УДК 662.612.32

# О КРИТЕРИИ ОБРАЗОВАНИЯ ОТРАЖЕННОЙ ОТ ОБЛАКА ЧАСТИЦ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

С. П. Киселев, В. П. Киселев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача об образовании отраженной от облака частиц «коллективной» ударной волны, наблюдаемой ранее в эксперименте. На основе численного и аналитического решений задачи получен критерий возникновения отраженной ударной волны.

В результате экспериментальных исследований [1] взаимодействия ударной волны (УВ) с облаком частиц оргстекла и бронзы было установлено, что при объемной концентрации частиц $m_2 \sim 10^{-2}$ происходит формирование отраженной от облака «коллективной» УВ. Численное решение этой задачи дало аналогичные результаты [2]. В данной работе на основе численного и приближенного аналитического решений [2, 3] найден критерий образования отраженной «коллективной» УВ.

Рассмотрим постановку задачи. Имеется плоский канал, заполненный воздухом (рис. 1). В области $\Omega$ находится облако сферических частиц. Слева на облако набегает УВ. Расчет течения газа и частиц, возникающего в результате взаимодействия УВ с облаком частиц, производится численным методом, описанным в [2]. В зависимости от параметров газа и частиц перед облаком частиц могут возникнуть отраженная УВ или волна сжатия. Найдем условие образования отраженной УВ.

Интенсивность скачка уплотнения характеризуется числом Маха потока $\mathrm{M}_{\text{ф}}$ в системе координат, где скачок покоится. Для того чтобы в расчетах отделить УВ от волны сжатия, будем считать, что при $\mathrm{M}_{\text{ф}} \geqslant 1{,}15$ имеет место УВ, а при $\mathrm{M}_{\text{ф}} < 1{,}15$ — волна сжатия. В случае $\mathrm{M}_{\text{ф}} \geqslant 1{,}15$ приращение энтропии $\Delta S$ за скачком удовлетворяет неравенству [4]

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{2\gamma}{3(\gamma+1)^2}\,(\mathrm{M}_{\text{ф}}^2 - 1)^3 \geqslant 5{,}4 \cdot 10^{-3}.$$

Здесь $R$ — универсальная газовая постоянная; $\gamma$ — показатель адиабаты Пуассона. При $\mathrm{M}_{\text{ф}} < 1{,}15$ изменением энтропии можно пренебречь и считать течение изоэнтропическим, а волну сжатия — акустической; $\mathrm{M}_{\text{ф}}$ определяется по формуле $\mathrm{M}_{\text{ф}} = (v_1 - D_{\text{ф}})/c_1$, где

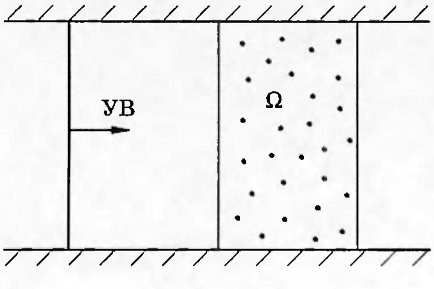


Рис. 1

$v_1$ — скорость набегающего потока; $c_1$ — скорость звука; $D_ф$ — скорость распространения отраженной волны. Из этой формулы видно, что $M_ф$ является числом Маха отраженной УВ. При $M_ф \geqslant 1{,}15$, согласно [5], получим

$$p/p_1 \geqslant 1{,}38 \tag{1}$$

($p_1$ и $p$ — давление соответственно перед и за отраженной УВ). Формулу (1) будем использовать в качестве условия образования отраженной УВ, что удобно в численных расчетах.

Пусть $m_2^*$ — объемная концентрация частиц, при которой $p/p_1 = 1{,}38$, и перед облаком сформировалась отраженная УВ. Величина $m_2^*$ является функцией параметров: $m_2^* = m_2^*(\rho_{11}, \rho_{22}, v_1, c_1, h, l_{\text{p}}, \gamma)$, где $\rho_{11}$, $\rho_{22}$ — плотность газа и частиц; $h$ — длина облака; $l_{\text{p}}$ — длина релаксации частиц. Составим из этих параметров безразмерные комплексы ($\rho_{11}/\rho_{22}$, $\mathrm{M} = v_1/c_1$, $h/l_{\text{p}}$) и будем искать решение в виде произведения функций

$$m_2^* = \xi(\rho_{11}/\rho_{22})\,\varphi(h/l_{\text{p}})\,\psi(\mathrm{M}) \quad (\gamma = \text{const}).$$

Вид этих функций, найденный по результатам аппроксимации численных расчетов, приводится ниже.

