклонным эллиптическим вырезом, метод голографической интерферометрии.

Введение. Критерии предельного разрушения можно разделить на простые и сложные. К числу простых относятся критерии, учитывающие только сингулярную составляющую напряжений и выражающиеся через коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Сложными являются критерии, полученные в результате уточненного анализа напряженного состояния (НС) вблизи вершин трещиноподобного дефекта и учитывающие регулярную составляющую напряжений [1]. В случае коррозионных притупленных трещин дефект моделируется эллиптическим вырезом. Наиболее распространенным и обоснованным является подход, в соответствии с которым характеристики НС необходимо определять не в самой вершине трещины, а на некотором расстоянии r_0 от нее [1, 2]. С использованием сложных критериев предельного равновесия наклонной трещины [1] методом голографической интерферометрии [3] получены экспериментальные данные, лучше согласующиеся с результатами теоретических исследований [1]. Погрешность составила 4,7 %.

В работе [1] получено более точное выражение для функции Вестергаарда, содержащейся в сингулярном решении для наклонной трещины при двухосном нагружении пластины. Данное приближенное двухкомпонентное решение является достаточно точным. В [2] приведено точное решение задачи для тензора напряжений на плоскости с наклонной трещиной при двухосном нагружении, полученное с помощью выражений для комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ [4]. В [2] определена относительная погрешность суммы $\sigma_1 + \sigma_2$ и разности $\sigma_1 - \sigma_2$ главных напряжений, полученных с использованием обоих методов. Влияние двухосного нагружения ε на компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ исследовано методом Колосова — Мусхелишвили [4]. В работе [5] представлены картины изохром и приведен обзор методов фотоупругости для пластины с наклонной трещиной. В данной работе обобщаются результаты работы [2] для пластины с эллиптическим вырезом при двухосном нагружении пластины. Получены выражения для компонент тензора напряжений, изучено влияние параметра эллипса m при двухосном нагружении пластины с наклонным эллиптическим вырезом и приведены результаты экспериментальных исследований, полученные методом голографической интерферометрии.

Методы механики разрушения позволяют определить сопротивляемость металла сварного соединения разрушению при наличии в нем трещин. Однако особенность сварных соединений состоит в том, что в них имеются концентраторы напряжений (поры, непровары, несплавления, подрезы, шлаковые включения) с достаточно малыми радиусами $\rho = 0{,}01 \div 0{,}10$ мм, которые могут привести к разрушению сварных конструкций [6]. Непосредственное использование положений механики разрушения при изучении концентрации напряжений, характерной для сварных швов, некорректно [7].

Обзор критериев, результаты анализа их применимости при расчете предельного равновесия и траектории роста трещин, произвольно ориентированных в поле действующих на тело напряжений, а также значения предельного радиуса ρ_0 приведены в [8].

Целью настоящей работы является теоретическое определение НС и КИН в случае наклонного эллиптического выреза при двухосном нагружении пластины.

1. Напряжения в случае эллиптического отверстия при двухосном нагружении пластины. Рассматривается напряженное состояние пластины с наклонным эллиптическим вырезом, подвергнутой двухосному нагружению. На рис. 1 приведена схема рассматриваемой задачи. Согласно формулам Колосова — Мусхелишвили [4] в плоских задачах теории упругости компоненты тензора напряжений связаны соотношениями [4]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\,), \qquad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2(\overline{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)) \tag{1.1}$$

($z = x + iy$ — комплексная переменная).

Комплексные потенциалы $\varphi(z)$, $\psi(z)$ представим в виде суммы [4]

$$\varphi(z) = \Gamma z + \tilde{\varphi}(z), \qquad \psi(z) = \Gamma' z + \tilde{\psi}(z), \tag{1.2}$$

где $\Gamma = (1+\varepsilon)\sigma/4$; $\Gamma' = (1-\varepsilon)\sigma\,\mathrm{e}^{-2i\beta}/2$; ε — параметр двухосности нагружения, равный отношению главных напряжений на бесконечности; σ — номинальное напряжение вдоль

