электроконвекции несжимаемых жидкостей. Автореф. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Харьков: изд. ХГУ, 1980.
12. **Глинка Н. Л.** Общая химия. Л.: Химия, 1972.
13. **Казацкая Л. С., Солодовниченко И. М.** О роли электроиндукционных эффектов молекул в механизме генерации носителей заряда в органической жидкости.— Электронная обработка материалов, 1979, № 2.

УДК 532.6 : 532.581

НАЧАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПАДЕНИИ КАПЛИ НА ПЛОСКОСТЬ

А. А. Коробкин

(*Новосибирск*)

Рассматривается начальная стадия удара сферической капли по твердой плоскости. Предполагается, что жидкость идеальная и несжимаемая, поверхностное натяжение и внешние массовые силы отсутствуют.

Эта задача тесно связана с задачей о входе затупленного тела в жидкость, впервые рассмотренной в [1]. Метод вычисления силы сопротивления, развитый в [1], основан на допущении, что распределение скоростей на свободной поверхности в каждый момент получается таким же, как и распределение скоростей непосредственно после удара плавающей пластины соответствующих размеров.

Эти задачи имеют следующую специфику: 1) область течения Ω_t неизвестна; 2) на границе области течения необходимо определить линию контакта свободной поверхности жидкости и твердого тела; 3) на этой линии возможно появление особенностей решения.

Новый подход к решению задач такого сорта дает введение лагранжевых координат [2, 3], в которых область течения уже фиксирована.

1. При $t = 0$ жидкий шар радиуса a касается твердой плоскости, движущейся вдоль оси z со скоростью v. Требуется найти возникающее при этом движение жидкости. В пространстве лагранжевых декартовых координат ξ, η, ζ область, занятая жидкостью, известна — это шар радиуса a с центром в начале координат, обозначим его Ω_0. Через x, y, z обозначим соответствующие эйлеровы координаты, Γ — свободная поверхность, Σ — пятно контакта капли и твердой плоскости. Уравнения Эйлера, записанные в лагранжевых координатах, имеют вид [3]

$$(1.1)\qquad M_0^*\mathbf{x}_{tt} + \frac{1}{\gamma}\nabla_\xi p = 0, \quad \det M_0 = 1 \text{ в } \Omega_0$$

с краевыми $p|_\Gamma = 0$, $z_t|_\Sigma = -v$ и начальными $\mathbf{x}|_{t=0} = \xi$, $\mathbf{x}_t|_{t=0} = 0$ условиями, где $\mathbf{x} = (x, y, z)$; $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$; $M_0 = \partial(\mathbf{x})/\partial(\xi)$; M_0^* — матрица, сопряженная к M_0; p — давление. Сформулированная задача сложна в силу своей нелинейности и наличия неизвестной линии на границе шара $\partial\Omega_0$, разделяющей Γ и Σ.

2. Линеаризуем краевую задачу (1.1) на начальном состоянии покоя, удерживая члены нулевого и первого порядка малости относительно перемещений. Для линеаризованной задачи можно ввести потенциал перемещений $\Phi = \Phi(\xi, \eta, \zeta, t)$, который, вследствие уравнения неразрывности, будет гармонической в Ω_0 функцией. Из уравнения импульса следует связь

$$(2.1)\qquad p = -\gamma\Phi_{tt}$$

давления с потенциалом перемещений. С учетом этой формулы условие на Γ после двойного интегрирования по t с использованием начальных условий запишется в виде $\Phi|_\Gamma = 0$. Условие непротекания примет вид $\Phi_{zt}|_\Sigma = -v$.

