

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА В ПЛОСКОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. П. Емел

(Киев)

В сильном магнитном поле, помимо электронов, ларморовское вращение приобретают ионы. Электрическое поле в канале и его интегральные характеристики в этом случае зависят как от геометрии канала и величины внешнего магнитного поля, так и от физического состояния и химического состава движущейся среды. При этом имеют место явления, наблюдаемые в канале и при учете только спирального пробега электронов (концентрация тока на концевых участках электродов, искривление линий тока в средней зоне канала и др.).

Однако наличие «скольжения» ионов более существенным образом сказывается на интегральных характеристиках каналов. Так, например, мощность магнитогиродинамического генератора в сильном магнитном поле становится постоянной и остается таковой при дальнейшем возрастании поля. Это свойство преобразователя энергии объясняется тем, что внутреннее сопротивление генератора принимает квадратичную зависимость от магнитного поля.

Со «скольжением» ионов связано и другое важное явление. В сильном магнитном поле холловская электродвижущая сила исчезает, электропроводность среды вместо тензорной становится скалярной, а картина распределения тока в канале принимает такой же вид, как и в случае отсутствия ларморовского вращения электронов. Под электропроводностью среды при этом подразумевается ее эффективное значение, зависящее от магнитного поля.

В работе нахождение распределения тока в канале приводится к решению краевой задачи в специальном классе периодических функций, для чего привлекается теория краевых задач в классе автоморфных функций.

§ 1. При решении задачи будем предполагать, что магнитное число Рейнольдса R_m значительно меньше единицы, так что индуцированное магнитное поле не учитывается. Внешнее же магнитное поле $\mathbf{H}$ $(0, 0, H_z)$ в канале $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq h$ магнитогиродинамического генератора с симметрично расположенными электродами (фиг. 1) принято однородным и направленным нормально потоку среды $\mathbf{v}$ $(u(x, y), v(x, y), 0)$.

В сильном магнитном поле закон Ома записывается в виде [1]

$$\mathbf{j} = \sigma \left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) - \frac{\omega_e \tau_e}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{\omega_e \tau_e \omega_i \tau_i}{H^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \quad (1.1)$$

$(H = |\mathbf{H}|)$

Здесь $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока, $\varphi(x, y)$ — электростатический потенциал, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, σ — электропроводность среды в канале, ω_e и ω_i — циклотронные частоты электронов и ионов соответственно, τ_e^{-1} и τ_i^{-1} — эффективные частоты столкновений электронов и ионов, σ , $\omega_e \tau_e$ и $\omega_i \tau_i$ — константы.

Проектируя (1.1) на координатные оси и разрешая полученную систему уравнений относительно компонент тока j_x и j_y , после преобразований получаем

$$j_x(x, y) = \frac{\sigma(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)}{(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} v H + \frac{\omega_i \tau_i}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c} u H \right) \right]$$

$$j_y(x, y) = \frac{\sigma(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)}{(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} u H + \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} v H \right) \right]$$

При указанных предположениях из рассмотрения уравнений (1.2) совместно с условием неразрывности тока

$$\partial j_x / \partial x + \partial j_y / \partial y = 0 \quad (1.3)$$

и представлением скорости в виде

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -\partial \psi / \partial x \quad (1.4)$$

получаем гармоническую функцию

$$\Delta \chi(x, y) = \Delta \left(\varphi + \frac{1}{c} \psi H \right) = 0 \quad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (1.5)$$

Представление скорости в виде (1.4) всегда справедливо, когда среду в канале можно считать несжимаемой ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и тогда $\psi(x, y)$ — функция тока), или когда течение прямолинейное $\mathbf{v}(u(y), 0, 0)$, тогда

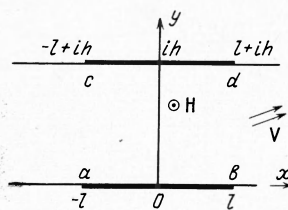
$$\psi(y) = \int_0^y u(y) dy$$

Компоненты вектора плотности электрического тока j_x и j_y выражаются через функцию $\chi(x, y)$

$$\begin{aligned} j_x(x, y) &= \frac{\sigma(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)}{(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2} \left(-\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \\ j_y(x, y) &= \frac{\sigma(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)}{(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2} \left(-\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Поэтому задача о нахождении тока в канале приводится к определению функции $\chi(x, y)$.

