

4. Штокман В. Б. Избранные труды по физике моря. Л.: Гидрометеоиздат, 1970.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. — Успехи мат. наук, 1957, т. 12, № 5(77).
6. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.

Поступила 28/II 1984 г.

УДК 532.517

О РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

М. Б. Зельман, И. И. Масленникова

(Новосибирск)

Изучение механизмов нелинейного развития возмущений представляет важную задачу теории перехода к турбулентности.

В эксперименте [1] обнаружен субгармонический режим перехода, особенностями которого являются быстрое возбуждение субгармоники задающей частоты, заполнение низкочастотного спектра и формирование пространственного распределения уже при малых амплитудах возмущений. Некоторые особенности начальной стадии такого процесса могут быть объяснены [2] усилением волн Толлмина — Шлихтинга в симметричных триплетах крайковского типа [3]. Механизм их развития — волновой резонанс. Полученные экспериментальные [4—6] и теоретические [7—12] данные подтверждают связь субгармонического перехода с эволюцией синхронизированных возмущений.

В известных моделях рассматриваются параметрическая неустойчивость пары пространственных волн в поле заданной двумерной волны [9, 10], ветвление автоколебательных триплетных состояний [8], нелинейная эволюция резонансных волн Толлмина — Шлихтинга [2, 3, 7, 11], но они ограничены анализом симметричных относительно направления основного движения конфигураций.

Цель данной работы — изучение взаимодействия возмущений в несимметричных триплетах, их роли в формировании пространственной структуры и спектра начальной стадии перехода и интерпретация экспериментальных данных.

Элементарной моделью для такого изучения является изолированный триплет волн Толлмина — Шлихтинга. В первом нелинейном приближении слабонелинейной теории поле возмущений потока может быть выражено через функцию тока

$$(1) \quad \psi(x, y, t, z) = \sum_{j=1}^m A_j \varphi_j e^{i\theta_j(x, t, z)},$$

где $\theta_j = -\omega_j t + \int \alpha_j dx + \beta_j z$; $\varphi_j(y)$ и дисперсионное соотношение $\omega_j + i\gamma_j = \Omega(\alpha_j, \beta_j)$ определяются локально-параллельной задачей Орра —

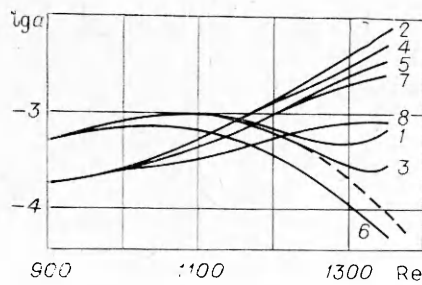
Зоммерфельда, а комплексная амплитуда $A_j(x) = A_j^0 e^{i\gamma_j x}$ удовлетворяет системе (при $m = 3$) нелинейных уравнений [2]. В условиях стационарности и трансверсальной (по оси z) однородности $\frac{\partial}{\partial t} A_j^0 = \frac{\partial}{\partial z} A_j^0 = 0$ такая система принимает вид

$$(2) \quad \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_1 \right) b_1 = S_{12} b_2 b_3, \quad \left(v_{2,3} \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_{2,3} - i\Delta\theta_{2,3} \right) b_{2,3} = S_{2,3} b_1 b_{3,2}^*,$$

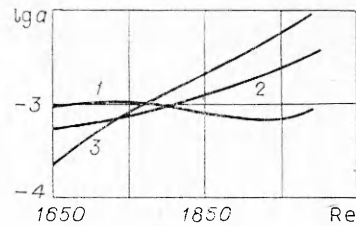
$$b_{j0} = b_j(x_0) = a_j(x_0) \exp(i\Phi_j(x_0)),$$

где $\Delta\theta_{2,3} = -(1/2) (\Delta\omega - v_{2,3}\Delta\alpha - w_{2,3}\Delta\beta)$; $\Delta(\omega, \alpha, \beta) = (\omega, \alpha, \beta)_1 - (\omega, \alpha, \beta)_2 = (\omega, \alpha, \beta)_3$; проведена замена $b_1 = A_1$, $A_{2,3} = b_{2,3} \times \exp\left[(-i/2) (\Delta\omega t - \int \Delta\alpha dx - \Delta\beta z)\right]$.

