

УДК 532.135, 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН МЕЖДУ ДВУМЯ РАЗЛИЧНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ, НАСЫЩАЮЩИМИ ПОРИСТЫЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Р. Кумар, С. Кумар, А. Миглэни*

Университет г. Курукшетра, 136119 Курукшетра, Индия

* Университет Чаудхари Деви Лал, Сирса, Индия

E-mails: rajneesh_kuk@rediffmail.com, sanjaygarg_153@yahoo.com,

miglani_aseem@rediffmail.com

Проведено исследование отражения и прохождения плоских волн между двумя различными жидкостями, насыщающими пористые полупространства, в случае когда продольные и трансверсальные волны падают под углом к поверхности раздела. Получены амплитудные коэффициенты различных отраженных и проходящих волн, а также зависимости амплитудных коэффициентов от угла падения. Рассмотрен частный случай отражения волн от свободной поверхности жидкости, насыщающей пористые полупространства.

Ключевые слова: пористый материал, амплитудные коэффициенты, отражение, прохождение, продольные и трансверсальные волны.

Введение. Интерес к исследованию динамических параметров пористых сред обусловлен их применением в геофизике, механике сыпучих тел т. д. Классическая теория, согласно которой жидкость, насыщающая пористую среду, является однофазной, не описывает механическое поведение многофазных пористых материалов (особенно в случае, когда поры заполнены жидкостью), используемых при строительстве большинства современных сооружений. Вследствие различия механизмов движения и свойств твердых и жидких фаз в этих материалах, а также наличия пор, имеющих сложную структуру, изучение поведения жидкости, насыщающей пористую среду, является очень сложной задачей.

С использованием результатов работ [1, 2] в [3] предложена общая теория трехмерного уплотнения (отвердевания). Поскольку грунт является сжимаемой средой, вода, содержащаяся в порах, считалась несжимаемой. В работах [4, 5] предложена теория распространения волн напряжения в пористых упругих твердых телах, содержащих сжимаемую вязкую жидкость, а также показано, что наряду с волнами сдвига одного типа существуют волны сжатия двух типов (“быстрая” и “медленная”). Модель Био получила широкое распространение, а некоторые результаты были положены в основу исследований, проводимых в акустике, геофизике и т. д.

С использованием изложенной в работе [6] модели, основанной на концепции относительных объемов с учетом коэффициентов пористости поверхности, в [7–9] развита теория, согласно которой все компоненты пористой среды являются несжимаемыми. Имеются основания предполагать, что компоненты многих жидкостей, насыщающих пористые среды, являются несжимаемыми. Кроме того, в пустом пористом твердом теле, описываемом с помощью классической теории, изменение объема происходит вследствие изменения пористости при распространении продольных волн. Предположение о несжимаемости компонентов среды не только соответствует свойствам материалов, используемых в инженерной

практике, но и позволяет избежать введения большого количества сложных материальных параметров. Таким образом, модель [7–9] удовлетворяет требованиям, необходимым для проведения дальнейших исследований. С помощью теории [7–9] в работах [10–15] изучен ряд задач о распространении волн в жидкости, насыщающей несжимаемые пористые среды.

Исследование отражения сейсмических волн в насыщенных жидкостью пористых твердых телах представляет интерес при решении задач сейсмологии и геофизики (разведка углеводородов, грунтовой воды, минерального сырья и т. д.). С использованием теории Био в работах [16, 17] изучено отражение волн от свободной водопроницаемой границы и получено выражение для коэффициентов отражения. Однако в [16, 17] не был выполнен численный расчет. В [18] изучалось отражение волн от свободной границы микропорного насыщенного жидкостью пористого твердого тела и вычислены коэффициенты отражения. В [19] рассмотрена задача о прохождении продольных волн через плоскую поверхность раздела между двумя разнородными пористыми упругими твердыми полупространствами. Отражение и прохождение упругих волн в упругом и пористом твердых телах, насыщенных двумя несмешивающимися жидкостями, исследованы в работе [20]. В [21] изучена задача об отражении плоских волн на границах жидкости, заполняющей упругое пористое полупространство.

В данной работе исследована задача об отражении и прохождении плоских волн на поверхности раздела между двумя жидкостями, насыщающими несжимаемые пористые полупространства. Получены коэффициенты отражения для волн, отраженных от свободной поверхности, а также зависимости компонент тензора напряжений от угла падения продольных и трансверсальных волн для двух жидкостей, заполняющих несжимаемые пористые полупространства.

1. Математическая модель. Согласно работе [9] уравнения, определяющие деформацию несжимаемой пористой среды, насыщенной невязкой жидкостью, в отсутствие массовых сил, имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\eta^S \dot{\mathbf{u}}_S + \eta^F \dot{\mathbf{u}}_F) &= 0, \\ (\lambda^S + \mu^S) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_S) + \mu^S \nabla^2 \mathbf{u}_S - \eta^S \nabla p - \rho^S \ddot{\mathbf{u}}_S + S_V (\dot{\mathbf{u}}_F - \dot{\mathbf{u}}_S) &= 0, \\ \eta^F \nabla p + \rho^F \ddot{\mathbf{u}}_F + S_V (\dot{\mathbf{u}}_F - \dot{\mathbf{u}}_S) &= 0; \\ T_E^S &= 2\mu^S E_S + \lambda^S (E_S \cdot I) I, \quad E_S = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u}_S + \text{grad}^T \mathbf{u}_S), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{u}_i , $\dot{\mathbf{u}}_i$, $\ddot{\mathbf{u}}_i$ ($i = F, S$) — смещение, скорость и ускорение жидкости и твердых фаз соответственно; p — эффективное давление несжимаемой жидкости в поре; ρ^S , ρ^F — плотности твердого тела и жидкости соответственно; T_E^S — напряжение в твердой фазе; E_S — линеаризованный лагранжев тензор деформаций; λ^S , μ^S — макроскопические параметры Ламе для пористого твердого тела; η^S , η^F — относительные объемы, удовлетворяющие условию $\eta^S + \eta^F = 1$.