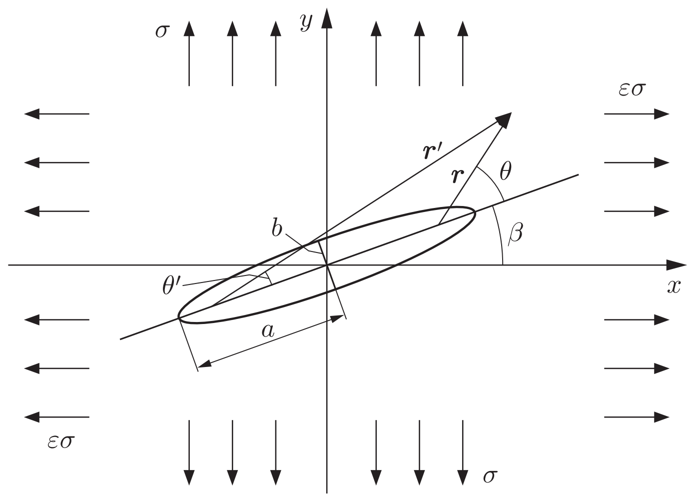

Рис. 1. Схема задачи о наклонном эллиптическом вырезе в пластине, подвергнутой двухосному нагружению

оси y; β — угол между осью дефекта и осью x, соответствующей первому главному напряжению (см. рис. 1). Определения коэффициентов Γ и Γ' приведены в [4]. Функции $\tilde\varphi$, $\tilde\psi$ голоморфны в окрестности бесконечности, и $\tilde\varphi$ равна нулю на бесконечности.

Используя конформную замену координат, перейдем к новой переменной ζ с помощью преобразования

$$z = R(\zeta + m/\zeta) = \omega(\zeta). \qquad (1.3)$$

Значения R, m являются параметрами эллипса и связаны с длинами полуосей a, b соотношениями

$$R = \frac{a+b}{2}, \qquad m = \frac{a-b}{a+b}.$$

Данное преобразование переводит часть плоскости вне эллипса в плоскость вне единичной окружности с центром в начале координат.

С учетом (1.3) выражения (1.2) для функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ запишем в следующем виде:

$$\varphi(\zeta) = \Gamma R\zeta + \Big[\Gamma\,\frac{Rm}{\zeta} + \tilde\varphi\Big(R\Big(\zeta + \frac{m}{\zeta}\Big)\Big)\Big], \quad \psi(\zeta) = \Gamma' R\zeta + \Big[\Gamma'\,\frac{Rm}{\zeta} + \tilde\psi\Big(R\Big(\zeta + \frac{m}{\zeta}\Big)\Big)\Big]. \qquad (1.4)$$

С использованием теории вычетов и формул (1.4) для комплексных потенциалов получим

$$\varphi(\zeta) = \Gamma R\Big(\zeta - \frac{m}{\zeta}\Big) - \frac{\overline{\Gamma'}\,R}{\zeta} = \frac{R\sigma}{4}\Big[(1+\varepsilon)\Big(\zeta - \frac{m}{\zeta}\Big) - \frac{2(1-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2i\beta}}{\zeta}\Big],$$

$$\psi(\zeta) = \frac{R}{m}\Big(m\Gamma'\zeta + \frac{\overline{\Gamma'}}{\zeta}\Big) - \frac{(1+m^2)\zeta}{m(\zeta^2 - m)}\,(2\Gamma Rm + \overline{\Gamma'}\,R) =$$

$$= \frac{R\sigma}{2m}\Big((1-\varepsilon)\,\frac{m\,\mathrm{e}^{-2i\beta}\,\zeta^2 + \mathrm{e}^{2i\beta}}{\zeta} - ((1-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2i\beta} + (1+\varepsilon)m)(1+m^2)\,\frac{\zeta}{\zeta^2 - m}\Big).$$

С учетом (1.3) комплексные потенциалы $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ запишем в следующем виде:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4m}\Big\{-(1-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2i\beta}\,z + \big[m(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2i\beta}\big]\sqrt{z^2 - d^2}\,\Big\},$$

$$\psi(z) = \frac{\sigma}{2}\Big((1-\varepsilon)\,\frac{\mathrm{e}^{2i\beta} + \mathrm{e}^{-2i\beta}\,m^2}{2m^2}\,z - (1-\varepsilon)\,\frac{\mathrm{e}^{2i\beta} - \mathrm{e}^{-2i\beta}\,m^2}{2m^2}\,\sqrt{z^2 - d^2} -$$

$$- \big[m(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2i\beta}\big]\,\frac{1+m^2}{m(1+m)^2}\,\frac{a^2}{\sqrt{z^2 - d^2}}\Big)$$

(d — фокусное расстояние эллипса: $d^2 = a^2 - b^2$).