Коэффициенты v_j , w_j , S_j строятся из решений однородного и неоднородного уравнений Орра — Зоммерфельда [2]. Расчеты данной работы проводились для возмущений в пограничном слое Блазиуса. Размерные z -компоненты волновых векторов и частоты оставались инвариантными,



Фиг. 1



Фиг. 2

число Рейнольдса Re определялось по толщине вытеснения. Рассмотрим поведение системы (2) при различных конфигурациях волновых векторов.

На фиг. 1 представлены зависимости $a_j(Re) = |A_j|$ для квазисимметричных триплетов ($\omega_1 = 2\omega_2 = 2\omega_3$, $\omega_j = F_j Re$, $F_1 = 115 \cdot 10^{-6}$, $\beta_2 = -\beta_3 = 0,15$) при $\beta_1 = 0; 0,03; 0,06$ (значения β_j приведены в начальном сечении Re). Случай $\beta_1 = 0$ реализует симметричный триплет. Равенство начальных интенсивностей трехмерных волн ($a_2(x_0) = a_3(x_0)$) обеспечивает их совпадение на всем участке развития (кривая 2). Поведение a_1 показано кривой 1. Имеет место взрывное взаимодействие возмущений [2, 7]. Увеличение β_1 меняет картину (линии 3–5 и 6–8 отвечают a_1 , a_2 , a_3 при $\beta_1 = 0,03$ и $0,06$ соответственно). Инкременты уменьшаются и не совпадают для a_j . Локальное затухание несущего колебания (a_1) может превышать определенное по линейной теории (штриховая линия), что указывает на нарушение взрывного характера резонанса. Тем не менее быстрое нарастание низкочастотных осцилляций остается неизменным.

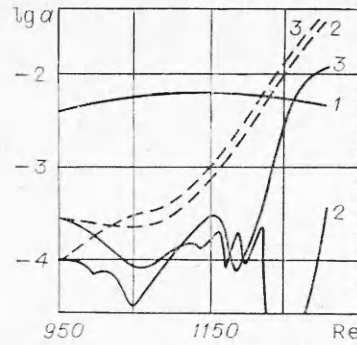
Указанная особенность проявляется и в других типах триплетов. На фиг. 2 приведены данные расчета взаимодействия волн с $\omega_1 = 2\omega_2 = 2\omega_3$, $\beta_1 = \beta_2 + \beta_3$ ($F_1 = 59 \cdot 10^{-6}$, $\beta_1 = 0,15$, $\beta_2 = 0,2$, $\beta_3 = -0,05$). Номер кривой соответствует индексу j волны. Вариация начальных фаз $\Phi = \Phi_{10} - \Phi_{20} - \Phi_{30}$, как и в случае квазисимметричного триплета, качественно сохраняет поведение амплитуд. Более чувствительными к изменениям Φ оказываются триплетные конфигурации из двумерной a_1 ($F_1 = 105 \cdot 10^{-6}$, $\beta_1 = 0$) и пары трехмерных a_2 , a_3 ($F_2 = 38 \cdot 10^{-6}$, $\beta_2 = 0,16$, $F_3 = 67 \cdot 10^{-6}$, $\beta_3 = -0,23$) волн (фиг. 3). При $\Phi = 0$ (штриховые линии) усиление a_2 , a_3 монотонно и структурно соответствует отмеченному ранее. Смена фазы $\Phi = 3\pi/2$ (сплошные кривые) существенно меняет траектории. Амплитуды a_2 , a_3 осциллируют, причем a_2 может упасть до фоновых уровней ($a_2 \leq 10^{-7}$), и лишь после этого начинается интенсивное нарастание. Сложность такого движения и его чувствительность к изменению начальных параметров представляют интерес с точки зрения стохастизации поля возмущений потока.

Оказалось, что эффекты резонансного взаимодействия обнаруживаются до тех пор, пока в системе присутствуют трансверсально расходящиеся (ось z) волны. В противном случае влияние нелинейности в (2) оказывается пренебрежимым вплоть до $a_j \leq 10^{-1}$.