В случае изотропной проницаемости тензор S_V , описывающий взаимодействие между твердым телом и жидкостью, определяется по формуле [11]

$$S_V = \frac{(\eta^F)^2 \gamma^{FR}}{K^F} I,$$

где γ^{FR} — эффективная плотность жидкости; K^F — коэффициент проницаемости Дарси для пористой среды.

2. Формулировка задачи. Рассмотрим две жидкости, заполняющие несжимаемые пористые полупространства, имеющие общую границу в виде плоской поверхности $z = 0$

в прямоугольной декартовой системе координат $OXYZ$. Ось Z направлена вниз. В двумерной задаче выражение для вектора смещения \mathbf{u}_i имеет вид

$$\mathbf{u}_i = (u^i, 0, w^i), \quad i = F, S. \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнения (1), получаем следующие уравнения для жидкости, насыщающей несжимаемую пористую среду:

$$\begin{aligned} (\lambda^S + \mu^S) \frac{\partial \theta^S}{\partial x} + \mu^S \nabla^2 u^S - \eta^S \frac{\partial p}{\partial x} - \rho^S \frac{\partial^2 u^S}{\partial t^2} + S_V \left(\frac{\partial u^F}{\partial t} - \frac{\partial u^S}{\partial t} \right) &= 0, \\ (\lambda^S + \mu^S) \frac{\partial \theta^S}{\partial z} + \mu^S \nabla^2 w^S - \eta^S \frac{\partial p}{\partial z} - \rho^S \frac{\partial^2 w^S}{\partial t^2} + S_V \left(\frac{\partial w^F}{\partial t} - \frac{\partial w^S}{\partial t} \right) &= 0, \\ \eta^F \frac{\partial p}{\partial x} + \rho^F \frac{\partial^2 u^F}{\partial t^2} + S_V \left(\frac{\partial u^F}{\partial t} - \frac{\partial u^S}{\partial t} \right) &= 0, \\ \eta^F \frac{\partial p}{\partial z} + \rho^F \frac{\partial^2 w^F}{\partial t^2} + S_V \left(\frac{\partial w^F}{\partial t} - \frac{\partial w^S}{\partial t} \right) &= 0, \\ \eta^S \left(\frac{\partial^2 u^S}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w^S}{\partial z \partial t} \right) + \eta^F \left(\frac{\partial^2 u^F}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w^F}{\partial z \partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\theta^S = \frac{\partial u^S}{\partial x} + \frac{\partial w^S}{\partial z}.$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} x' = \frac{\omega^*}{C_1} x, \quad z' = \frac{\omega^*}{C_1} z, \quad t' = \omega^* t, \quad u'^S = \frac{\lambda^S + 2\mu^S}{E} \frac{\omega^*}{C_1} u^S, \quad w'^S = \frac{\lambda^S + 2\mu^S}{E} \frac{\omega^*}{C_1} w^S, \\ u'^F = \frac{\lambda^S + 2\mu^S}{E} \frac{\omega^*}{C_1} u^F, \quad w'^F = \frac{\lambda^S + 2\mu^S}{E} \frac{\omega^*}{C_1} w^F, \quad p' = \frac{p}{E}, \quad T'_{31} = \frac{T_{31}}{E}, \quad T'_{33} = \frac{T_{33}}{E}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь E — модуль Юнга для твердой фазы; ω^* — константа, имеющая размерность частоты; C_1 — скорость продольной волны, распространяющейся в жидкости, заполняющей несжимаемую пористую среду:

$$C_1 = \sqrt{\frac{(\eta^F)^2 (\lambda^S + 2\mu^S)}{(\eta^F)^2 \rho^S + (\eta^S)^2 \rho^F}}. \quad (5)$$

В случае если поры отсутствуют или газ заполняет поры, величина ρ^F очень мала по сравнению с ρ^S и ею можно пренебречь. Тогда из (5) следует выражение

$$C_0 = \sqrt{\frac{\lambda^S + 2\mu^S}{\rho^S}},$$

которое определяет скорость продольной волны, распространяющейся в несжимаемом пустом пористом твердом теле, объем которого изменяется вследствие изменения пористости (известный результат классической теории упругости). В несжимаемом непористом твердом теле $\eta^F \rightarrow 0$, тогда из (5) следует $C_1 = 0$, что приемлемо с точки зрения физики, поскольку продольная волна не может распространяться в несжимаемой среде.

Компоненты вектора смещения u^i и w^i связаны с безразмерными компонентами потенциала φ^i и ψ^i соотношениями

$$u^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} + \frac{\partial \psi^i}{\partial z}, \quad w^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} - \frac{\partial \psi^i}{\partial x}, \quad i = F, S. \quad (6)$$

Подставляя безразмерные величины (4) в уравнения (3), с помощью (6) получаем уравнения

$$\nabla^2 \varphi^S - \eta^S p - \delta_1^2 \frac{\partial^2 \varphi^S}{\partial t^2} - \delta_2 \left(\frac{\partial \varphi^F}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^S}{\partial t} \right) = 0; \quad (7)$$

$$\delta^2 \nabla^2 \psi^S - \delta_1^2 \frac{\partial^2 \psi^S}{\partial t^2} + \delta_2 \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial t} - \frac{\partial \psi^S}{\partial t} \right) = 0; \quad (8)$$

$$\eta^F p + \delta_1^2 \frac{\rho^F}{\rho^S} \frac{\partial^2 \varphi^F}{\partial t^2} + \delta_2 \left(\frac{\partial \varphi^F}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^S}{\partial t} \right) = 0; \quad (9)$$

$$\delta_1^2 \frac{\rho^F}{\rho^S} \frac{\partial^2 \psi^F}{\partial t^2} + \delta_2 \left(\frac{\partial \psi^F}{\partial t} - \frac{\partial \psi^S}{\partial t} \right) = 0; \quad (10)$$

$$\eta^S \nabla^2 \varphi^S + \eta^F \nabla^2 \varphi^F = 0, \quad (11)$$

где

$$\delta_1 = \frac{C_1}{C_0}, \quad \delta = \frac{\beta_0}{C_0}, \quad \beta_0 = \sqrt{\frac{\mu^S}{\rho^S}}, \quad \delta_2 = \frac{S_V C_1^2}{w^* \rho^S C_0^2}.$$