Сформулируем граничные условия. Стенки канала будем считать непроницаемыми и выполненными из совершенных материалов (идеально проводящих электродов и идеальных изоляторов). На непроводящих стенках нормальная компонента тока равна нулю, на проводящих — равна нулю касательная компонента напряженности электрического поля; кроме того, на непроницаемых и неподвижных стенках канала выполняется гидродинамическое условие $\mathbf{v} = 0$. Итак,



Фиг. 1

$$j_y = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

на электродах

$$\mathbf{v} = 0, \quad \partial \varphi / \partial x = 0 \quad \text{или} \quad \partial \chi / \partial x = 0 \quad (1.8)$$

на бесконечности

$$\mathbf{j} = 0 \quad (1.9)$$

Ниже для решения задачи (1.5), (1.7) — (1.9) привлекается теория краевой задачи Римана для автоморфных функций.

Введем в рассмотрение аналитическую в полосе $0 \leq \operatorname{Im} z \leq h$ функцию

$$W(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \partial \chi / \partial x - i \partial \chi / \partial y \quad (z = x + iy) \quad (1.10)$$

при помощи которой исходная задача наклонной производной приводится к краевой задаче Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами для полосы.

Произведем замену переменных

$$\zeta = \pi z/h \quad (z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta) \quad (1.11)$$

где h — ширина канала. При помощи подстановки (1.11) изменяется геометрический масштаб в плоскости комплексного переменного и в результате получаем полосу шириной π . Концевые точки электродов a, b, c и d переходят соответственно в точки с координатами

$$A = -\pi l/h, \quad B = \pi l/h, \quad C = -\pi l/h + i\pi, \quad D = \pi l/h + i\pi \quad (1.12)$$

Для функции

$$W_1(\zeta) = W(z) = U_1(\xi, \eta) + iV_1(\xi, \eta) \quad (1.13)$$

из граничных условий (1.7)–(1.9) получаем следующую задачу Римана — Гильберта в полосе $0 \leq \text{Im } \zeta \leq \pi$ (нижние индексы в дальнейшем опущены):

$$U(t) = 0 \quad \text{на } L', \quad V(t) = \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i} U'_1(t) = 0 \quad \text{на } L'' \\ W'_1(\zeta) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

Здесь через L' обозначены отрезки AB и CD , а через L'' — остальная часть прямых $\eta = 0$ и $\eta = \pi$; за положительное направление обхода полосы принимается такое, при котором внутренность полосы $0 < \text{Im } \zeta < \pi$ остается все время слева.

Задача (1.14) редуцируется к краевой задаче Римана для однопериодических функций с периодом 2π . Последняя представляет собой частный случай краевой задачи Римана для автоморфных функций [2,3].

Способ составления краевой задачи Римана включает введение функции $\bar{W}(\bar{\zeta})$, которая комплексно сопряжена с функцией $W(\zeta)$ в точках, сопряженных $\bar{\zeta}$. Полоса $-\pi \leq \text{Im } \zeta \leq \pi$ считается фундаментальной областью нулевого рода однопериодической группы, порожденной преобразованием $\mu_k(\zeta) = \zeta + 2\pi i k$. Основным простым инвариантом группы будет функция $\exp \zeta$, которая ограничена на левом конце полосы и имеет полюс первого порядка на другом конце полосы.