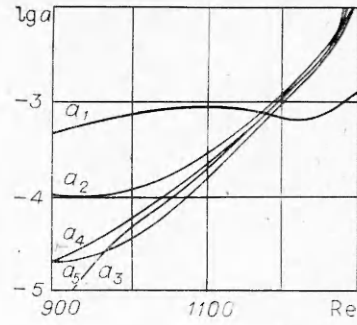
Полученные данные указывают на важность несимметричных трехволновых резонансов для возбуждения низкочастотных пространственных колебаний. В то же время подтверждается, что максимальные инкременты достигаются в симметричной структуре, обуславливая ее выделение в стандартных условиях экспериментов с вибрирующей ленточкой [1, 5]. При этом источником формирования такой структуры представляется взаимодействие задающей плоской волны с фоновыми возмущениями.

Соответствующая модель (двумерная волна с пакетом субгармонических пространственно-симметричных волн) изучалась в [7] без учета «перекрестных» связей.

Рассмотрим эффекты таких связей в базовой системе из пяти волн: $A_1(\omega_1, \alpha_1, \beta_1 = 0)$, $A_{2,3}(\omega_2 = \omega_3, \alpha_2 = \alpha_3, \beta_2 = -\beta_3)$, $A_{4,5}(\omega_4 = \omega_5,$



Фиг. 3



Фиг. 4

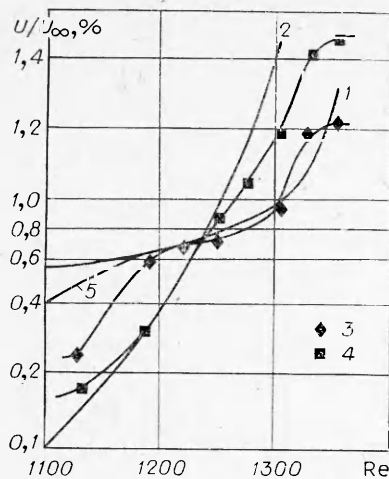
$\alpha_4 = \alpha_5$, $\beta_4 = -\beta_5$). Поле возмущений описывается функцией тока (1) с $m = 5$, а уравнения для амплитуд принимают вид

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_1 \right) b_1 = S_1 b_2 b_3 + S_2 b_4 b_5 + E (b_4 b_3 + b_2 b_5), \\
 & \left(v_{2,3} \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_{2,3} \right) b_{2,3} - \frac{1}{2} (\Delta \omega_1 - v_{2,2} \Delta \alpha_1 \mp w_{2,2} \Delta \beta) b_{2,3} = \\
 & = b_1 (C_1 b_{3,2}^* + D_1 b_{5,4}^*), \\
 & \left(v_{4,5} \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_{4,5} \right) b_{4,5} - (\Delta \omega_2 - v_{4,5} \Delta \alpha_2 \pm w_{4,5} \Delta \beta) b_{4,5} = b_1 (D_2 b_{3,2}^* + C_2 b_{5,4}^*), \\
 & b_j(x_0) = b_{j0}, \\
 & b_1 = A_1, \quad b_{2,3} = A_{2,3} \exp i \left(\Delta \omega_1 t - \int \Delta \alpha_1 dx \mp \Delta \beta z \right), \\
 & b_{4,5} = A_{4,5} \exp i \left(\Delta \omega_2 t - \int \Delta \alpha_2 dx \pm \Delta \beta z \right), \quad a_j = |b_j|.
 \end{aligned}$$

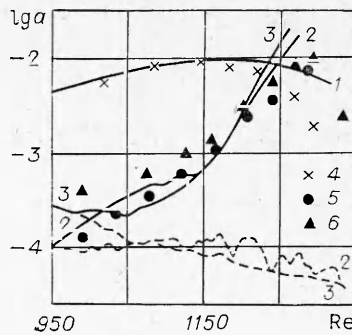
Связь в несимметричных триплетах учитывается членами (E, D_1, D_2) .