С использованием начальных условий

$$\begin{aligned} u^S(x, z, 0) = 0, \quad u^F(x, z, 0) = 0, \quad w^S(x, z, 0) = 0, \quad w^F(x, z, 0) = 0, \\ \frac{\partial u^S}{\partial t}(x, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^F}{\partial t}(x, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial w^S}{\partial t}(x, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial w^F}{\partial t}(x, z, 0) = 0 \end{aligned}$$

путем интегрирования уравнения (11) можно получить потенциал φ^F в виде

$$\varphi^F = -\frac{\eta^S}{\eta^F} \varphi^S. \quad (12)$$

С помощью (12) уравнения (7), (9) записываются в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi^S - \frac{\partial^2 \varphi^S}{\partial t^2} - \frac{\delta_2}{(\eta^F)^2} \frac{\partial \varphi^S}{\partial t} = 0, \\ (\eta^F)^2 p - \eta^S \delta_1^2 \frac{\rho^F}{\rho^S} \frac{\partial^2 \varphi^S}{\partial t^2} - \delta_2 \frac{\partial \varphi^S}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Задача об отражении и прохождении волн. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся через среду М1, которая находится в области $Z > 0$, и падающую на плоскость $z = 0$ под углом θ_0 с нормалью к поверхности. Каждой падающей волне, состоящей из продольной и трансверсальной волн, соответствуют две отраженные волны в среде М1 и две проходящие волны в среде М2, находящейся в области $Z < 0$. Далее все переменные в области $Z > 0$ (среда М1) записываются без черты, а переменные в области $Z < 0$ (среда М2) — с чертой (рис. 1).

Решение системы уравнений (8), (10), (12), (13) будем искать в виде

$$(\varphi^S, \varphi^F, \psi^S, \psi^F, p) = (\varphi_1^S, \varphi_1^F, \psi_1^S, \psi_1^F, p_1) \exp [ik(x \sin \theta - z \cos \theta) - i\omega t], \quad (14)$$

где k — волновое число; ω — комплексная круговая частота.

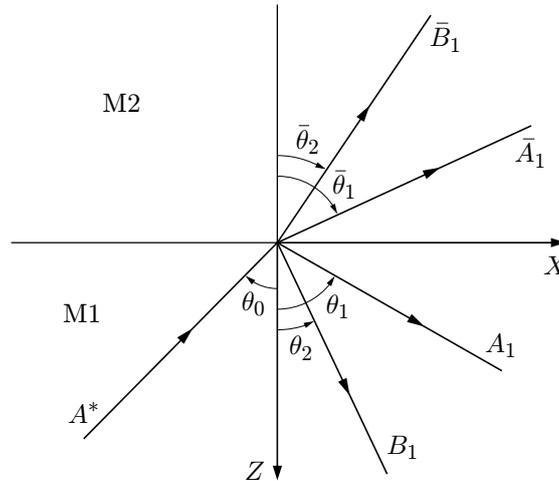


Рис. 1. Геометрия задачи

Подставляя (14) в уравнения (8), (10), (12), (13), получаем два квадратных уравнения для скорости волн V :

$$V^2 + AV + B = 0; \tag{15}$$

$$V^2 + CV + D = 0. \tag{16}$$

Здесь

$$A = \frac{i\delta_2}{k(\eta^F)^2}, \quad B = -1, \quad C = \frac{\delta_2}{k\delta_1^2} \left(i + \frac{\delta_2\rho^S}{\delta_1^2\rho^F\omega + i\delta_2\rho^S} \right), \quad D = -\frac{\delta^2}{\delta_1^2}.$$

Корнями уравнения (15) являются скорости продольных волн

$$V_1 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

корнями уравнения (16) — скорости трансверсальных волн

$$V_2 = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2}$$

(знак “+” соответствует падающей волне, знак “-” — отраженной волне).

4. Граничные условия. Граничные условия на поверхности раздела $z = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} (T_{33}^S - p)_{M1} &= (T_{33}^S - p)_{M2}, & (T_{31}^S)_{M1} &= (T_{31}^S)_{M2}, \\ (u^S)_{M1} &= (u^S)_{M2}, & (w^S)_{M1} &= (w^S)_{M2}. \end{aligned} \tag{17}$$

В силу (14) выберем значения $\varphi^S, \varphi^F, \psi^S, \psi^F, p$, удовлетворяющие граничным условиям для сред M1 и M2:

— для среды M1

$$\begin{aligned} (\varphi^S, \varphi^F, p) &= (1, m_1, m_2) \{ A_{01} \exp [ik_1(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0) - i\omega_1 t] + \\ &\quad + A_1 \exp [ik_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1) - i\omega_1 t] \}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} (\psi^S, \psi^F) &= (1, m_3) \{ B_{01} \exp [ik_2(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0) - i\omega_2 t] + \\ &\quad + B_1 \exp [ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2) - i\omega_2 t] \}; \end{aligned}$$