Введем лагранжевы сферические координаты ρ, θ, φ такие, что $\xi = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $\eta = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $\zeta = \rho\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Постановка задачи инварианта относительно вращения вокруг оси z, это позволяет разыскивать функцию Φ не зависящей от φ. Тогда прообраз в лагранжевых координатах линии контакта свободной поверхности капли и твердой стенки будет задаваться формулой $\theta = \theta_0(t)$, $\rho = a$, где $\theta_0(t)$ надо определить в ходе решения краевой задачи для Φ. Запишем условие непротекания в сферических координатах и проинтегрируем его по t:

$$(\partial\Phi/\partial\rho)\cos\theta + (1/a)(\partial\Phi/\partial\theta)\sin\theta = -vt + a(1-\cos\theta),\ \rho = a,$$
$$0 \leqslant \theta < \theta_0(t).$$

Разделим левую и правую части выражения на $\cos\theta$ и представим правую часть через полиномы Лежандра первого и второго порядка:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{a}{2} - 2vt\right)P_1(\cos\theta) + \left(vt - \frac{a}{2}\right)P_2(\cos\theta) + O\left(t\theta_0^2\right),$$
$$\rho = a,\quad 0 \leqslant \theta < \theta_0(t).$$

Член $a^{-1}\Phi_\theta \operatorname{tg}\theta$ квадратично мал по сравнению с Φ_ρ, так как при $t \to 0$ $\theta_0(t)$, а следовательно, и θ стремятся к нулю, поэтому в рамках линейной теории его вместе с $O(t\theta_0^2)$ можно отбросить. В результате получаем смешанную краевую задачу для гармонической при $\rho < a$ функции:

(2.2) $$\Delta\Phi = 0,\ \rho < a,\ \Phi = 0,\ \rho = a,\ \theta_0(t) < \theta \leqslant \pi,$$
$$\Phi_\rho = (a/2 - 2vt)P_1(\cos\theta) + (vt - a/2)P_2(\cos\theta),\ \rho = a,\ 0 \leqslant \theta < \theta_0(t).$$

Кроме того, следует потребовать, чтобы частицы свободной поверхности не проникали за твердую плоскость. Это ограничение может быть записано в виде неравенства

(2.3) $$\Phi_\rho \leqslant (a - vt)/\cos\theta - a,\ \rho = a,\ \theta_0(t) < \theta \leqslant \pi/2,$$

которое следует проверить после решения задачи.

Введем безразмерные переменные r, τ и новую функцию $u(r, \theta, \tau) = (2/a^2)\Phi(ar, \theta, a\tau/2v) - (1 - 2\tau)\, r\, P_1(\cos\theta) - (1/2)(\tau - 1)r^2P_2(\cos\theta)$, $r = \rho/a$, $\tau = 2vt/a$. Из (2.2) следует

(2.4) $$\Delta u = 0, r < 1,\ u = (2\tau - 1)P_1(\cos\theta) + (1/2)(1-\tau)P_2(\cos\theta) = f(\theta, \tau),$$
$$r = 1,\ \theta_0 < \theta \leqslant \pi,\ u_r = 0,\ r = 1,\ 0 \leqslant \theta < \theta_0.$$

Решение этой задачи будем искать в виде ряда по полиномам Лежандра

(2.5) $$u(r, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\tau)\, r^n P_n(\cos\theta).$$

Используя граничные условия, приходим к следующим соотношениям:

(2.6) $$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\tau)\, P_n(\cos\theta) = f(\theta, \tau),\quad \theta_0 < \theta \leqslant \pi,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} nA_n(\tau)\, P_n(\cos\theta) = 0,\quad 0 \leqslant \theta < \theta_0,$$

которые называются парными рядами [4]. Удобно ввести новые коэффициенты $C_n = 2nA_n/(2n+1)$, $n \geqslant 1$ и $C_0 = 0$, числа $g_n = -1/2n$, $n \geqslant 1$, g_0 — любое число. Записанные в терминах C_n, g_n парные ряды приобретают вид, называемый стандартным:

(2.7а) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) C_n P_n(\cos\theta) = 0,\quad 0 \leqslant \theta < \theta_0;$$

(2.7б) $$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - g_n)\, C_n P_n(\cos\theta) = f(\theta, \tau) - A_0(\tau),\quad \theta_0 < \theta \leqslant \pi.$$

Если в результате решения (2.7) определяется C_n (а следовательно, и A_n), то формальное решение поставленной задачи (2.4) будет дано рядом (2.5). Система (2.7) может быть сведена к регулярному интегральному уравнению Фредгольма способом, основанным на использовании интегрального представления Мелера — Дирихле для полиномов Лежандра