Задача Римана, соответствующая задаче Римана—Гильберта (1.14), имеет вид

$$\Psi^+(t) = -\Psi^-(t) \quad \text{на } L' \\ \Psi^+(t) = \frac{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i + i\omega_e \tau_e}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i - i\omega_e \tau_e} \Psi^-(t) \quad \text{на } L'' \\ \Psi(\zeta) = \begin{cases} \Psi^+(\zeta) & \text{при } 0 < \text{Im } \zeta < \pi, \\ \Psi^-(\zeta) & \text{при } -\pi < \text{Im } \zeta < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi^+(\zeta) = W(\zeta) \\ \Psi^-(\zeta) = \bar{W}(\bar{\zeta}) \end{cases} \\ \lim \Psi(\zeta) = 0 \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty \quad (1.15)$$

Решение задачи (1.15), в соответствии с физическими условиями о концентрации тока возле концов электродов, строим в классе функций с интегрируемыми особенностями в точках A, B, C и D и ограниченных на концах полосы

$$\bar{\Psi}(\bar{\zeta}) = (-1)^\varepsilon C_1 e^\zeta [(e^\zeta - e^A)(e^\zeta - e^D)]^{1/2+\varepsilon} [(e^\zeta - e^B)(e^\zeta - e^C)]^{-1/2-\varepsilon} \quad (1.16)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i} \quad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}\right) \quad (1.17)$$

где C_1 — действительная постоянная, значение которой будет определено ниже. Под $\Psi(\zeta)$ подразумевается ветвь, для которой справедливо

$$\lim \Psi(\zeta) e^\zeta = (-1)^\varepsilon C_1 \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty \quad (1.18)$$

Переписывая закон Ома в комплексной форме

$$j(z) = j_x(x, y) - ij_y(x, y) = \frac{-\sigma}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i + i \omega_e \tau_e} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - i \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \quad (1.19)$$

и рассматривая совместно формулы (1.10), (1.15) — (1.19), находим искомое распределение тока в плоском канале

$$\begin{aligned} j(z) = j_x(x, y) - ij_y(x, y) = & \frac{-C_1 \sigma (-1)^\varepsilon}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i + i \omega_e \tau_e} \exp \frac{\pi z}{h} \times \\ & \times \left[\left(\exp \frac{\pi z}{h} - \exp -\frac{\pi l}{h} \right) \left(\exp \frac{\pi z}{h} + \exp \frac{\pi l}{h} \right) \right]^{-1/2+\varepsilon} \times \\ & \times \left[\left(\exp \frac{\pi z}{h} - \exp \frac{\pi l}{h} \right) \left(\exp \frac{\pi z}{h} + \exp -\frac{\pi l}{h} \right) \right]^{-1/2-\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Полученные формулы позволяют вычислить интегральные характеристики генератора.

Суммарный ток I , протекающий в нагрузке генератора, определяется по формуле

$$I = s \int_a^b j_y(x) dx = \frac{C_1 s \sigma (1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i) \Delta_1(l, h, \varepsilon)}{(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(l, h, \varepsilon) = & \int_{-\pi l/h}^{\pi l/h} [(e^x - e^{-\pi l/h})(e^x + e^{\pi l/h})]^{-1/2+\varepsilon} [(e^{\pi l/h} - e^x)(e^x + e^{-\pi l/h})]^{-1/2-\varepsilon} e^x dx \\ & (-\pi l/h \leq x \leq \pi l/h) \end{aligned} \quad (1.22)$$

где s — ширина электродов (высота канала).

Внутреннее падение напряжения между электродами находится из формул

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^a + \int_b^{\infty} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{c} H \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{y=0} dx &= \mathcal{E} - 2\varphi_e, \\ \mathcal{E} = \frac{1}{c} H \left(\int_{-\infty}^a + \int_b^{\infty} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{y=0} dx \end{aligned} \quad (1.23)$$

Здесь $\mathcal{E}$ — электродвижущая сила, $2\varphi_e$ — напряжение между электродами.

