4. Золотко А. Н., Клячко Л. А. ФГВ, 1979, 15, 3, 3.
5. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде.— М.: Изд-во АН СССР, 1958.
6. Вильямс Ф. Теория горения.— М.: Наука, 1971.

г. Одесса *Поступила в редакцию 30/V 1988, после доработки — 31/X 1988*

УДК 518.12 : 539.3

В. А. Быченков, В. А. Свидинский

НЕКОРРЕКТНОСТЬ МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В МЕТОДЕ УИЛКИНСА

Для расчета нестационарных упругопластических течений широкое распространение получили разностные методы типа метода Уилкинса [1]. Модель течения в них основана на уравнениях Прандтля — Рейса, ассоциированных с условием пластичности Мизеса.

Исследование уравнений пластического течения показало, что в двумерном случае для некоторой области напряженного состояния не выполняются условия корректности постановки задачи Коши. Поскольку в общем случае пластический режим может переходить в упругий (корректный для реальных значений предела текучести), то для доказательства некорректности полной системы упругопластического течения достаточно подобрать такие начальные условия, которые не позволяют напряженному состоянию уйти с поверхности текучести и заставить малые возмущения исходного начального состояния развиваться в чисто пластическом режиме (по крайней мере, до определенной амплитуды). Некорректность полной системы уравнений для таких состояний подтвердилась в расчетах и проявилась как локальная неустойчивость разностной схемы.

Полная система уравнений упругопластического течения

В настоящее время построены достаточно совершенные модели упругопластического деформирования. Тем не менее большой класс практически важных задач динамики решается с помощью разностных методов на основе простой модели пластического течения Прандтля — Рейса с условием пластичности Мизеса [1—4]. Выпишем эти уравнения для системы прямоугольных декартовых координат x_i $(i = 1, 2, 3)$.

Используя определение скорости изменения тензора напряжений в форме Яумаиа, уравнение для девиатора S_{ij} симметричного тензора напряжений σ_{ij} представим в виде

$$\dot{S}_{ij} + \lambda S_{ij} = 2\mu \dot{e}_{ij} + \omega_{ik} S_{kj} + \omega_{jk} S_{ki},$$
$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{3\mu}{Y^2} S_{ij} \dot{e}_{ij}, & \text{если } S_{ij}S_{ij} = \dfrac{2}{3} Y^2 \text{ и } S_{ij}\dot{e}_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } S_{ij}S_{ij} < \dfrac{2}{3} Y^2 \text{ или } S_{ij}\dot{e}_{ij} \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Y — предполагаемый постоянным предел текучести; μ — модуль сдвига; $\dot{e}_{ij}$ — девиатор тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$; $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ — тензор вращения; $f_i = \frac{\partial j}{\partial x_i}$; $S = S_{,t} + u_k S_{,k}$; u_i — вектор массовой скорости; t — время; по одинаковым индексам производится суммирование.

Уравнение состояния, связывающее давление p, удельный объем v и удельную внутреннюю энергию E, возьмем для упрощения в виде

$$p = p(v). \tag{2}$$

Предполагается, что модуль сдвига μ удовлетворяет условию $\mu \leqslant 3/2 \cdot K$; $K = -v\frac{dp}{dv}$ — модуль объемного сжатия. Система (1), (2) замыкается уравнениями сохранения импульса и массы

$$\dot{u}_i = v(-p_{,i} + S_{ij,j}), \quad \dot{v} = v\dot{\varepsilon}_{ii}. \tag{3}$$

Исследование корректности уравнений плоского двумерного пластического течения

Введем вектор решения $U = \{u_x, u_y, v, S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}\}$, зависящий от координат x, y и времени t, и запишем систему (1) — (3) в виде