Результаты численного решения системы (3) при $\omega_1 = 2\omega_{2,3} = 2\omega_{4,5}$ ($F_1 = 115 \cdot 10^{-6}$, $\beta_2 = 0,136$, $\beta_4 = 0,156$ ($Re = 900$)) представлены на фиг. 4. Видно, что взаимодействие носит взрывной характер. Причем система не только симметризуется, но благодаря несимметричным связям происходит выравнивание интенсивностей всех ее волн. Достаточно единственной надфоновой волны (например, A_2), чтобы взаимодействие с двумерной волной привело к возбуждению из фона целого пакета. Указанная коллективизация — прямое следствие изучаемых резонансов — отсутствует в случае [7], построенном без их учета. По интенсивностям a_j система ведет себя аналогично изолированному триpletу Крайка, но отличается более сложным пространственным распределением поля возмущений. В результате можно ожидать близости экспериментальных и теоретических (для триплета) инкрементов при расхождении значений (α/β) отношения компонент волновых векторов.

На фиг. 5 приведено сопоставление расчета триплета $a_2 = a_3$, $\omega_1 = 2\omega_2 = 2\omega_3$, $\beta_2 = -\beta_3$ ($F_1 = 106 \cdot 10^{-6}$, $\beta_2 = 0,24$) с измерениями [5]. Имеется близкое соответствие результатов; теоретические данные (a_1 , a_2) — кривые 1, 2, а соответствующие экспериментальные — точки 3, 4. Количественное расхождение на начальном участке уменьшается с учетом непараллельности потока. Последняя мало сказывается на поведении $a_{2,3}$, для которых доминирует параметрическое усиление, но заметно деформирует a_1 (с поправкой на непараллельность кривая 1 принимает положение 5). Совпадение на участке ($Re \leq 1250$) нарушается с ростом интенсивностей. В этом случае, очевидно, нужен учет нелинейных эффектов более высокого порядка, которые и стабилизируют рост амплитуд. Фактором стабилизации может быть и передача энергии вниз по спектру.



Фиг. 5



Фиг. 6

В рассмотренной выше системе все волны синхронизировались в симметричных триплетах. Пример, когда симметричные пары и плоская волна не резонансны, но имеет место связь в несимметричной конфигурации, приведен на фиг. 6 (в системе (3) вклад членов с $S_{1,2}$, $C_{1,2}$ оказывается пренебрежимым). Поведение a_1 , $a_2 = a_3$, $a_4 = a_5$ ($F_1 = 105 \cdot 10^{-6}$, $F_2 = 38 \cdot 10^{-6}$, $F_3 = 67 \cdot 10^{-6}$, $\beta_2 = -\beta_3 = 0,16$, $\beta_4 = -\beta_5 = 0,25$ при $Re = 950$) описывается кривыми 1—3 (без перекрестного взаимодействия вид $a_{2,3}$, $a_{4,5}$ показан штриховыми линиями).

Образованием такой системы можно объяснить экспериментальные результаты работы [12], где в пограничный слой над пластиной методом вибрирующей ленты вводились колебания на $F_1 = 105 \cdot 10^{-6}$ и $F_0 = 143 \cdot 10^{-6}$. Было обнаружено, что спектральные компоненты $F_2 = F_0 - F_1$ и $F_3 = 2F_1 - F_0$ испытывают аномальное усиление и в результате превышают по интенсивности задающие волны. В рамках модели двухволнового нелинейного взаимодействия такой результат противоречит представлениям теории.

Объяснение этому факту может быть дано, если связать колебания на комбинационных частотах с собственными волнами потока (фазовые измерения в [12] отсутствуют). Тогда возмущения на частотах (F_1 , F_2 , F_3) способны образовать резонансную систему, представленную расчетами фиг. 6. Задающее колебание ω_0 способствует увеличению начальных амплитуд $a_{2,3}$, $a_{4,5}$, тогда как генерируемые им волны Толлмина — Шлихтинга не участвуют во взаимодействии и быстро затухают по линейной теории. Данные измерений хорошо согласуются с расчетами в области справедливости приближения. Экспериментальные результаты (a_1 , $a_2 = a_3$, $a_4 = a_5$) показаны точками 4—6.