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\theta}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos x)}}\,dx$$

и разложений некоторых разрывных функций в ряды по полиномам Лежандра [4]:

$$(2.8)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) tP_n(\cos\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \theta < \pi, \\ [2(\cos\theta - \cos t)]^{-1/2}, & 0 < \theta < t \leqslant \pi; \end{cases}$$

$$(2.9)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) tP_n(\cos\theta) = \begin{cases} [2(\cos t - \cos\theta)]^{-1/2}, & 0 \leqslant t < \theta < \pi, \\ 0, & 0 < \theta < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Полагаем

$$(2.10)\qquad C_n(\tau) = \int\limits_{\theta_0(\tau)}^{\pi} \varphi(y,\tau)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) y\,dy,$$

где $\varphi(x,\tau)$ — новая неизвестная функция, которая предполагается непрерывно дифференцируемой по x и дважды непрерывно дифференцируемой по τ. Если теперь подставить (2.10) в (2.7а), то получим, используя (2.9), тождество (см. [4]). Подставляя затем (2.10) в (2.7б), получим уравнение Фредгольма для $\varphi(x,\tau)$

$$(2.11)\qquad \varphi(x,\tau) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta_0}^{\pi} K(x,y)\,\varphi(y,\tau)\,dy = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{\pi} \frac{(f(\theta,\tau) - A_0(\tau))\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{2(\cos x - \cos\theta)}},$$

$$\theta_0 < x \leqslant \pi,$$

ядро которого имеет вид

$$K(x,y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) x \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) y.$$

Подсчитаем правую часть (2.11) и запишем уравнение Фредгольма в окончательном виде, используя условие $C_0(\tau)=0$:

$$\varphi(x,\tau) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\int\limits_{\theta_0}^{\pi}\varphi(y,\tau)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\tau}{2} + 2A_0(\tau)\right)\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi}(1-2\tau)\sin\frac{3x}{2} + \frac{1}{\pi}(\tau-1)\sin\frac{5x}{2} \equiv \psi(x,\tau).$$

Коэффициент $A_0(\tau)$ определяется после решения этого уравнения из условия $C_0 = 0$.

3. Определим движение свободной поверхности. Так как $\Phi|_\Gamma = 0$, то лишь нормальная составляющая вектора перемещения $\Phi_\rho|_\Gamma$ отлична от нуля:

$$\Phi_\rho = (a/2)u_r + (a/2 - 2vt)P_1(\cos\theta) + (vt - a/2)P_2(\cos\theta).$$

Из формулы (2.5) следует

$$u_r|_\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} nA_n(\tau)P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)C_n(\tau)P_n(\cos\theta).$$

Подставим в эту формулу выражение $C_n(\tau)$ через $\varphi(x,\tau)$ и воспользуемся разрывными рядами (2.8), (2.9):

$$u_r|_\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int\limits_{\theta_0}^{\pi}\varphi(y,\tau)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)yP_n(\cos\theta)\,dy =$$

$$= -\int_{\theta_0}^{\pi} \varphi(y, \tau) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\, d\cos\left(n+\frac{1}{2}\right) y =$$

$$= \varphi(\theta_0(\tau), \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) \theta_0 P_n(\cos\theta) +$$

$$+ \int_{\theta_0}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) y P_n(\cos\theta) \right) \varphi_y(y, \tau)\, dy =$$

$$= \frac{\varphi(\theta_0(\tau), \tau)}{\sqrt{2(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\varphi_y(y, \tau)\, dy}{\sqrt{2(\cos y - \cos\theta)}}.$$

Из условия (2.3) получаем уравнение для определения $\theta_0(\tau)$:

(3.1) $$\varphi(\theta_0(\tau), \tau) = 0.$$

Давление определяется по формуле (2.1). Используя связь $\Phi(\rho, \theta, t)$ и $u(r, \theta, \tau)$, запишем

(3.2) $$p = -2\gamma u_{\tau\tau}(1, \theta, \tau), \quad 0 \leqslant \theta < \theta_0(\tau).$$