Первое соотношение (1.23), если использовать формулу (1.20), приводится к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - 2\varphi_e = C_1 (1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i) [\Delta_2(l, h, \varepsilon) + \Delta_3(l, h, \varepsilon)] [(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)^2 + \\ + \omega_e^2 \tau_e^2]^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(l, h, \varepsilon) = & \int_{\pi l/h}^{\infty} [(e^x - e^{-\pi l/h})(e^x + e^{\pi l/h})]^{-1/2+\varepsilon} [(e^x - e^{\pi l/h}) \times \\ & \times (e^x + e^{-\pi l/h})]^{-1/2-\varepsilon} e^x dx \quad (x \geq \pi l/h) \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3(l, h, \varepsilon) = & \int_{-\infty}^{-\pi l/h} [(e^{-\pi l/h} - e^x)(e^x + e^{\pi l/h})]^{-1/2+\varepsilon} [(e^{\pi l/h} - e^x) \times \\ & \times (e^x + e^{-\pi l/h})]^{-1/2-\varepsilon} e^x dx \quad (x \leq -\pi l/h) \end{aligned}$$

Значение постоянной C_1 получаем из уравнения

$$\mathcal{E} - 2\varphi_e = I\Omega_b, \quad \text{или} \quad \mathcal{E} - I\Omega_n = I\Omega_b \quad (1.26)$$

Здесь Ω_b — внутреннее сопротивление генератора, а Ω_n — нагрузка генератора. Подставляя в (1.26) значение тока I , определяемое формулой (1.24), находим

$$C_1 = \frac{\mathcal{E} [(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2]}{\sigma s \Delta_1(l, h, \varepsilon) (1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i) (\Omega_b + \Omega_n)} \quad (1.27)$$

Внутреннее сопротивление генератора дается формулой

$$\Omega_b = \frac{\mathcal{E} - 2\varphi_e}{I} = \frac{\Delta_2(l, h, \varepsilon) + \Delta_3(l, h, \varepsilon)}{\sigma s \Delta_1(l, h, \varepsilon)} [(1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2]^{1/2} \quad (1.28)$$

После нахождения постоянной C_1 и внутреннего сопротивления Ω_b легко вычисляются другие интегральные характеристики генератора [4-6]: электрическая мощность $N = 2\varphi_e I$ и джоулева диссипация в канале $Q = I\mathcal{E} - N$. Последним формулам можно придать простой и наглядный вид, если ввести параметр нагрузки

$$q = \frac{2\varphi_e}{\mathcal{E}} = \frac{\Omega_n}{\Omega_n + \Omega_b} \quad (0 \leq q \leq 1) \quad (1.29)$$

Тогда получаем

$$I = (1 - q) \frac{\mathcal{E}}{\Omega_b}, \quad N = q(1 - q) \frac{\mathcal{E}^2}{\Omega_b}, \quad Q = (1 - q)^2 \frac{\mathcal{E}^2}{\Omega_b} \quad (1.30)$$

§ 2. Электрические характеристики магнитогидродинамического генератора, как видно, в основном определяются значением внутреннего сопротивления Ω_b (при фиксированных $\mathcal{E}$ и q). В общем случае Ω_b , согласно (1.28), зависит от геометрических размеров генератора (l , h и s), физических свойств проводящей среды в канале и величины внешнего магнитного поля H . Теоретически Ω_b может изменяться от нуля до бесконечности, и соответственно изменятся характеристики генератора.

Как отмечалось выше, краевую задачу (1.5), (1.7)–(1.9) можно решить и другими методами. Например, путем отображения полосы сначала на полуплоскость, а затем при помощи интеграла Шварца — Кристоффеля на внутренность параллелограмма [4-8]. Более того, если ввести эффективную проводимость σ_* и эффективный параметр Холла $\omega_* \tau_*$ по формулам

$$\sigma_* = \frac{\sigma}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i}, \quad \omega_* \tau_* = \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i} \quad (2.1)$$

и внести их в исходные уравнения (1.6) и граничные условия (1.7), то получим краевую задачу, решенную в работах [4, 6, 8]. Это обстоятельство позволяет воспользоваться результатами указанных работ для анализа характеристик магнитогидродинамических преобразователей энергии при наличии в них «скольжения» ионов.