— для среды М2

$$\begin{aligned}(\bar{\varphi}^S, \bar{\varphi}^F, \bar{p}) &= (1, \bar{m}_1, \bar{m}_2) \{ \bar{A}_1 \exp [i\bar{k}_1(x \sin \bar{\theta}_1 - z \cos \bar{\theta}_1) - i\bar{\omega}_1 t] \}, \\(\psi^S, \psi^F) &= (1, \bar{m}_3) \{ \bar{B}_1 \exp [i\bar{k}_2(x \sin \bar{\theta}_2 - z \cos \bar{\theta}_2) - i\bar{\omega}_2 t] \},\end{aligned}\quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}m_1 &= -\frac{\eta^S}{\eta^F}, & m_2 &= -\frac{\eta^S \delta_1^2 \rho^F \omega^2 + i\omega \delta_2 \rho^S}{(\eta^F)^2 \rho^S}, & m_3 &= \frac{i\delta_2 \rho^S}{\delta_1^2 \rho^F \omega + i\delta_2 \rho^S}, \\ \bar{m}_1 &= -\frac{\bar{\eta}^S}{\bar{\eta}^F}, & \bar{m}_2 &= -\frac{\bar{\eta}^S \bar{\delta}_1^2 \bar{\rho}^F \omega^2 + i\omega \delta_2 \bar{\rho}^S}{(\bar{\eta}^F)^2 \bar{\rho}^S}, & \bar{m}_3 &= \frac{i\bar{\delta}_2 \bar{\rho}^S}{\bar{\delta}_1^2 \bar{\rho}^F \omega + i\bar{\delta}_2 \bar{\rho}^S},\end{aligned}$$

A_{01}, B_{01} — амплитуды падающих продольных и трансверсальных волн соответственно; A_1, B_1 и \bar{A}_1, \bar{B}_1 — амплитуды соответствующих отраженных и проходящих волн.

Для того чтобы граничные условия были выполнены, нужно применить обобщенный закон Снеллиуса

$$\frac{\sin \theta_0}{V_0} = \frac{\sin \theta_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_2}{V_2} = \frac{\sin \bar{\theta}_1}{\bar{V}_1} = \frac{\sin \bar{\theta}_2}{\bar{V}_2}, \quad (20)$$

где

$$k_1 V_1 = k_2 V_2 = \bar{k}_1 \bar{V}_1 = \bar{k}_2 \bar{V}_2 = \omega \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (21)$$

В случае продольной волны

$$V_0 = V_1, \quad \theta_0 = \theta_1, \quad (22)$$

в случае трансверсальной волны

$$V_0 = V_2, \quad \theta_0 = \theta_2. \quad (23)$$

Подставляя потенциалы, определяемые уравнениями (18), (19), в граничные условия (17) и используя уравнения (20)–(23), получаем систему четырех неоднородных уравнений

$$\sum_{i=1}^4 a_{ij} Z_j = Y_i, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= -(r_1 \sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) k_1^2 - m_2, & a_{12} &= -(r_1 - 1)(\sin \theta_2 \cos \theta_2) k_2^2, \\ a_{13} &= (r_3 \sin^2 \bar{\theta}_1 + r_4 \cos^2 \bar{\theta}_1) \bar{k}_1^2 + \bar{m}_2, & a_{14} &= (r_4 - r_3)(\sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_2) \bar{k}_2^2, \\ a_{21} &= (-2r_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1) k_1^2, & a_{22} &= r_2(\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2) k_2^2, & a_{23} &= (-2r_5 \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_1) \bar{k}_1^2, \\ a_{24} &= r_5(\cos^2 \bar{\theta}_2 - \sin^2 \bar{\theta}_2) \bar{k}_2^2, & a_{31} &= ik_1 \sin \theta_1, & a_{32} &= ik_2 \cos \theta_2, & a_{33} &= -i\bar{k}_1 \sin \bar{\theta}_1, \\ a_{34} &= i\bar{k}_2 \cos \bar{\theta}_2, & a_{41} &= ik_1 \cos \theta_1, & a_{42} &= -ik_2 \sin \theta_2, & a_{43} &= i\bar{k}_1 \cos \bar{\theta}_1, & a_{44} &= i\bar{k}_2 \sin \bar{\theta}_2, \\ r_1 &= \frac{\lambda^S}{\lambda^S + 2\mu^S}, & r_2 &= \frac{\mu^S}{\lambda^S + 2\mu^S}, & r_3 &= \frac{\bar{\lambda}^S}{\bar{\lambda}^S + 2\bar{\mu}^S}, & r_4 &= \frac{\bar{\lambda}^S + \bar{\mu}^S}{\bar{\lambda}^S + 2\bar{\mu}^S}, & r_5 &= \frac{\bar{\mu}^S}{\bar{\lambda}^S + 2\bar{\mu}^S}, \\ Z_1 &= \frac{A_1}{A^*}, & Z_2 &= \frac{B_1}{A^*}, & Z_3 &= \frac{\bar{A}_1}{A^*}, & Z_4 &= \frac{\bar{B}_1}{A^*}.\end{aligned}$$

В случае падающей продольной волны ($A^* = A_{01}, B_{01} = 0$) правые части системы уравнений (24) имеют вид

$$Y_1 = -a_{11}, \quad Y_2 = a_{21}, \quad Y_3 = -a_{31}, \quad Y_4 = a_{41},$$

в случае падающей трансверсальной волны ($A^* = B_0, A_{01} = 0$) —

$$Y_1 = a_{12}, \quad Y_2 = -a_{22}, \quad Y_3 = a_{32}, \quad Y_4 = -a_{42}$$

(Z_1, Z_2 — амплитудные коэффициенты продольной волны, отраженной под углом θ_1 , и трансверсальной волны, отраженной под углом θ_2 ; Z_3, Z_4 — амплитудные коэффициенты продольной волны, проходящей под углом $\bar{\theta}_1$, и трансверсальной волны, проходящей под углом $\bar{\theta}_2$ (см. рис. 1).