Применяя (2.8), (2.9) после преобразований, получим

(3.3) $$u_{\tau\tau}(1, \theta, \tau)|_{\Sigma} = - \left.\frac{\varphi_\tau(x, \tau)\, \theta_0'(\tau)}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\right|_{x=\theta_0} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [P_n(\cos\theta) - P_n(\cos\theta_0)] \int_{\theta_0}^{\pi} \varphi_{\tau\tau}(x, \tau) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) x dx,$$

причем ряд сходится абсолютно, так как $P_n(\cos\theta) = O(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$. Силу удара капли по плоскости определим интегрированием давления по пятну контакта

$$F = 2\pi a^2 \int_0^{\theta_0} p(1, \theta, \tau) \sin\theta d\theta$$

или, используя (3.2), (3.3), имеем

(3.4) $$F = 8\pi\gamma a^2 v^2 \varphi_\tau(x, \tau)\, \theta_0'(\tau)|_{x=\theta_0(\tau)} \sin\frac{\theta_0}{2} +$$

$$+ 4\gamma a^2 v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^{\theta_0} [P_n(\cos\theta_0) - P_n(\cos\theta)] \sin\theta d\theta \right) \times$$

$$\times \left(\int_{\theta_0}^{\pi} \varphi_{\tau\tau}(x,\tau) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) x dx \right).$$

4. Найдем приближенное решение интегрального уравнения (2.11). Разложим искомую функцию $\varphi(x, \tau)$, безразмерное время τ, коэффициент $A_0(\tau)$ и $\psi(x, \tau)$ в ряды по θ_0:

(4.1) $$\varphi(x, \tau) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\theta_0 + \ldots, \quad \psi(x, \tau) = \psi_0(x) + \psi_1(x)\theta_0 + \ldots,$$

$$A_0(\tau) = b_0 + b_1\theta_0 + b_2\theta_0^2 + \ldots, \quad \tau = a_2\theta_0^2 + a_3\theta_0^3 + \ldots$$

Предполагаем, что функцию $\varphi(x, \tau)$ можно аналитически продолжить на интервал $[0, \pi]$. Тогда уравнение (2.11) можно записать следующим образом:

$$(4.2)\qquad \varphi(x,\tau)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}K(x,y)\,\varphi(y,\tau)\,dy+\frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_0}K(x,y)\,\varphi(y,\tau)\,dy=$$
$$=\psi(x,\tau),\quad \theta_0<x\leqslant\pi.$$

Разложим ядро $K(x, y)$ по формуле Тейлора при $y\in[0,\theta_0)$:

$$K(x,y)=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}x\cos x\right)y+O(y^2).$$

Уравнение для определения $\varphi_0(x)$ следует из (2.11) при $\tau=0$:

$$\varphi_0(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}K(x,y)\,\varphi_0(y)\,dy=\psi_0(x).$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\varphi_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Можно получить, что

$$\varphi_0(x)=\left(-\frac{1}{2\pi}-\frac{2}{\pi}b_0\right)\sin\frac{x}{2}-\frac{4}{3\pi}\sin\frac{3x}{2}+\frac{4}{5\pi}\sin\frac{5x}{2}.$$

Подставляя представление (4.1) в интегральное уравнение (4.2) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ_0, получим уравнения для определения $\varphi_n(x)$. Так, уравнение для $\varphi_1(x)$ имеет вид

$$\varphi_1(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}K(x,y)\,\varphi_1(y)\,dy=\psi_1(x).$$

Это уравнение решается так же, как и уравнение для $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_1(x)=-(2/\pi)b_1\sin(x/2).$$

В уравнение для $\varphi_2(x)$ даст вклад

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_0}K(x,y)\,\varphi_0(y)\,dy.$$

Используя разложение $K(x, y)$ при $|y|<\theta_0$ и вид $\varphi_0(x)$, получим

$$\varphi_2(x)=\left(\frac{a_2}{2\pi}-\frac{2}{\pi}b_2-\frac{1}{16\pi}-\frac{1}{4\pi}b_0\right)\sin\frac{x}{2}+\frac{8a_2}{3\pi}\sin\frac{3x}{2}-\frac{4a_2}{5\pi}\sin\frac{5x}{2}.$$