Для упрощения вычислений используем комплексные функции $\Phi(z) = \varphi'(z)$ и $\Psi(z) = \psi'(z)$, которые являются производными комплексных потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{4m}\Big(-(1-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2i\beta} + \big[m(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2i\beta}\big]\,\frac{z}{\sqrt{z^2 - d^2}}\Big),$$

$$\Psi(z) = \frac{\sigma}{2}\Big((1-\varepsilon)\,\frac{\mathrm{e}^{2i\beta} + \mathrm{e}^{-2i\beta}\,m^2}{2m^2} - (1-\varepsilon)\,\frac{\mathrm{e}^{2i\beta} - \mathrm{e}^{-2i\beta}\,m^2}{2m^2}\,\frac{z}{\sqrt{z^2 - d^2}} + \qquad (1.5)$$

$$+ \big[m(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)\,\mathrm{e}^{2i\beta}\big]\,\frac{1+m^2}{m(1+m)^2}\,\frac{a^2 z}{(z^2 - d^2)^{3/2}}\Big).$$

В случае центральной линейной трещины ($m = 1$) при $\beta = 0^\circ$ функция Вестергаарда с использованием выражения (1.5) для функции $\Phi(z)$ записывается в виде

$$2\varphi'(z) = 2\Phi(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)\sigma.$$

Ранее это выражение было получено в [1, 2].

Для вычисления тензора напряжений используем формулы, следующие из (1.1):

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\,) = 4\,\mathrm{Re}\,(\Phi(z)), \qquad \sigma_x - \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)),$$
$$\tau_{xy} = \mathrm{Im}\,(\overline{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)).$$

Для записи компонент тензора напряжений в вершине дефекта произведем замены переменных:

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} + d = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'} - d, \qquad 2d = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'} - r\,\mathrm{e}^{i\theta}, \qquad rr' = |z^2 - d^2|. \tag{1.6}$$

С учетом (1.6) комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ с использованием (1.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= -A_0(\cos 2\beta + i\sin 2\beta) + (A_1 + iA_2)\,\frac{r\cos\theta + d + ir\sin\theta}{\sqrt{rr'}}\Big(\cos\frac{\theta + \theta'}{2} - i\sin\frac{\theta + \theta'}{2}\Big),\\
\Psi(z) &= A_0\,\frac{1 + m^2}{m}\,\cos 2\beta + iA_0\,\frac{1 - m^2}{m}\,\sin 2\beta -\\
&- A_0\,\frac{r\cos\theta + d + ir\sin\theta}{\sqrt{rr'}}\Big(\frac{1 - m^2}{m}\,\cos 2\beta + i\,\frac{1 + m^2}{m}\sin 2\beta\Big)\Big(\cos\frac{\theta + \theta'}{2} - i\sin\frac{\theta + \theta'}{2}\Big) +\\
&+ 2(A_1 + iA_2)a^2B_1\,\frac{r\cos\theta + d + ir\sin\theta}{(rr')^{3/2}}\Big(\cos\frac{3(\theta + \theta')}{2} - i\sin\frac{3(\theta + \theta')}{2}\Big),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$A_0 = \frac{\sigma(1 - \varepsilon)}{4m}, \qquad A_1 = \frac{\sigma[m(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon)\cos 2\beta]}{4m},$$
$$A_2 = \frac{\sigma(1 - \varepsilon)\sin 2\beta}{4m}, \qquad B_1 = \frac{1 + m^2}{(1 + m)^2}.$$

Производная комплексного потенциала $\Phi'(z)$ равна

$$\Phi'(z) = -(A_1 + iA_2)a^2B_2\,\frac{1}{(rr')^{3/2}}\Big(\cos\frac{3(\theta + \theta')}{2} - i\sin\frac{3(\theta + \theta')}{2}\Big), \tag{1.8}$$

где $B_2 = d^2/a^2 = 4m/(1 + m)^2$.