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}. \tag{4}$$

Вид матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ зависит от режима течения. Как для упругого, так и для пластического деформирования (4) — есть система дифференциальных уравнений типа Коши — Ковалевской. Условия корректности таких систем с необходимостью требуют вещественности всех характеристик. Условие вещественности характеристик для упругих деформаций можно, согласно [5], выразить в виде неравенства

$$\left|\frac{\sigma_{nn} - \sigma_{\tau\tau}}{2}\right| \leqslant \mu,$$

где σ_{nn}, $\sigma_{\tau\tau}$ — главные напряжения. В упругопластическом течении при условии пластичности Мизеса это неравенство удовлетворяется при необременительном ограничении на предел текучести

$$Y \leqslant \sqrt{3}\mu. \tag{5}$$

Для исследования корректности пластического течения без ограничения общности направления координатных осей можно выбрать совпадающими с главными осями тензора напряжений для данной лагранжевой частицы. Тогда уравнениям пластического течения будут отвечать матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в форме:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -u_x & 0 & K & v & 0 & 0 \\ 0 & -u_x & 0 & 0 & 0 & v \\ v & 0 & -u_x & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & -u_x & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & -u_x & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & -u_x \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -u_y & 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & -u_y & K & 0 & v & 0 \\ 0 & v & -u_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & -u_y & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & -u_y & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_y \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}\mu - MS_{xx}^2, \quad \beta_1 = -\frac{2}{3}\mu - MS_{xx}S_{yy},$$

$$\alpha_2 = -\frac{2}{3}\mu - MS_{xx}S_{yy}, \quad \beta_2 = \frac{4}{3}\mu - MS_{yy}^2,$$

$$\alpha_3 = \mu + \frac{1}{2}(S_{xx} - S_{yy}), \quad \beta_3 = \mu - \frac{1}{2}(S_{xx} - S_{yy}), \quad M = \frac{3\mu}{Y^2}.$$

При этом главные значения S_{xx} и S_{yy} девиатора тензора напряжений удовлетворяют условию текучести

$$S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{xx}S_{yy} = \frac{1}{3}Y^2 \tag{7}$$

и выполняется условие

$$S_{ij}\dot{e}_{ij} \equiv S_{xx}u_{x,x} + S_{yy}u_{y,y} > 0. \tag{8}$$

Для корректности уравнений (4), согласно [6], необходимо потребовать, чтобы любому направлению, задаваемому единичным вектором $\bar{n} = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$, отвечали действительные корни z характеристического уравнения

$$\|z\mathbf{I} + \mathbf{A}\cos\varphi + \mathbf{B}\sin\varphi\| = 0,$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Матрицам (6) соответствует характеристическое уравнение шестой степени относительно переменной $F = z - u_x\cos\varphi - u_y\sin\varphi$

$$F^2(F^4 - bvF^2 + cv^2) = 0. \tag{9}$$

Если обозначить через $\bar{\tau} = \{-\sin\varphi, \cos\varphi\}$ единичный вектор, ортогональный вектору $\bar{n}$, и использовать формулы преобразования компонент тензора при повороте осей, то получим следующие выражения для коэффициентов уравнения (9):

$$b = K + \frac{7}{3}\mu - M\left(S_{nn}^2 + S_{n\tau}^2\right) + \frac{1}{2}(S_{nn} - S_{\tau\tau}),$$

$$c = K\mu + \frac{4}{3}\mu^2 - KMS_{n\tau}^2 - \mu M\left(S_{nn}^2 + \frac{4}{3}S_{n\tau}^2\right) + \tag{10}$$

$$+\left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{1}{2}(S_{nn} - S_{\tau\tau}) - M\frac{1}{2}(S_{nn} - S_{\tau\tau})S_{nn}^2 - MS_{n\tau}^2S_{nn}.$$

Корни уравнения (9) вещественны тогда и только тогда, когда $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $b^2 - 4c \geqslant 0$.

Для анализа коэффициентов (10) в зависимости от ориентации $\bar{n}$ относительно главных осей тензора S_{ij}, характеризуемого углом φ, и от места главных значений $S_1 = S_{xx}$, $S_2 = S_{yy}$ на поверхности текучести (7) введем параметризацию эллипса (7) в фазовой плоскости S_1, S_2. Превращая эллипс в окружность с помощью сжатия по большой оси и параметризуя полученную окружность полярным углом θ, отсчитываемым от большой полуоси, получим представление кривой (7)

$$\begin{aligned} S_1 &= Y/3\cdot(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta), \\ S_2 &= Y/3\cdot(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta),\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi. \end{aligned} \tag{11}$$