5. Частные случаи поведения волн на поверхности раздела. Ниже рассматриваются два случая поведения волн на поверхности раздела.

5.1. *Отражение и прохождение волн на поверхности раздела между жидкостью, насыщающей пористое полупространство, и упругим полупространством.* В случае если плотность ρ^F очень мала по сравнению с ρ^S и ею можно пренебречь, среда М2 представляет собой упругое полупространство. Тогда амплитудные коэффициенты могут быть получены из системы (24), в которой коэффициенты $a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_{13} &= (r_6 \sin^2 \bar{\theta}_1 + r_7 \cos^2 \bar{\theta}_1) \bar{k}_1^2, & a_{14} &= (r_7 - r_6) (\sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_2) \bar{k}_2^2, \\ a_{23} &= (-2r_8 \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_1) \bar{k}_1^2, & a_{24} &= r_8 (\cos^2 \bar{\theta}_2 - \sin^2 \bar{\theta}_2) \bar{k}_2^2, \end{aligned}$$

где

$$r_6 = \frac{\bar{\lambda}^e}{\lambda^S + 2\mu^S}, \quad r_7 = \frac{\bar{\lambda}^e + \bar{\mu}^e}{\lambda^S + 2\mu^S}, \quad r_8 = \frac{\bar{\mu}^e}{\lambda^S + 2\mu^S}.$$

5.2. *Отражение волн от свободной поверхности.* Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в жидкости, насыщающей несжимаемое пористое полупространство ($Z > 0$), и падающую на свободную поверхность $z = 0$ под углом θ_0 с осью Z . Для каждой падающей волны имеется две отраженные волны. В этом случае граничные условия принимают вид

$$T_{33}^S - p = 0, \quad T_{31}^S = 0.$$

В результате получаем систему двух неоднородных уравнений

$$\sum_{i=1}^2 a_{ij} Z_j = Y_i, \quad j = 1, 2,$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ — коэффициенты уравнения (24).

6. Результаты численных расчетов и их обсуждение. В качестве примера рассмотрим модель со следующими значениями материальных параметров [10]: $\eta^S = 0,67$, $\eta^F = 0,33$, $\rho^S = 1,34 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho^F = 0,33 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda^S = 5,5833$ МН/м², $K^F = 0,01$ м/с, $\gamma^{FR} = 10,0$ кН/м³, $\mu^S = 8,3750$ МН/м², $\bar{\eta}^S = 0,6$, $\bar{\eta}^F = 0,4$, $\bar{\rho}^S = 2,0 \cdot 10^3$ кг/м³, $\bar{\rho}^F = 0,01 \cdot 10^3$ кг/м³, $\bar{\lambda}^S = 4,2368$ МН/м², $\bar{K}^F = 0,02$ м/с, $\bar{\gamma}^{FR} = 9,0$ кН/м³, $\bar{\mu}^S = 3,3272$ МН/м², $\bar{\rho}^e = 2,65 \cdot 10^3$ кг/м³, $\bar{\lambda}^e = 2,238$ МН/м², $\bar{\mu}^e = 2,238$ МН/м².

Создана компьютерная программа и вычислены амплитудные коэффициенты различных отраженных и трансверсальных волн.

На рис. 2,а показана зависимость амплитудного коэффициента $|Z_1|$ от угла падения плоской волны на плоскость, разделяющую пористое полупространство (ПП) и упругое полупространство (УП). Как в случае ПП, так и в случае УП значения $|Z_1|$ для продольной волны (ПВ) больше, чем для трансверсальной волны (ТВ), только на начальном участке.