С использованием (1.7), (1.8) выражения для суммы $\sigma_x + \sigma_y$ и разности $\sigma_x - \sigma_y$ нормальных напряжений и касательного напряжения τ_{xy} можно записать в следующем виде:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4A_1F_1 - 4A_0\cos 2\beta - 4A_2F_2; \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y - \sigma_x = 2A_0\,\frac{1 + m^2}{m}\,\cos 2\beta + \frac{4a^2r\sin\theta}{(rr')^{3/2}}\,G_1 - 2A_0F_1\,\frac{1 - m^2}{m}\,\cos 2\beta +\\
+ 2A_0F_2\,\frac{1 + m^2}{m}\,\sin 2\beta + (r\cos\theta + d)\,\frac{4a^2}{(rr')^{3/2}}\,\frac{(1 - m)^2}{(1 + m)^2}\,G_2;
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\tau_{xy} = A_0\,\frac{1-m^2}{m}\,\sin 2\beta + 2r\sin\theta\,\frac{a^2}{(rr')^{3/2}}\,G_2 - A_0F_2\,\frac{1-m^2}{m}\,\cos 2\beta -$$
$$- A_0F_1\,\frac{1+m^2}{m}\,\sin 2\beta - 2(r\cos\theta + d)\,\frac{a^2}{(rr')^{3/2}}\,\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2}\,G_1. \qquad (1.11)$$

Здесь

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{rr'}}\Big((r\cos\theta + d)\,\cos\frac{\theta+\theta'}{2} + r\sin\theta\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\Big),$$
$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{rr'}}\Big(-(r\cos\theta + d)\,\sin\frac{\theta+\theta'}{2} + r\sin\theta\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\Big),$$
$$G_1 = A_1\sin\frac{3(\theta+\theta')}{2} - A_2\cos\frac{3(\theta+\theta')}{2}, \qquad G_2 = A_1\cos\frac{3(\theta+\theta')}{2} + A_2\sin\frac{3(\theta+\theta')}{2}.$$

Из соотношений (1.9), (1.10) получаем компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y:

$$\sigma_x = A_0\cos 2\beta\Big(-\frac{(1-m)^2}{m} - 4\Big) + \Big(2A_1 + A_0\,\frac{1-m^2}{m}\cos 2\beta\Big)F_1 + A_2F_2\Big(-\frac{(1-m)^2}{m} - 4\Big) -$$
$$- (r\cos\theta + d)\,\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\,\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2}\,G_2 - r\sin\theta\,\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\,G_1,$$
$$\sigma_y = A_0\,\frac{(1-m)^2}{m}\,\cos 2\beta + \Big(2A_1 - A_0\,\frac{1-m^2}{m}\,\cos 2\beta\Big)F_1 + A_2F_2\,\frac{(1-m)^2}{m} +$$
$$+ (r\cos\theta + d)\,\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\,\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2}\,G_2 + r\sin\theta\,\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\,G_1. \qquad (1.12)$$

Из (1.6) следует

$$r'\cos\theta' = 2d + r\cos\theta, \qquad r'\sin\theta' = r\sin\theta.$$

Таким образом, координаты r', θ' выражаются через r, θ и формулы (1.11), (1.12) зависят лишь от r, θ.

В случае трещин при $m = 1$ соотношения (1.11), (1.12) соответствуют выражениям для напряжений, приведенным в [2].

2. Коэффициенты интенсивности напряжений в случае наклонного трещиноподобного дефекта при двухосном нагружении. Используя алгоритм работ [9, 10] и соотношение (1.5) для $\Phi(z)$, определим коэффициенты интенсивности напряжений:

$$K = K_{\rm I} - iK_{\rm II} = \lim_{z\to d}\,(2\sqrt{2\pi}\sqrt{z-d}\,\Phi(z)). \qquad (2.1)$$

Преобразуя (2.1) и выделяя вещественную и мнимую части, получим

$$K_{\rm I} = \sqrt[4]{\frac{4m}{(1+m)^2}}\,\Big(\sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma(m(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)\cos 2\beta)}{2m}\Big); \qquad (2.2)$$

$$K_{\rm II} = -\sqrt[4]{\frac{4m}{(1+m)^2}}\,\Big(\sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma(1-\varepsilon)\sin 2\beta}{2m}\Big). \qquad (2.3)$$