Соотношения (11) определяют все возможные главные значения S_{ij} при пластическом течении. Запишем компоненты этого тензора на площадках с нормалями $\bar{n}$ и $\bar{\tau}$

$$\begin{aligned} S_{nn} &= Y/3\cdot(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\cos 2\varphi), \\ S_{\tau\tau} &= Y/3\cdot(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta\cos 2\varphi), \\ S_{n\tau} &= -Y/3\cdot\sqrt{3}\cos\theta\sin 2\varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

а также выражения для коэффициентов b и c из (10)

$$b = K + \frac{4}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu\sin^2\theta + \mu\xi\cos\theta\left(\chi - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right),$$

$$c/\mu = (K + \mu)\sin^2\theta - \chi\frac{\mu\sqrt{3}}{3}\sin\theta\cos^2\theta +$$

$$+\xi\cos\theta\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\mu\sin\theta + \chi\left(K + \frac{\mu}{3} + \frac{2}{3}\mu\sin^2\theta\right)\right] + \tag{13}$$

$$+\xi^2\cos^2\theta\left[K + \frac{\mu}{3} - \chi\frac{\mu\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right],$$

$\xi = \cos 2\varphi$; $\chi = Y/\sqrt{3}\mu$ — безразмерный предел текучести. Здесь слагаемые, содержащие множитель χ, порождены присутствием в (1) тензора вращения ω_{ij}.

Анализ показывает, что при выполнении ограничения (5) на предел текучести, т. е. при $\chi \leqslant 1$, неравенства $b \geqslant 0$, $b^2 - 4c \geqslant 0$ выполняются во всей области изменения параметра φ $(-1 \leqslant \xi \leqslant 1)$ при любом фиксированном значении θ. А неравенство $c \geqslant 0$ нарушается в некоторой окрестности вершин эллипса $\sin\theta = 0$. Для реальных значений Y безразмерное его значение $\chi \leqslant 0{,}1$. В этих условиях можно получить оценку «плохих» участков на эллипсе текучести

$$\sin^2\theta \leqslant \frac{3}{16}\frac{\chi^2}{1-\nu^2}, \tag{14}$$

где ν — коэффициент Пуассона в соотношении $\mu = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K$.

Для S_{ij}, лежащих па вершинах большой оси эллипса $(\sin\theta = 0)$, выражение для коэффициента c из (13) приобретает вид

$$c = \mu\left(K + \frac{\mu}{3}\right)\xi(\xi + \chi\cos\theta) = \mu\left(K + \frac{\mu}{3}\right)\xi(\xi \pm \chi)$$

с экстремальным по ξ значением $c = -\mu\left(K + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\chi^2}{4} < 0$. Отрицательность c в (9) приводит к появлению чисто мнимых характеристических корней.

С физической точки зрения корни характеристического уравнения определяют скорость распространения малых (звуковых) возмущений по заданному направлению вектора $\bar{n}$. В частности такое уравнение получается из представления малых возмущений в виде разложения по бегущим гармоническим волнам $\delta\bar{U} = \delta U_0 e^{i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi - zt)}$. Наличие чисто мнимых значений скоростей звука порождает возмущения в форме стоячих волн с экспоненциальным во времени ростом амплитуды. Решение эволюционной задачи при таких начальных условиях неустойчиво, по крайней мере, локально в пространстве и во времени. Факт роста возмущений зарегистрирован в расчетах по разностным методикам [3, 4] пластических задач в специальной постановке.

Пример неустойчивого решения

Корректность уравнений нарушается лишь для определенного класса начальных условий. Обнаружение и трактовка следствий этого нарушения в расчетах по разностным методам затруднены по разным причинам (наличие диссипативных механизмов конкретной разностной схемы, переход в упругий режим за счет выросших возмущений, быстрый выход из области некорректности на поверхности текучести). Поэтому желательно найти решение, описывающее течение с большими пластическими деформациями и удовлетворяющее сколь угодно долго условию некорректности.