Из условия $C_0(\tau)=0$ определим первые члены в разложении по θ_0 коэффициента $A_0(\tau)$:

$$A_0(\tau)=(\tau-1)/4+O\left(\theta_0^3\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_0^{\theta_0}\varphi_0(y)\,dy=O\left(\theta_0^4\right),\quad \int_0^{\theta_0}y\varphi_0(y)\,dy=O\left(\theta_0^5\right),\quad \varphi_1(x)=0.$$

Используя эти соотношения, запишем уравнение для определения $\varphi_3(x)$

$$\varphi_3(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}K(x,y)\,\varphi_3(y)\,dy=\psi_3(x).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_3(x) = \left(\frac{a_3}{2\pi} - \frac{2}{\pi} b_3\right) \sin\frac{x}{2} + \frac{8a_3}{3\pi} \sin\frac{3x}{2} - \frac{4a_3}{5\pi} \sin\frac{5x}{2}.$$

Искомая функция $\varphi(x, \tau)$ запишется в виде

$$\varphi(x, \tau) = \frac{4}{3\pi}(2\tau - 1)\sin\frac{3x}{2} + \frac{4}{5\pi}(1-\tau)\sin\frac{5x}{2} + O\left(\theta_0^4\right).$$

Зная $\varphi_3(x)$, значение $A_0(\tau)$ можно уточнить:

$$A_0(\tau) = \frac{\tau - 1}{4} + O\left(\theta_0^4\right).$$

Из уравнения (3.1) определим $\theta_0(\tau)$:

$$\theta_0(\tau) = \sqrt{\frac{3}{2}\tau} + O\left(\tau^{3/2}\right).$$

5. Используя (3.2), (3.3), определим давление на пятне контакта:

$$p = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma v^2}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} + O(1). \tag{5.1}$$

По формуле (3.4) рассчитаем силу удара

$$F = 6\sqrt{3}\gamma a^{3/2} v^{5/2} t^{1/2} + O(t). \tag{5.2}$$

Используя (2.1), (5.1), можно получить, что главный член асимптотики Φ при $t \to 0$ не положителен на пятне контакта. Физически это означает, что частицы, лежащие на пятне контакта, разбегаются от точки $\theta = 0$, $\rho = a$.

К построенной гармонической в шаре функции $\Phi(\rho, \theta, t)$ применим преобразование Кельвина. Тогда функция

$$w(\rho, \theta, t) = \begin{cases} \Phi(\rho, \theta, t), & \rho \leqslant a, \\ -\dfrac{a}{\rho}\Phi\left(\dfrac{a^2}{\rho}, \theta, t\right), & \rho \geqslant a \end{cases}$$

будет гармонической во всем пространстве с разрезом по Σ, причем на одной стороне Σ имеем условие Неймана, а на другой — условие третьего рода:

$$w_\rho + w/a = (a - vt)/\cos\theta - a, \ \rho = a + 0, \ 0 \leqslant \theta < \theta_0 : \Sigma_+,$$

$$w_\rho = (a - vt)/\cos\theta - a, \ \rho = a - 0, \ 0 \leqslant \theta < \theta_0 : \Sigma_-.$$

Перейдем к новой функции $q = \partial w/\partial\rho$, q — гармоническая во всем пространстве функция, равная нулю на бесконечности. По усиленному принципу максимума q не может достигать своего максимального значения внутри области ее определения. Поэтому

$$q \leqslant \max\left(\max_{\Sigma_-} q, \ \max_{\Sigma_+} q\right), \quad \rho = a, \ \theta_0 < \theta \leqslant \pi.$$

На Σ_- $\max q = vt/2$, а на Σ_+ $\max q = vt/2 + \max\limits_{\Sigma}(\Phi/a)$. Так как $\Phi|_\Sigma \leqslant 0$, то $q \leqslant vt/2$ при $\rho = a$, $\theta_0 < \theta \leqslant \pi$. Это неравенство можно усилить

$$q|_{\rho=a} \leqslant (a - vt)/\cos\theta - a, \ \theta_0 < \theta \leqslant \pi/2.$$

Таким образом, построенное решение удовлетворяет условию (2.3).