Следовательно,

$$A_1 = \frac{K_{\rm I}}{2\sqrt{\pi a}}\,\sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} = \frac{K_{\rm I}}{2\sqrt{\pi d}}, \qquad A_2 = -\frac{K_{\rm II}}{2\sqrt{\pi a}}\,\sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} = -\frac{K_{\rm II}}{2\sqrt{\pi d}}. \qquad (2.4)$$

С использованием (2.4), (1.11), (1.12) выражения для компонент тензора напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A_0 \cos 2\beta \left(\frac{(1-m)^2}{m} - 4 + \frac{1-m^2}{m} F_1\right) + \\
&\quad + \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \Big(2F_1 - \cos\frac{3(\theta+\theta')}{2}(r\cos\theta + d)\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} - \\
&\qquad\qquad - \sin\frac{3(\theta+\theta')}{2} r\sin\theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\Big) - \\
&\quad - \frac{K_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \Big[\Big(\frac{(1-m)^2}{m} - 4\Big)F_2 - \sin\frac{3(\theta+\theta')}{2}(r\cos\theta + d)\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \\
&\qquad\qquad + \cos\frac{3(\theta+\theta')}{2} r\sin\theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\Big], \\
\sigma_y &= A_0 \cos 2\beta \left(\frac{(1-m)^2}{m} - \frac{1-m^2}{m} F_1\right) + \\
&\quad + \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \Big(2F_1 + \cos\frac{3(\theta+\theta')}{2}(r\cos\theta + d)\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \\
&\qquad\qquad + \sin\frac{3(\theta+\theta')}{2} r\sin\theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\Big) - \\
&\quad - \frac{K_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \Big(\frac{(1-m)^2}{m}F_2 + \sin\frac{3(\theta+\theta')}{2}(r\cos\theta + d)\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} - \\
&\qquad\qquad - \cos\frac{3(\theta+\theta')}{2} r\sin\theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\Big), \\
\tau_{xy} &= -A_0 \cos 2\beta \frac{1-m^2}{m} F_2 - \\
&\quad - \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \Big(\sin\frac{3(\theta+\theta')}{2}(r\cos\theta + d)\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} - \\
&\qquad\qquad - \cos\frac{3(\theta+\theta')}{2} 2r\sin\theta \frac{a^2}{(rr')^{3/2}}\Big) - \\
&\quad - \frac{K_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \Big(\cos\frac{3(\theta+\theta')}{2}(r\cos\theta + d)\frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \\
&\qquad\qquad + \sin\frac{3(\theta+\theta')}{2} r\sin\theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} + \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} F_1\Big).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Отличие выражений (2.5) для компонент тензора напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} от формул, приведенных в [2], заключается в наличии новых дополнительных слагаемых с параметром эллиптического выреза m. В случае трещины эти слагаемые становятся равными нулю и получается решение Теокариса [2].

3. Экспериментальное определение КИН $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$ в случае наклонного эллиптического выреза методом голографической интерферометрии. В [3, 5] приведен обзор методов определения значений коэффициентов $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$ на оптически чувствительных пластинах с наклонной трещиной методами фотоупругости и голографической интерферометрии при одноосном растяжении. В соответствии с теорией Неймана и законом Гука, полагая деформации малыми, для тонкой пластины имеем зависимость между номерами N_1 и N_2 интерференционных полос на картинах абсолютных разностей хода (АРХ) и главными напряжениями σ_1 и σ_2 в виде соотношений [11]

$$N_1 = a_1\sigma_1 + b_1\sigma_2, \qquad N_2 = b_1\sigma_1 + a_1\sigma_2,$$

где $a_1 = 0{,}625$ полос/МПа, $b_1 = 0{,}453$ полос/МПа — оптические постоянные материала ЭД-20МПГФА, определяемые в тарировочном эксперименте [12]. Угол поляризации отсчитывается от вертикальной оси. В [12] подробно описана методика тарирования фотоупругого материала, обеспечивающая повышение точности определения постоянных a_1, b_1 за счет использования всех наблюдаемых интерференционных полос и исключающая операцию интерполирования при установлении номеров полос. Коэффициенты a_1, b_1 определялись из условия минимума среднеквадратичного отклонения их значений, полученных с использованием экспериментальных и теоретических полос. Использование методики [12] позволило уменьшить погрешность измерения напряжений с 26 до 12 % при той же точности обработки картин полос.