Для нахождения внутреннего сопротивления генератора удобно применять приближенные формулы. Одна из таких формул может быть получена из (1.28) путем вычисления несобственных интегралов (1.22) и (1.25) по методу выделения особенностей

$$\begin{aligned} \Omega_b = & \frac{1}{\sigma s} [(1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2]^{1/2} \left[1 + \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \left(2 \operatorname{th} \frac{\pi l}{h} \right)^{-2\varepsilon} \right] \times \\ & \times \left[\left(1 - \exp - \frac{\pi l}{h} \right)^{1/2 + \varepsilon} + \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \left(2 \operatorname{th} \frac{\pi l}{h} \right)^{-2\varepsilon} \left(\exp \frac{\pi l}{h} - 1 \right)^{1/2 + \varepsilon} \right]^{-1} \quad (2.2) \\ \varepsilon = & \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2} \quad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2} \right), \quad \gamma = \frac{\omega_i \tau_i}{\omega_e \tau_e} \end{aligned}$$

Значение коэффициента γ определяется химическим составом проводящей среды и ее физическим состоянием. В наиболее интересных для практики случаях γ изменяется в пределах

$$\gamma = \omega_i \tau_i / \omega_e \tau_e \approx 10^{-1} \div 10^{-4}$$

Если $\omega_e \tau_e = 0$, то выражение (2.2) приводится к виду

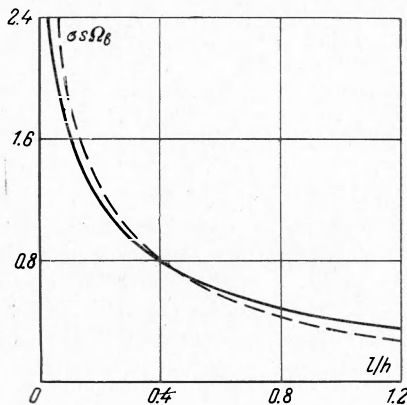
$$\Omega_b = \frac{1}{\sigma_s} \frac{2 \exp(-\pi l / 2h)}{[1 + \exp(-\pi l / h)] [1 - \exp(-\pi l / h)]^{1/2}} \quad (2.3)$$

Точное же выражение, которое соответствует этому случаю, согласно (1.28), таково:

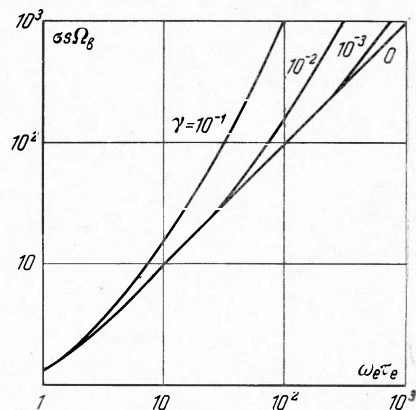
$$\Omega_b = \frac{1}{\sigma_s} \frac{\Delta_2(l, h) + \Delta_3(l, h)}{\Delta_1(l, h)} = \frac{2}{\sigma_s} \frac{K(k)}{K(k')} \quad \left(\begin{array}{l} k = \exp(-2\pi l / h) \\ k' = \sqrt{1 - k^2} \end{array} \right) \quad (2.4)$$

где $K(k)$ — эллиптический интеграл первого рода.

На фиг. 2 построены кривые $\sigma_s \Omega_b$, которые иллюстрируют зависимость внутреннего сопротивления генератора от линейных размеров канала.



Фиг. 2



Фиг. 3

Сплошная кривая соответствует точной формуле (2.4), а пунктирная — приближенной (2.3). Приближенные выражения (2.2), (2.3) можно применять для средних значений l/h .

В одном случае, когда выполняется соотношение

$$\operatorname{sh}(\pi l / h) = 1, \quad l/h \approx 0.28 \quad (2.5)$$

интегралы Δ_i ($i = 1, 2, 3$) в формуле (1.28) приводятся к бета-функциям, и выражение для внутреннего сопротивления принимает весьма простой вид

$$\Omega_b = \frac{1}{\sigma_s} [(1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2]^{1/2} \quad (2.6)$$

Этот случай наглядно показывает, что при наличии спирального про бега ионов значение Ω_b увеличивается с ростом параметра $\omega_e \tau_e$ и в тем большей степени, чем большие значения принимает коэффициент γ (фиг. 3).