Замечание 1. Известно, что давление p является субгармонической в Ω_0 функцией [5]. Так как $p \geqslant 0$ на Σ и $p = 0$ на Γ по условию, то, следовательно, $p \geqslant 0$ в Ω_0, т. е. в течении отсутствуют зоны разрежения.

Замечание 2. Вследствие осевой симметрии задачи центр масс капли при ударе может перемещаться только по оси z, закон его движения можно определить из уравнения Ньютона:

$$md^2Z_{\text{к}}/dt^2 = F(t),$$

где m — масса капли; $Z_к$ — перемещение центра масс капли по оси z; $F(t)$ — сила, задаваемая формулой (5.2). Можно видеть, что $Z_к = O(t^{5/2})$ при $t \to 0$, т. е. движение центра масс капли пренебрежимо мало в начальной стадии удара.

Замечание 3. При дополнительном условии ($\Phi \leqslant 0$ на Σ) задачу (2.2), (2.3) можно сформулировать как задачу с односторонними неравенствами:

$$\Delta w^* = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \begin{cases} w^*_\rho - g^* \geqslant 0 \\ w^* \geqslant 0 \\ w^*(w^*_\rho - g^*) = 0 \end{cases} \quad \text{на } \partial\Omega_0,$$

где $w^* = -\Phi$, $g^* \in H^{1/2}(\Omega_0)$. Решение этой задачи ищем в $H^1(\Omega_0)$. Определим множество $U_\partial = \{v | v \in H^1(\Omega_0),\ v \geqslant 0 \text{ на } \partial\Omega_0\}$, непрерывный линейный функционал

$$L(v) = \int\limits_{\partial\Omega_0} g^* v d\Gamma, \quad v \subset H^1(\Omega_0)$$

и билинейную, симметричную, непрерывную и коэрцитивную на $H^1(\Omega_0)$ форму

$$\pi(u, v) = \int\limits_{\Omega_0} \nabla u \nabla v d\Omega, \quad v, u \in H^1(\Omega_0).$$

С помощью формулы Грина можно показать, что наша задача с односторонними неравенствами эквивалентна вариационному неравенству

$$\pi(w^*, v - w^*) \geqslant L(v - w^*), \ \forall v \in U_\partial.$$

Известно [6], что решение этого неравенства существует и единственно в $H^1(\Omega_0)$.

Задача о входе затупленного тела в идеальную жидкость тоже может быть сформулирована как вариационное неравенство, но вопрос о существовании и единственности его решения уже не тривиален, так как форма $\pi(u, v)$ для неограниченных областей не коэрцитивна.

6. Построенная асимптотика течения теряет силу в некоторой малой окрестности линии $\theta = \theta_0(t)$, $\rho = a$, размер которой имеет порядок t при $t \to 0$. В этой окрестности давление и скорости бесконечны, существенную роль играют сжимаемость, вязкость и поверхностное натяжение жидкости. Поэтому в ней необходимо строить «внутреннее разложение», описывающее тонкую структуру течения вблизи линии контакта.

При рассмотрении процесса удара капли особый интерес представляет значение давления на пятне контакта, место приложения максимальных нагрузок и время их действия. В основных работах по этому вопросу (см. обзор [7]) применяется модель идеальной сжимаемой жидкости, поверхностным натяжением и внешними массовыми силами пренебрегается. Модель идеальной несжимаемой жидкости использована в [8] для численного расчета центрального соударения двух капель при отсутствии массовых сил. При $t \to 0$ точность численных расчетов существенно снижается, поэтому большое значение имеет аналитическое исследование начальной стадии соударения, которая определяет всю «историю» движения. Сжимаемость необходимо учитывать только в самый первый момент времени [9, 10], пока фронт волны сжатия не вышел за пределы пятна контакта. Эта стадия процесса соударения капли с твердой плоскостью изучалась в [11].