Картины АРХ удобнее обрабатывать вдоль оси трещиноподобного дефекта (наибольшее количество полос) при $\theta = 0$, $\theta' = 0$. Используя выражение для суммы главных напряжений $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$, из (1.9) получим

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{N_1 + N_2}{a_1 + b_1} = -4A_0 \cos 2\beta + 4A_1\,\frac{r+d}{\sqrt{r(r+2d)}}. \qquad (3.1)$$

Подставляя первое соотношение (2.4) в выражение (3.1), находим

$$K_{\rm I}^i = \sqrt{\pi d}\,\Big(\frac{N_{1i} + N_{2i}}{a_1 + b_1} + \frac{\sigma(1-\varepsilon)}{m}\,\cos{(2\beta)}\Big)\frac{\sqrt{r_i(r_i+2d)}}{2(r_i+d)}. \qquad (3.2)$$

Используя соотношение (1.10) для разности нормальных напряжений $\sigma_x - \sigma_y$, соотношение (1.11) для касательного напряжения τ_{xy} и формулу для максимального касательного напряжения $4\tau_{\max}^2 = (\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2$, получим соотношение между разностью номеров полос $N_1 - N_2$ и коэффициентами $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$

$$(\sigma_1^i - \sigma_2^i)^2 = \Big(\frac{N_{1i} - N_{2i}}{a_1 - b_1}\Big)^2 =$$

$$= \Big(2A_0\,\frac{1+m^2}{m}\,\cos 2\beta - 2A_0\,\frac{1-m^2}{m}\,\cos 2\beta\,\frac{r_i+d}{\sqrt{rr'}} + (r_i+d)\,\frac{4a^2}{(r_ir_i')^{3/2}}\,\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2}\,\frac{K_{\rm I}^i}{2\sqrt{\pi d}}\Big)^2 +$$

$$+ 4\Big[\frac{K_{\rm II}^i}{2\sqrt{\pi d}}\,\Big(2(r_i+d)\,\frac{a^2}{(r_ir_i')^{3/2}}\,\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m}\,\frac{r_i+d}{\sqrt{r_ir'}}\Big)\Big]^2, \qquad (3.3)$$

где $r' = r + 2d$; σ_1^i, σ_2^i — главные напряжения на оси выреза на расстоянии r_i от фокуса эллипса.

Из уравнения (3.3) с учетом выражения (3.2) для $K_{\rm I}$ получим соотношения для $K_{\rm II}$

$$K_{\rm II}^i = \frac{1}{|D|}\sqrt{\Big(\frac{N_{1i} - N_{2i}}{a_1 - b_1}\Big)^2 - C^2}. \qquad (3.4)$$

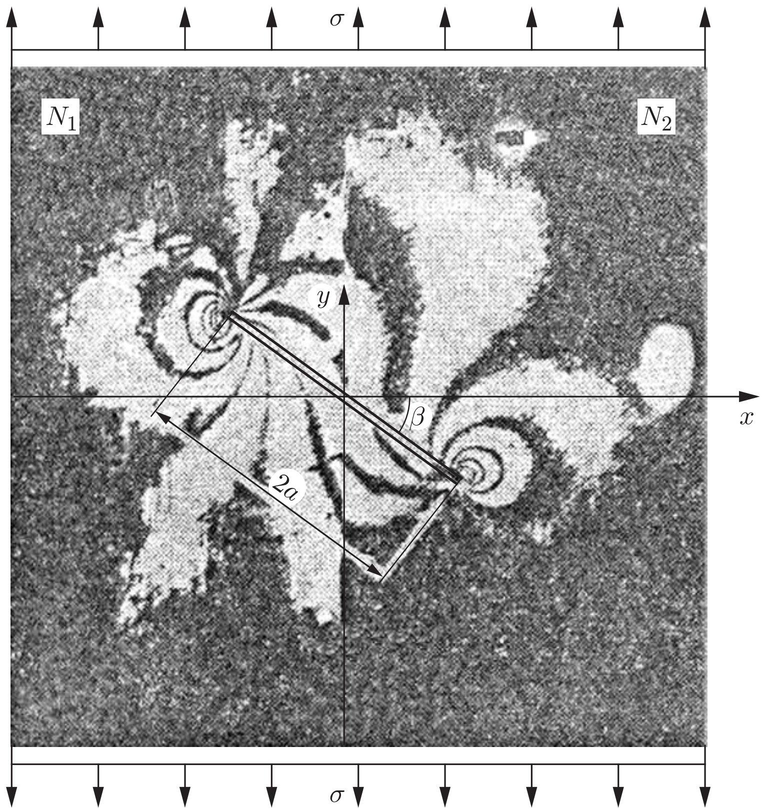

Рис. 2. Интерференционные картины АРХ при вертикальной и горизонтальной поляризациях опорного пучка