Возьмем начальное напряженное состояние однородным и отвечающим положению главных значений в вершине эллипса текучести $\theta = 0$. Поле скоростей будем считать стационарным. Тогда, предполагая существование решения при условиях $S_{xx} = Y/\sqrt{3}$, $S_{yy} = -Y/\sqrt{3}$, $S_{xy} = 0$, $v = v_0 = \mathrm{const}$, получаем для поля скоростей $\bar{v} - \{u_x, u_y\}$ систему уравнений

$$\begin{gathered} u_x u_{x,x} + u_y u_{x,y} = 0, \ u_x u_{y,x} + u_y u_{y,y} = 0, \\ u_{x,x} + u_{y,y} = 0, \ (1+\chi)u_{y,x} + (1-\chi)u_{x,y} = 0, \\ u_{x,x} - u_{y,y} > 0, \ \chi = Y/\sqrt{3}\mu < 1. \end{gathered} \tag{15}$$

Переходя к функции вихря $\Omega\left(u_x = \frac{\partial\Omega}{\partial y},\ u_y = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)$, находим общее решение системы (15):

$$\Omega = \Omega(x\cos\psi + y\sin\psi), \tag{16}$$

где $\cos 2\psi = -\chi$; $\Omega = \Omega(\xi)$ — произвольная функция, удовлетворяющая неравенству $\frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \sin 2\psi > 0$. Простейший вид функции $\Omega(\xi)$ с $\Omega'' = \mathrm{const}$ дает линейную зависимость вектора $\bar{v}$ от переменной $\xi = x\cos\psi + y\sin\psi$. Причем векторное поле $\bar{v}(x, y)$ параллельно прямым $\xi = \mathrm{const}$.

Для угла ψ в первом квадранте $\left(\cos\psi = \sqrt{\frac{1-\chi}{2}},\ \sin\psi = \sqrt{\frac{1+\chi}{2}}\right)$ такое поле скоростей с точностью до постоянного вектора находим из выражений:

$$\begin{aligned} u_x &= v_0 \sin\psi(x\cos\psi + y\sin\psi)/L, \\ u_y &= -v_0\cos\psi(x\cos\psi + y\sin\psi)/L, \end{aligned} \tag{17}$$

v_0, L — константы; $v_0/L > 0$.

В системе координат, повернутой относительно главных осей тензора S_{ij} соответствующим образом, полученное решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} &u_x = 0,\ u_y = v_0/L \cdot x,\ v = v_0 = \mathrm{const}, \\ &S_{xx} = -Y^2/3\mu = -Y/\sqrt{3}\cdot\chi,\ S_{yy} = Y/\sqrt{3}\cdot\chi, \\ &S_{xy} = \pm\sqrt{1-\chi^2}\cdot Y/\sqrt{3},\ S_{xy}\cdot v_0/L > 0,\ v_0/L = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{18}$$

Решение (18) может служить в качестве теста для экспериментального подтверждения факта неустойчивости и для исследования характера проявления неустойчивости в той или иной разностной методике.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уилкинс М. Л.** // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1976.
2. **Майнчен Д., Сак С.** // Там же. М.: Мир, 1976.
3. **Быченков В. А., Гаджиева В. В.** Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978.— Вып. 2(2).
4. **Бащуров В. В., Свидинский В. А., Крюкова Т. Ф.** // Там же.
5. **Бащуров В. В., Свидинский В. А.** ЧММСС, 1982, **13**, 2.
6. **Курант Р.** Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.

г. Челябинск *Поступила в редакцию 12/V 1988*

УДК 621.039.634 : 539.8 + 621.039.634 : 533.6.013.42

А. И. Белов

НЕИДЕАЛЬНОСТИ НАГРУЗКИ ВО ВЗРЫВНЫХ КАМЕРАХ

Большинство опубликованных к настоящему времени работ, посвященых расчету динамики взрывных камер, базируется на предельно упрощенном представлении нагрузки, основу которого составляет условие равномерности давления ударной волны (УВ) взрыва. Такое допущение также априорно принимается и в интерпретациях экспериментов. Между тем использование подобной идеализации не имеет достаточных оснований, поскольку, с одной стороны, в литературе отсутствуют данные, характеризующие пространственное распределение нагрузок в реальных системах заряд — оболочка, с другой — недостаточно изучен вопрос о влиянии неравномерностей нагрузки на динамическую реакцию силовых оболочек камер.

Для сферических систем заряд — оболочка можно выделить две основные причины нарушения идеальности воздействия взрыва. Первая связана с погрешностями установки заряда. Динамика сферической камеры в случае эксцентричного положения заряда исследована в [1—3].