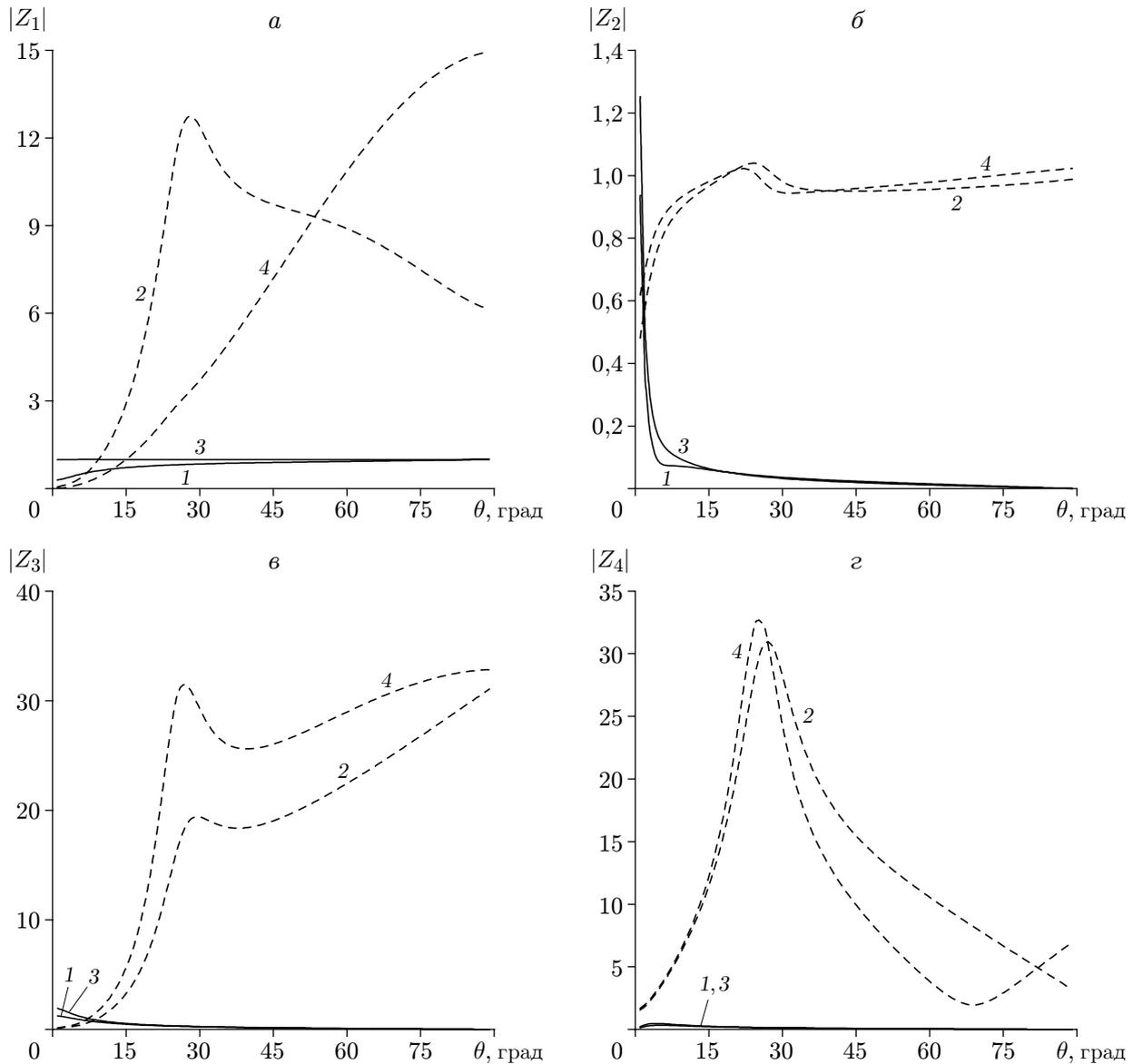


Рис. 2. Зависимости амплитудных коэффициентов $|Z_1|$ (а), $|Z_2|$ (б), $|Z_3|$ (в), $|Z_4|$ (г) от угла падения продольных и трансверсальных волн на плоскость, разделяющую УП и ПП:

сплошные линии — продольная волна, штриховые — трансверсальная волна; 1, 2 — пористое полупространство, 3, 4 — упругое полупространство

В интервале $0^\circ \leq \theta \leq 70^\circ$ значения амплитудного коэффициента ПВ в случае УП больше, чем в случае ПП, и приближенно равны в диапазоне $70^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Значения амплитудного коэффициента $|Z_2|$ в случаях ПП и УП близки как для ПВ, так и для ТВ (см. рис. 2, б).

На рис. 2, в видно, что и в случае ПП, и в случае УП значения амплитудного коэффициента $|Z_3|$ для ПВ уменьшаются в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ и приближаются к постоянному значению в диапазоне $50^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, тогда как для ТВ они резко увеличиваются в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 25^\circ$, уменьшаются в интервале $25^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ и вновь увеличиваются в диапазоне $40^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

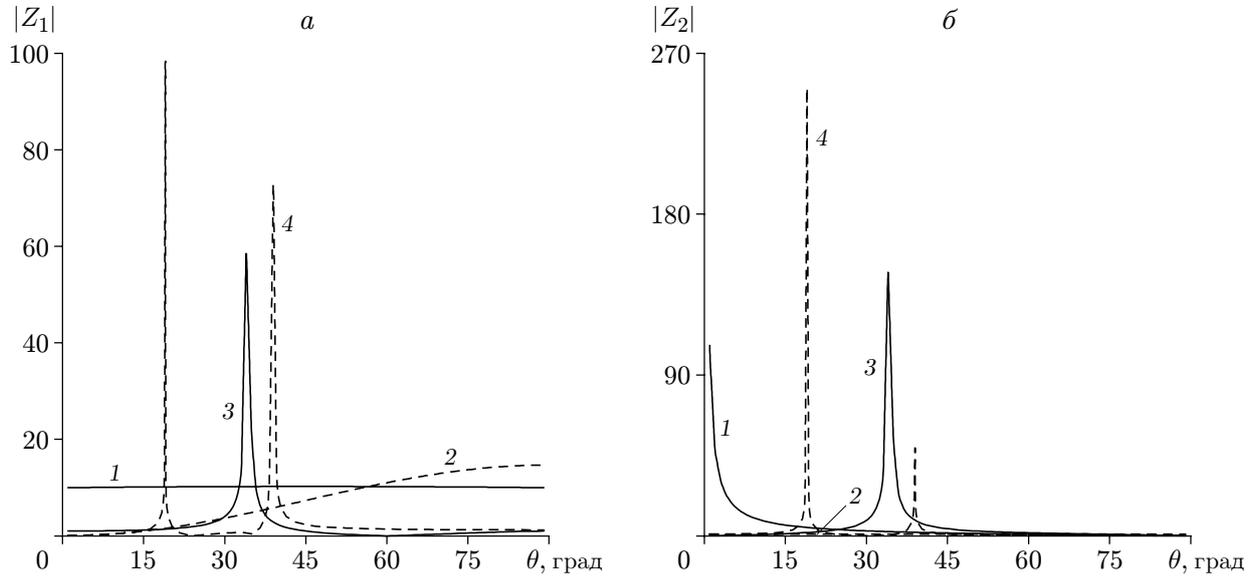


Рис. 3. Зависимости амплитудных коэффициентов $|Z_1|$ (а) и $|Z_2|$ (б) от угла падения продольных и трансверсальных волн на свободную поверхность между УП и ПП (обозначения те же, что на рис. 2)