Здесь

$$C = \frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2m}\cos 2\beta\Big(\frac{1+m^2}{m} - \frac{1-m^2}{m}\,\frac{r_i+d}{\sqrt{r_i(r_i+2d)}}\Big) + \\ + (r_i+d)\,\frac{4a^2}{(r_i(r_i+2d))^{3/2}}\,\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2}\,\frac{K_{\rm I}^i}{2\sqrt{\pi d}},$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{\pi d}}\Big(2(r_i+d)\,\frac{a^2}{(r_i(r_i+2d))^{3/2}}\,\frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m}\,\frac{r_i+d}{\sqrt{r_i(r_i+2d)}}\Big).$$

Экспериментальная проверка теоретических формул (3.2), (3.4) для коэффициентов интенсивности напряжений $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$ проводилась с использованием результатов исследований, проведенных в [3, 13] методом голографической интерферометрии. Использовалась пластина с наклонным эллиптическим вырезом, подвергнутая одноосному растяжению (длина дефекта $2a = 13{,}4$ мм, ширина дефекта $b = 0{,}1$ мм, угол наклона дефекта $\beta = 32{,}5^\circ$, номинальное напряжение $\sigma = 2{,}1$ МПа, ширина пластины 96 мм). Для регистрации картин АРХ использовались голограммы сфокусированных изображений. Картины АРХ (рис. 2) получены методом двух экспозиций. В качестве источника света использовался лазер ЛГ-38. Оптическая схема и описание эксперимента приведены в [14].

С использованием методики определения КИН можно построить графики номеров полос N_1 и N_2 по картинам АРХ вдоль оси эллипса [15], определить значения N_{1i} и N_{2i} в точках r_i, вычислить $K_{\rm I}^i$ по выражению (3.2), построить график зависимости $K_{\rm I} = K_{\rm I}(r_i)$ с последующей экстраполяцией в вершину эллипса.

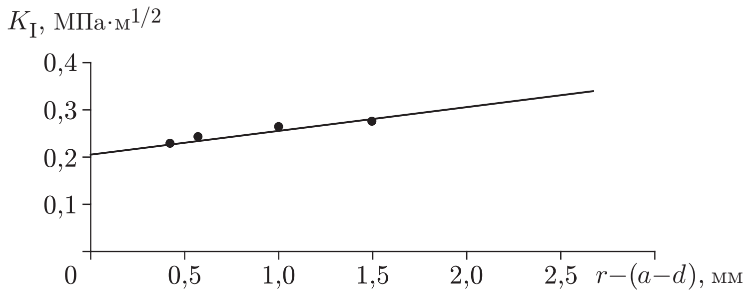

Рис. 3. Экспериментальная зависимость коэффициента интенсивности напряжений $K_{\rm I}$ от параметра $r - (a - d)$, полученная методом голографической интерферометрии

По сумме номеров интерференционных полос картин АРХ $N_1 + N_2$ с помощью (3.2) определено значение коэффициента интенсивности напряжения $K_{\rm I}$ и построен график зависимости $K_{\rm I}$ от расстояния $r_i - (a - d)$ от вершины надреза, причем параметры a, d определялись по длине и ширине трещины. Экспериментальные значения $K_{\rm I}$ аппроксимируются наклонной прямой (рис. 3). Аналогичный подход применялся в [13, 16].