Когда $\omega_i \tau_i = 0$ и $\omega_e \tau_e \gg 1$, то Ω_b почти линейно зависит от параметра $\omega_e \tau_e$ при малых значениях l/h и принимает квадратичную зависимость от $\omega_e \tau_e$ при больших значениях l/h . Физически такое свойство

внутреннего сопротивления Ω_b можно объяснить влиянием эффекта закорачивания э. д. с. Холла идеальными проводящими электродами. При уменьшении длины электродов экранирование холловской э. д. с. естественно, уменьшается (а в предельном случае точечных электродов — вообще исчезает). Поэтому для улучшения характеристик магнитогидродинамических преобразователей энергии при $\omega_e \tau_e \neq 0$ иногда применяют секционирование электродов. Иначе обстоит дело, когда наряду с электронами спиральным пробегом обладают ионы. К увеличению Ω_b при росте $\omega_e \tau_e$ теперь приводит также возрастание эффективной электропроводности $\sigma_* = \sigma / (1 + \gamma \cdot \omega_e^2 \tau_e^2)$. При этом квадратичная зависимость внутреннего сопротивления генератора в случае $\omega_e \tau_e \gg 1$ имеет место и тогда, когда холловская э. д. с. в канале отсутствует.

Заметим еще, что поскольку э. д. с. генератора $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} = c^{-1} s^{-1} H Q_0$, где Q_0 — расход среды в канале) линейно зависит от магнитного поля, то при увеличении $\omega_e \tau_e$ за счет магнитного поля, когда $\omega_i \tau_i \neq 0$, мощность генератора N , согласно (1.30), имеет абсолютный верхний предел, который определяется отношением $\omega_i \tau_i / \omega_e \tau_e$.

Выше отмечалось, что определение интегральных характеристик магнитогидродинамического генератора (а это, в соответствии с (1.29)—(1.30), эквивалентно нахождению внутреннего сопротивления) в случае произвольных значений $\omega_e \tau_e$, $\omega_i \tau_i$ и l/h связано с громоздкими вычислениями несобственных (но сходящихся) интегралов (1.22) и (1.25). Однако имеется принципиальная возможность определять характеристики генератора на модели, в качестве которой может быть использована полупроводниковая пластинка, помещенная в магнитное поле. Удобно для этих целей использовать пластинку конечных размеров, например в форме круглой шайбы с электродами, к которым подключен источник электрического тока [9]. При помощи конформного отображения легко установить соответствие между геометрическими параметрами канала и круглой полупроводниковой шайбой (такое отображение дается функцией $w = \operatorname{tg}'_{1/2} ih (1 - 4z/\pi)$). Тем самым устанавливается соответствие между внутренним сопротивлением генератора и общим сопротивлением пластинки. Полная идентичность сопротивлений достигается при соответствии физических констант полупроводника и проводящей среды в канале.

§ 3. Распределение электрического тока в канале существенно зависит от параметра Холла $\omega_e \tau_e$ и коэффициента γ . При $\gamma = 0$ и $\omega_e \tau_e \neq 0$ («скольжение» ионов отсутствует), как известно, из-за анизотропии проводимости среды линии тока искривляются в средней зоне канала и вследствие экранирования холловской э. д. с. идеальными проводниками концентрируются в основном на концах сплошных электродов. Количественная характеристика этих явлений определяется холловским углом $\pi_e = \arctg \omega_e \tau_e (0 \leq \pi_e < 1/2 \pi)$, который образуют между собой векторы напряженности электрического поля и плотности тока.

Появление ларморовского вращения ионов приводит к уменьшению холловского угла. На фиг. 4 приведены зависимости π_e от параметра Холла $\omega_e \tau_e$, построенные согласно формуле (1.17) для различных значений γ . Из рассмотрения кривых следует, что чем сильнее проявляется «скольжение» ионов, тем быстрее уменьшается холловский угол π_e с ростом параметра $\omega_e \tau_e$. Максимальные значения угла π_e принимает при выполнении условия $\omega_e \tau_e = \gamma^{-1/2}$. Вместе с уменьшением π_e исчезают анизотропия проводимости и холловская э. д. с. в канале.