Полученные данные позволяют сделать вывод о важной роли взаимодействий в несимметричных триплетах в переходном процессе. Такие взаимодействия эффективно влияют на доминирующую пространственно-симметричную структуру поля возмущений, а при некоторых условиях [12] целиком ее формируют. Существенным свойством указанного механизма является преимущественная передача энергии низкочастотным колебаниям, вследствие чего возможно осуществление каскадного процесса возбуждения все более длинноволновых пространственных флуктуаций. За счет нелинейности высших порядков может осуществляться одновременное заполнение спектра также в широкой полосе высоких частот. Такая эволюция способна стохастизировать течение и, по-видимому, объясняет результаты наблюдения субгармонического процесса перехода.

Авторы выражают благодарность В. Я. Левченко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Нелинейное развитие волны в пограничном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3.
2. Володин А. Г., Зельман М. Б. Трехволновое резонансное взаимодействие возмущений в пограничном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5.
3. Craik A. D. D. Nonlinear resonant instability in boundary layer.— J. Fluid Mech., 1971, v. 50, pt 2.
4. Козлов В. В., Рамазанов М. П. Образование трехмерных структур в течении Пуазейля при резонансном взаимодействии. Препринт № 11—83. ИТПМ СО АН СССР, 1983.
5. Козлов В. В., Левченко В. Я., Сарик В. С. Образование трехмерных структур при переходе в пограничном слое. Препринт № 10—83. ИТПМ СО АН СССР, 1983.
6. Kachanov Yu. S., Levchenko V. Ya. The resonant interaction of disturbances at laminar transition in a boundary layer.— J. Fluid Mech., 1984, v. 138, p. 209.
7. Зельман М. Б., Масленникова И. И. Резонансное возбуждение пространственных возмущений в пограничном слое.— В кн.: Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
8. Гольдштик М. А., Лифшиц А. М., Штерн В. П. Число Рейнольдса перехода в плоском канале.— ДАН СССР, 1983, т. 273, № 1.
9. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость.— ДАН СССР, 1977, т. 236, № 6.
10. Herbert T. Subharmonic three-dimensional disturbances in unstable plane shear flows. AIAA Paper N 83—1759.
11. Nayfeh A. H., Bozaty A. N. Nonlinear wave interactions in boundary layers. AIAA Paper N 79—1496.
12. Saric W. S., Reynolds G. A. Experiments on the stability of nonlinear waves in boundary layer.— In: Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Symposium. Stuttgart, 1979.

Поступила 16/III 1984 г.

УДК 536.24.02

СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С СЕКЦИОНИРОВАННОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

В. В. Сапелкин

(Жуковский)

Во многих работах [1—7] теплообмен потоков жидкости с твердыми телами при резком изменении граничных условий рассматривался при априорном задании температуры поверхности или теплового потока на ней по ступенчатому или синусоидальному закону. При этом факторы, вызывающие такое изменение граничных условий, во внимание не принимались. Поэтому более полным представляется рассмотрение задачи с учетом переноса тепла в твердом теле, т. е. как сопряженной. Так, в [8, 9] в сопряженной постановке исследовано влияние на температуру поверхности тела и коэффициент теплоотдачи секционированного вдува в пограничный слой, причем в [9] задача рассматривалась как нестационарная.

В данной работе методом конечных разностей исследуется влияние скачкообразного изменения в продольном направлении теплофизических свойств плоской пластины на параметры нестационарного теплообмена с омывающей ее жидкостью.

1. Постановка задачи. Пусть в моменты времени, предшествующие начальному ($t < 0$), секционированная пластина длиной L и толщиной $2b$ имела температуру T_0 , отличную от температуры набегающего потока T_∞ . Координаты x и y направим соответственно вдоль и перпендикулярно к пластине. Для простоты рассмотрим пластину, состоящую в направлении потока из двух секций, теплофизические свойства которых различны. Тепловой контакт секций идеальный. Нестационарность создается в результате мгновенного введения при $t = 0$ пластины в поток. Поскольку задача симметрична относительно плоскости $y = -b$, достаточно рассмотреть пластину толщиной b , внешняя поверхность которой теплоизолирована. Считаются выполненными следующие предположения: жидкость несжимаемая; теплофизические свойства жидкости и пластины не зависят от температуры; режим течения ламинарный; пластина достаточно тонка, чтобы пренебречь градиентом температуры поперек пластины.