С использованием полученных результатов вычислено значение $K_{\rm I}^{\rm э} = 0{,}211$ МПа $\cdot$ м$^{1/2}$ в соответствии с выражением (3.2). Данное экспериментальное значение $K_{\rm I}^{\rm э}$ согласуется с расчетным значением $K_{\rm I}^{\rm p} = 0{,}217$ МПа $\cdot$ м$^{1/2}$, полученным по формуле (2.2), с погрешностью, приближенно равной 2,7 % при $m = 0{,}97$. Экспериментальное значение $K_{\rm II}^{\rm э} = 0{,}139$ МПа $\cdot$ м$^{1/2}$, вычисленное по формуле (3.4), согласуется с расчетным значением $K_{\rm II}^{\rm p} = 0{,}142$ МПа $\cdot$ м$^{1/2}$, вычисленным по выражению (2.3), с погрешностью, равной 2,1 %.

Полученные результаты свидетельствуют о высокой точности определения значений КИН по предложенной методике при анализе картин полос АРХ в вершине эллиптического выреза.

При оценке сопротивляемости сварных соединений хрупкому разрушению при наличии наклонных технологических дефектов (непровар, шлаковые включения, несплавление) необходимо учитывать влияние радиуса в вершине дефекта и геометрические размеры дефекта для определения критериальных характеристик $K_{{\rm I}c}$ и значений коэффициентов интенсивности напряжения $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$.

Заключение. Таким образом, в работе методом Колосова — Мусхелишвили получены формулы для компонент тензора напряжений в окрестности вершины эллиптического отверстия, которые в частном случае вырождаются в соотношения для линейной трещины [2].

В случае наклонного эллиптического выреза экспериментальные значения $K_{\rm I}$, определенные методом голографической интерферометрии, согласуются с расчетными значениями с погрешностью, равной 2,7 %, а значения $K_{\rm II}$ — с погрешностью, равной 2,1 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Eftis J., Subramonian N.** The inclined crack under biaxial load // Engng Fracture Mech. 1978. V. 10, N 1. P. 43–67.
2. **Theocaris P. S., Michopoulos J. G.** A closed form solution of slant crack under biaxial loading // Engng Fracture Mech. 1983. V. 17, N 2. P. 97–123.
3. **Остсемин А. А.** Двухпараметрическое определение коэффициентов интенсивности напряжений для наклонной трещины методом голографической интерферометрии // Завод. лаб. 1991. № 12. С. 45–48.

4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. **Theocaris P. S., Spyropoulos C. P.** Photoelastic determination of complex stress intensity factors for slant crack under biaxial loading with higher-order term effects // Acta Mech. 1983. V. 48. P. 57–70.
6. **Винокуров В. А.** Сварные конструкции. Механика разрушения и критерии работоспособности / В. А. Винокуров, С. А. Куркин, Г. А. Николаев. М.: Машиностроение, 1996.
7. **Винокуров В. А.** Использование положений механики разрушения для оценки свойств сварных соединений // Свароч. пр-во. 1977. № 5. С. 2–4.
8. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991.
9. **Си Дж.** Математическая теория хрупкого разрушения. Т. 2. Разрушение / Дж. Си, Г. Либовиц. М.: Мир, 1975. С. 83–203.
10. **Парис П., Си Дж.** Анализ напряженного состояния около трещин // Прикладные вопросы вязкости разрушения. М.: Мир, 1968. С. 64–142.
11. **Александров А. Я.** Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела / А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов. М.: Наука, 1973.
12. **Остсемин А. А., Денискин С. А., Ситников Л. Л. и др.** Определение напряженного состояния тел с дефектами методом голографической фотоупругости // Пробл. прочности. 1982. № 10. С. 77–81.
13. **Остсемин А. А., Денискин С. А., Ситников Л. Л. и др.** Определение коэффициентов интенсивности напряжений для наклонной трещины методом голографической интерферометрии // Завод. лаб. 1987. № 12. С. 66–69.
14. **Ситников Л. Л., Остсемин А. А., Денискин С. А. и др.** Определение коэффициента интенсивности напряжений K_1 методом голографической фотоупругости // Завод. лаб. 1982. № 9. С. 81–83.
15. **Остсемин А. А., Денискин С. А., Ситников Л. Л.** Определение коэффициента интенсивности напряжений методами фотоупругого моделирования // Пробл. прочности. 1990. № 1. С. 33–37.
16. **Броек Д.** Основы механики разрушения. М.: Высш. шк., 1980.

Поступила в редакцию 21/IX 2007 г.,
в окончательном варианте — 11/VI 2008 г.