Рассмотрим, как в этом случае распределяется нормальная составляющая электрического тока на электроде. Один частный случай распределения тока при $\omega_e \tau_e \neq 0$ и $\omega_i \tau_i \neq 0$ рассмотрен методом конечных разностей в работе [10].

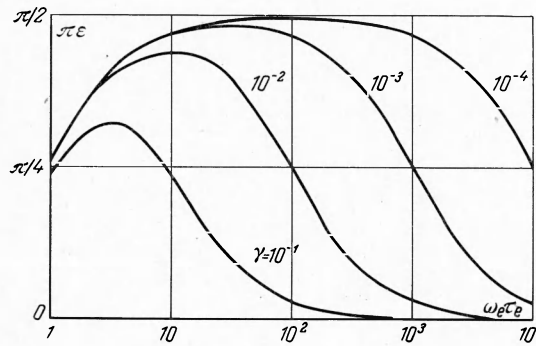
Будем считать, что $l/h \approx 0.28$. Тогда из (1.20) после преобразований получаем

$$j_y(x) = \frac{C_1 \sigma (1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2)}{2 [(1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2)^2 + \omega_e^2 \tau_e^2]^{1/2}} \frac{(1 + \operatorname{sh} x)^{-1/2+\varepsilon}}{(1 - \operatorname{sh} x)^{1/2+\varepsilon}} \quad (-0.88 \leq x \leq 0.88) \quad (3.1)$$

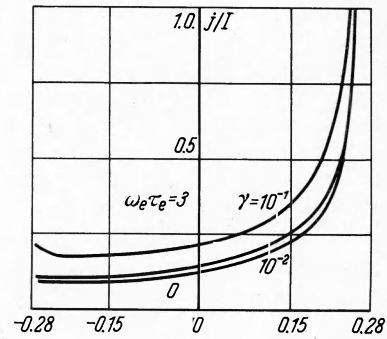
Определив постоянную из (1.21) и подставив ее в (3.1), находим

$$j_y(x) = \frac{2^{3/2} I}{B(1/4[1+2\varepsilon], 1/4[1-2\varepsilon])} \frac{(1+\operatorname{sh} x)^{-1/2+\varepsilon}}{(1-\operatorname{sh} x)^{1/2+\varepsilon}} \quad (-0.88 \leq x \leq 0.88) \quad (3.2)$$

где $B(p, q)$ — бета-функция; I — суммарный ток, протекающий через электрод.



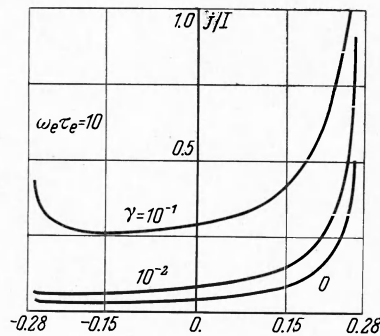
Фиг. 4



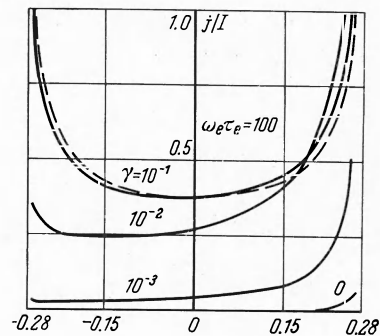
Фиг. 5

По этой формуле на фиг. 5, 6 и 7 построены кривые j/I соответственно для трех значений параметра Холла $\omega_e \tau_e = 3, 10$ и 100 при различных γ .

По мере увеличения $\omega_e \tau_e$ и γ распределение нормальной составляющей тока стремится к случаю $\omega_e \tau_e = 0$ (пунктирная кривая на фиг. 7).