Вычислим для рассматриваемого процесса числа Вебера $W = a\gamma v^2/\sigma$, Фруда $Fr = v^2/ag$, Рейнольдса $Re = av/\nu$ и Маха $M = v/c$, где a — радиус капли, γ — плотность жидкости, v — скорость соударения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение свободного падения, ν — коэффициент кинематической вязкости, c — скорость звука в жидкости. При $a = 3\cdot10^{-3}$ м, $v = 100$ м/с, $\nu = 10^{-4}$ м^2/с, $c = 1500$ м/с, $\sigma = 72{,}58\cdot10^{-3}$ Дж/м^2, $\gamma = 10^3$ кг/м^3, $g = 9{,}81$ м/с^2 получим W, $Fr \sim 10^6$, $Re \sim 10^5$, $M \sim 10^{-2}$.

Таким образом, в указанном диапазоне скоростей можно ожидать, что силы вязкости, поверхностного натяжения и тяжести оказывают несущественное влияние на процесс соударения, а сжимаемостью жидкости можно пренебречь после того, как волна сжатия вышла на свободную поверхность капли.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарит также Л. К. Антановского и О. М. Лаврентьеву за обсуждение результатов и критику.

Поступила 31 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wagner H.** Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten.— Z. angew. Math. und Mech., 1932, Bd 12, H. 4.
2. **Пухначев В. В.** Линейное приближение в задаче о входе затупленного тела в воду.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 38. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
3. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск, 1975.
4. **Уфлянд Я. С.** Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.
5. **Кочин Н. В., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М., 1963.
6. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
7. **Гонор А. Л., Яковлев В. Я.** О некоторых результатах в теории удара капли по твердой поверхности.— В сб.: Струйные и отрывные течения. М.: изд. Ин-та механики МГУ, 1979.
8. **Петренко В. Е.** О методах расчета течений вязкой несжимаемой жидкости с большими деформациями.— В сб.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск, 1973.
9. **Ерошин В. А., Романенков Н. И. и др.** Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980.
10. **Горшков А. Г., Григолюк Э. И.** Задача об ударе упругих оболочек вращения о несжимаемую жидкость.— В сб.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск, 1973.
11. **Heymann F. J.** High-speed impact between a liquid drop and a solid surface.— J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, N 13.

УДК 532.529

РАЗВИТИЕ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЫ РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ГАЗОЖИДКОСТНОГО КОЛЬЦА

С. В. Стебновский

(*Новосибирск*)

В задачах по исследованию поверхностных явлений при подводном взрыве, в частности при исследовании процесса образования брызгового купола, представляет интерес развитие возмущений на начальной стадии движения свободной поверхности. Для удобства исследования этого процесса целесообразно в качестве модели рассмотреть течение при взрыве цилиндрического заряда в жидком цилиндрическом кольце, когда форма свободной поверхности совпадает с формой поверхности заряда.

Устойчивость расширяющегося жидкого кольца исследовалась в ряде работ. Так, в [1] в постановке идеальной несжимаемой жидкости рассмотрена задача об устойчивости начальных возмущений тонкого жидкого кольца, расширяющегося по инерции. Показано, что в общем случае такое движение неустойчиво; введение поверхностного натяжения оказывает стабилизирующее влияние на гармоники. Но в случае, когда движение жидкости происходит под действием импульсных нагрузок, началу движения жидкости предшествует выход на ее поверхность ударной волны, в результате чего под действием отраженной волны разгрузки нарушается сплошность жидкой среды. Поэтому справедливость применения в таком случае оценок устойчивости возмущений, полученных в задачах о расширении сплошного жидкого кольца, не является очевидной.

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию развития начальных возмущений на внешней поверхности расширяющегося газожидкостного кольца. Такое течение реализовалось следующим образом. Вдоль оси симметрии цилиндрического объема жидкости *1* (фиг. 1) помещался заряд *2* — электродетонатор ЭДВ-1; радиус заряда $R_{02}(0) = 0{,}35$ см;