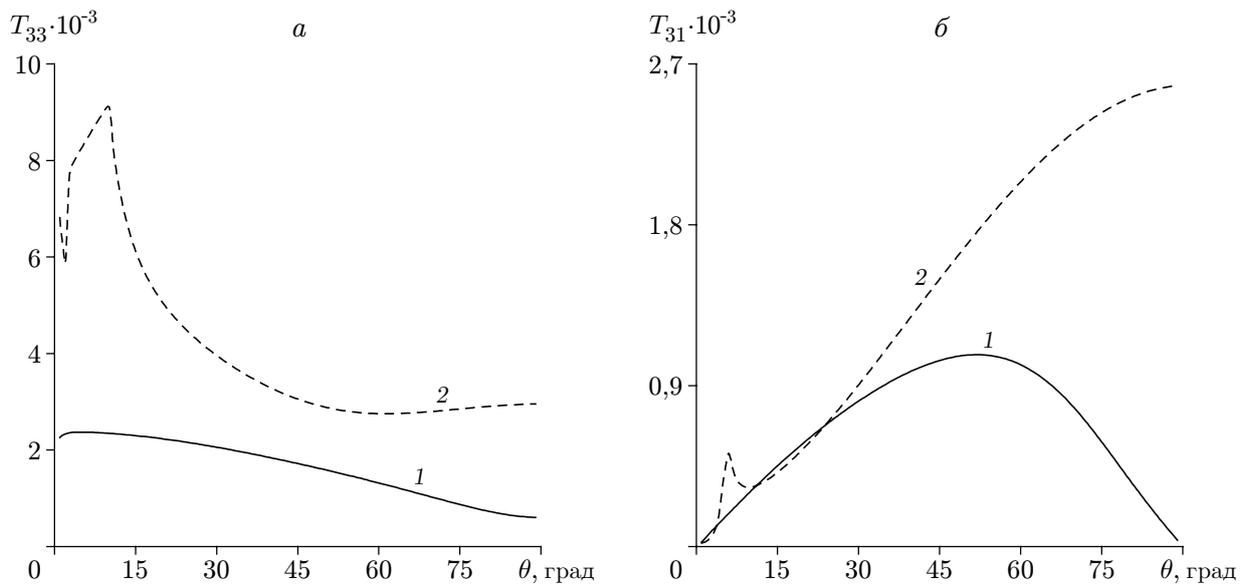


Рис. 4. Зависимости нормального напряжения T_{33} (а) и касательного напряжения T_{31} (б) в среде М1 от угла падения продольных и трансверсальных волн: 1 — продольная волна, 2 — трансверсальная волна

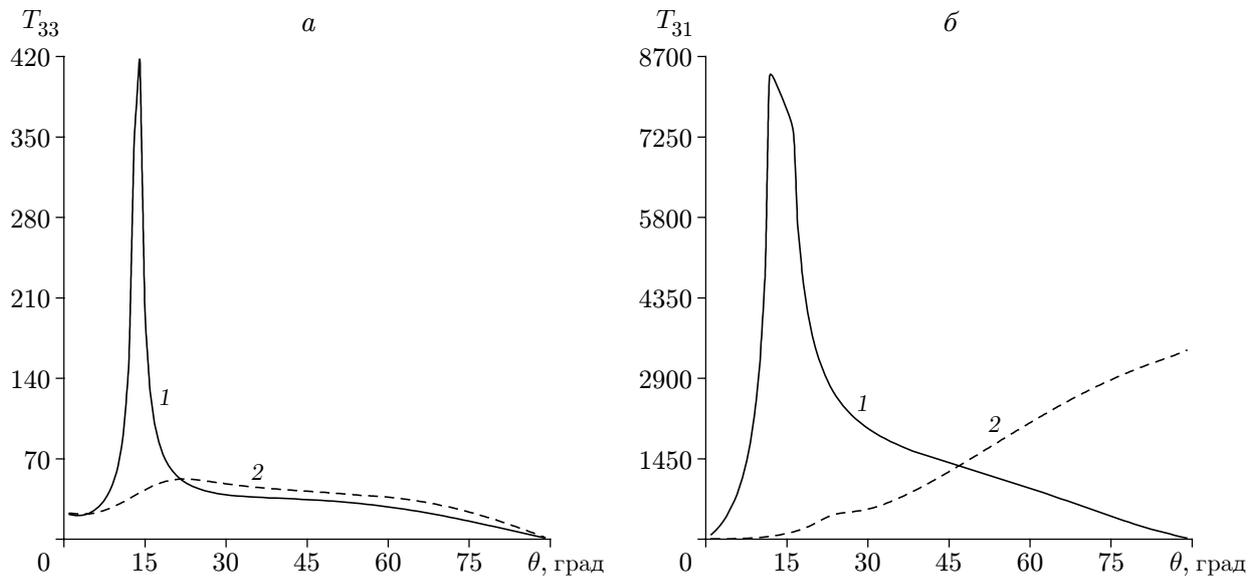


Рис. 5. Зависимости нормального напряжения T_{33} (а) и касательного напряжения T_{31} (б) в среде М2 от угла падения продольных и трансверсальных волн:
1 — продольная волна, 2 — трансверсальная волна

Из рис. 2,г следует, что для ТВ значения амплитудного коэффициента $|Z_4|$ в случае УП больше, чем в случае ПП, в интервалах $0^\circ \leq \theta \leq 25^\circ$, $85^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ и меньше в диапазоне $25^\circ \leq \theta \leq 85^\circ$, тогда как для ПВ значения $|Z_4|$ близки к нулю и в случае ПП, и в случае УП.

На рис. 3,а представлена зависимость амплитудного коэффициента $|Z_1|$ от угла падения ПВ и ТВ на свободную поверхность между УП и ПП. В случае ПП значения амплитудного коэффициента $|Z_1|$ для ПВ больше, чем для ТВ, в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$ и меньше в диапазоне $55^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. В случае УП значения $|Z_1|$ осциллируют в интервалах $17^\circ \leq \theta \leq 19^\circ$ и $40^\circ \leq \theta \leq 42^\circ$ для ТВ и в диапазоне $30^\circ \leq \theta \leq 35^\circ$ для ПВ.