Фиг. 6



Фиг. 7

При $\pi\varepsilon = 0$ и увеличении $\omega_e \tau_e$ внутреннее сопротивление генератора возрастает, что следует из (1.28)

$$\Omega_h = \frac{1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2}{\sigma_s} \frac{2K(k)}{K(k')} \quad \left(\begin{array}{l} k = \exp(-2\pi l/h) \\ k' = \sqrt{1-k^2} \end{array} \right) \quad (3.3)$$

Здесь, как и в (2.5), $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Численный множитель 2 в (3.3) можно исключить при помощи формул перехода эллиптических интегралов

$$K(k) = \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right), \quad K(k') = \frac{1}{1+k} K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

После преобразований получаем

$$\Omega_b = \frac{1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2}{\sigma_s} \frac{K(k_1)}{K(k_1')} \quad \left(\begin{array}{l} k_1 = \operatorname{th} \pi l / h \\ k_1' = \sqrt{1-k_1^2} \end{array} \right)$$

§ 4. Расчет электрического поля в многосекционном канале легко осуществить, обобщая формулы § 1.

Пусть на стенках канала расположено конечное число электродов, размеры и схема соединения которых не фиксируются. Исходные положения и постановка задачи остаются те же, что и выше. При отсутствии ларморовского вращения ионов поле в таком канале было рассчитано И. М. Толмачем и Н. Н. Ясницкой [11].

Распределение тока в канале с учетом «скольжения» ионов дается следующей формулой:

$$i(z) = i_x(x, y) - ij_y(x, y) = \frac{-(-1)^\varepsilon \sigma}{1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2 + i\omega_e \tau_e} P\left(\exp \frac{\pi z}{h}\right) \times \\ \times \prod_{k=1}^p \left[\left(\exp \frac{\pi z}{h} - \exp a_k \right) \left(\exp \frac{\pi z}{h} - \exp b_k \right) \right]^{-1/2+\varepsilon} \times \\ \times \left[\left(\exp \frac{\pi z}{h} - \exp b_k \right) \left(\exp \frac{\pi z}{h} - \exp a_k' \right) \right]^{-1/2-\varepsilon} \quad (4.1)$$

$$P\left(\exp \frac{\pi z}{h}\right) = C_{2p-1} \exp\left((2p-1) \frac{\pi z}{h}\right) + C_{2p-2} \exp\left((2p-2) \frac{\pi z}{h}\right) + \dots + C_1 \exp \frac{\pi z}{h} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\omega_e \tau_e}{1 + \gamma \omega_e^2 \tau_e^2}, \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Здесь a_k, b_k и a_k', b_k' ($k=1, \dots, 2p-1$) — концевые точки электродов на двух стенках канала. Неизвестными в формулах (4.1), (4.2) остаются действительные постоянные C_k ($k=1, \dots, 2p-1$), которыми производится конкретизация решения. Для нахождения этих постоянных необходимо учитывать схему соединения электродов с нагрузкой.

Автор благодарит А. Б. Ватажину за полезное обсуждение работы.

Поступила 9 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

- Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика, Физматгиз, 1962.
- Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, т. 116, кн. 4, стр. 59—109.
- Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
- Ватажин А. Б. Магнитогидродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1, стр. 52—58.
- Ватажин А. Б. Электрическое поле в магнитогидродинамических каналах при анизотропной проводимости. V Рижское совещание по магнитной гидродинамике, Рига, 1966, № 14, стр. 37—77.
- Shultz-Grunow F., Danzel D. L. Calculation of the electric characteristics of an MHD generator with finite electrodes by conformal mapping under full consideration of tensor conductivity and a velocity profile. Internat. Sympos. magnetohydrodynam. generation, Paris, 1964, vol. 2.
- Ватажин А. Б. К решению некоторых задач магнитогидродинамики, ПММ, 1961, т. 25 № 5, стр. 965—968.
- Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле, ПМТФ, 1963, № 2, стр. 39—54.
- Баранский П. И., Емец Ю. П. Электрическое поле в круглой полупроводниковой пластинке, помещенной в магнитное поле, ПМТФ, 1966, № 5, стр. 64—72.
- Denison T. R., Ziemer R. W. Investigation of the phenomena in crossed-field plasma accelerations. Phys.-Chem. diagnostics plasmas, Northwest Univ. Press, Evanston, 1963, p. 201—232.
- Толмач И. М., Ясницкая Н. Н. Эффект Холла в канале с секционированными электродами. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1965, № 5, стр. 91—104.