На рис. 3,б приведена зависимость $|Z_2|(\theta)$. Видно, что в случае УП значения амплитудного коэффициента $|Z_2|$ осциллируют в интервалах $17^\circ \leq \theta \leq 19^\circ$ и $40^\circ \leq \theta \leq 42^\circ$ для ТВ и в интервале $30^\circ \leq \theta \leq 35^\circ$ для ПВ.

На рис. 4,а представлена зависимость нормального напряжения T_{33} в среде М1 от угла падения ПВ и ТВ. Видно, что во всем рассматриваемом диапазоне значения T_{33} для ТВ больше, чем для ПВ.

На рис. 4,б приведена зависимость касательного напряжения T_{31} в среде М1 от угла падения ПВ и ТВ. Из рис. 4,б следует, что значения T_{31} для ПВ больше, чем для ТВ, в интервалах $0^\circ \leq \theta \leq 3^\circ$ и $10^\circ \leq \theta \leq 23^\circ$ и меньше в диапазонах $3^\circ \leq \theta \leq 10^\circ$ и $23^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

На рис. 5,а показана зависимость нормального напряжения T_{33} в среде М2 от угла падения ПВ и ТВ. Видно, что для ПВ значения T_{33} резко увеличиваются в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$, а затем уменьшаются. Для ТВ значения T_{33} увеличиваются в диапазоне $0^\circ \leq \theta \leq 20^\circ$ и уменьшаются в диапазоне $20^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

На рис. 5,б представлена зависимость касательного напряжения T_{31} в среде М2 от угла падения ПВ и ТВ. Для ПВ значения T_{31} резко увеличиваются в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$, а затем уменьшаются, тогда как для ТВ значения T_{31} увеличиваются во всем рассматриваемом диапазоне значений θ .

Заклучение. Представлены результаты численных расчетов с использованием модели упругой и пористой сред для продольных и трансверсальных волн, падающих под углом к поверхности раздела. Выявлено существенное влияние плотности жидкости на амплитудные коэффициенты и компоненты тензора напряжений. Модель, рассмотренная в данной работе, является одной из наиболее реалистичных моделей Земли и может быть использована в сейсмологии, геофизике и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Terzaghi K. von.** Die Berechnung der Durchlässigkeit des Tones aus dem Verlauf der hydromechanischen Spannungserscheinungen: Sitzungsab. / Akad. Wiss. (Wien). Math.-Naturwiss. Kl. 132. Wien, 1923. S. 125–138.
2. **Terzaghi K. von.** Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage. Leipzig; Wien: F. Deuticke, 1925.
3. **Biot M. A.** General theory of three dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. V. 12, N 2. P. 144–155.
4. **Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 1. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. P. 168–178.
5. **Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 2. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. P. 179–191.
6. **Fillunger P.** Der Auftrieb von Talsperren. Т. 1–3 // Osterr. Woch.-Schr. für den öff. Baudienst. 1913. N 7. S. 532–570.
7. **Bowen R. M.** Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures // Intern. J. Engng Sci. 1980. V. 18. P. 1129–1148.
8. **Boer R. de, Ehlers W.** The development of the concept of effective stress // Acta Mech. 1990. V. 83. P. 77–92.
9. **Boer R. de, Ehlers W.** Uplift, friction and capillarity — three fundamental effects for liquid-saturated porous solids // Intern. J. Solids Structures. 1990. V. 26. P. 43–57.
10. **Boer R. de, Ehlers W., Ziu Z., et al.** One dimensional transient wave propagation in fluid saturated incompressible porous media // Arch. Appl. Mech. 1993. V. 63. P. 59–72.
11. **Kumar R., Hundal B. S.** A study of spherical and cylindrical wave propagation in a non-homogenous fluid saturated incompressible porous medium by the method of characteristics // Currents trends in industrial and applied mathematics / Ed. by P. Manchanda et al. New Delhi: Ananya Publ., 2002. P. 181–194.
12. **Kumar R., Hundal B. S.** Wave propagation in a fluid saturated incompressible porous medium // Indian J. Pure Appl. Math. 2003. V. 4. P. 51–65.
13. **Kumar R., Hundal B. S.** One dimensional wave propagation in a non homogenous fluid saturated incompressible porous medium // Bull. Allahabad Math. Soc. 2003. V. 18. P. 1–13.
14. **Kumar R., Hundal B. S.** Effect of non homogeneity on one-dimensional wave propagation in a fluid saturated incompressible porous medium // Bull. Calcutta Math. Soc. 2004. V. 96, N 3. P. 179–188.
15. **Kumar R., Hundal B. S.** Symmetric wave propagation in a fluid saturated incompressible porous medium // J. Sound Vibration. 2004. V. 96, N 3. P. 179–188.
16. **Deresiewicz H.** Reflection of plane waves at free plane boundary // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1960. V. 50. P. 599–607.
17. **Malla Reddy P., Tajuddin M.** Exact analysis of plain-strain vibrations of thick-walled hollow poroelastic cylinders // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37. P. 3439–3456.

18. **Kumar R., Deswal S.** Wave propagation in micro-polar liquid-saturated porous solid // Indian. J. Pure Appl. Math. 2000. V. 31, N 10. P. 1317–1337.
19. **Tomar S. K., Singh, Jaswant.** Transmission of longitudinal waves through a plane interface between two dissimilar porous elastic solid half spaces // Appl. Math. Comput. 2005. V. 169. P. 671–688.
20. **Tomar S. K., Arora, Ashish.** Reflection and transmission of elastic waves at an elastic/porous solid saturated by two immiscible fluids // Intern. J. Solids Structures. 2006. V. 43. P. 1991–2013.
21. **Tajuddin M., Hussaini S. J.** Reflection of plane waves at boundaries of a liquid filled poroelastic half-space // J. Appl. Geophys. 2006. V. 58. P. 59–86.

*Поступила в редакцию 30/XII 2009 г.,
в окончательном варианте — 2/IX 2010 г.*