Время формирования отраженной УВ порядка времени торможения газа [2]

$$\tau_v = \frac{4}{3}\,\frac{d}{C_d|v_1 - v_2|}\,\frac{1}{m_2/m_1},$$

где $C_d$ — коэффициент сопротивления частицы; $m_1$ и $m_2$ — объемные концентрации газа и частиц, которые связаны соотношением $m_1 + m_2 = 1$. За время формирования отраженной УВ необходимо, чтобы скорости газа и частиц не успевали выравняться между собой. Поэтому давление $p$ за отраженной волной будет максимальным при условии $\tau_v \sim \tau_{12}$. Характерное время релаксации относительной скорости газа и частиц согласно [6] имеет вид

$$\tau_{12} = \frac{4}{3}\,\frac{d}{C_d|v_1 - v_2|}\,\frac{1}{\rho_{11}/\rho_{22} + m_2/m_1}.$$

Это условие выполняется, если $\rho_{11}/\rho_{22} \sim m_2^*/m_1$, откуда следует, что $m_2^* \sim \rho_{11}/\rho_{22}$. Поэтому функцию $\xi$ можно выбрать в виде $\xi = \rho_{11}/\rho_{22}$. (Напомним, что речь идет о нижней границе $m_2$, когда уже возникает УВ.) Приведенные численные расчеты и приближенное аналитическое решение (7), (8) подтверждают этот выбор функции $\xi$. Результаты расчетов для бронзы и оргстекла, обработанные в координатах $m_2^*/(\rho_{11}/\rho_{22})$, $h/l_{\text{p}}$, M, ложатся на одну кривую (рис. 2, 3).

Функции $\psi(\mathrm{M})$ и $\varphi(h/l_{\text{p}})$ получены путем аппроксимации результатов численных расчетов. На рис. 2 приведена зависимость $m_2^*/(\rho_{11}/\rho_{22})$ от M при $h/l_{\text{p}} = 0{,}4$. Здесь точки *1* — результаты расчетов для частиц оргстекла, *2* — для частиц бронзы, линия соответствует аппроксимационной формуле

$$\varphi(0{,}4)\,\psi(\mathrm{M}) = \frac{9{,}26}{\mathrm{M}^2} - \frac{12{,}8}{\mathrm{M}} + 4{,}84. \tag{2}$$

На рис. 3 построено отношение $m_2^*/(\rho_{11}/\rho_{22})$ в зависимости от $h/l_{\text{p}}$ при $\mathrm{M} = 1{,}3$. Точки *1*, *2* означают то же, что и на рис. 2, а линия отвечает аппроксимационной формуле

$$\psi(1{,}3)\,\varphi(h/l_{\text{p}}) = \frac{4{,}27 \cdot 10^{-2}}{h/l_{\text{p}}} + 0{,}597. \tag{3}$$

Комбинируя формулы (2) и (3), найдем искомую зависимость

$$m_2^* = \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}}\left(\frac{0{,}09}{h/l_{\text{p}}} + 1{,}26\right)\left(\frac{9{,}26}{\mathrm{M}^2} - \frac{12{,}8}{\mathrm{M}} + 4{,}84\right). \tag{4}$$

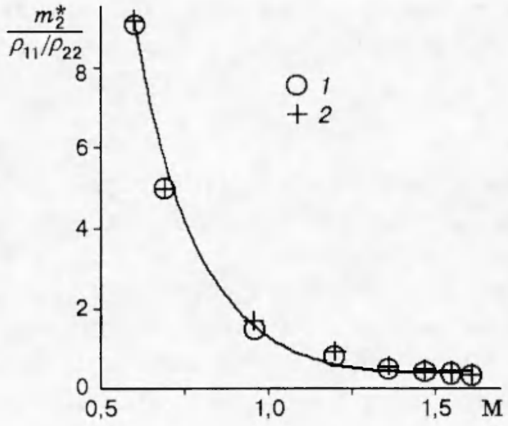


Рис. 2

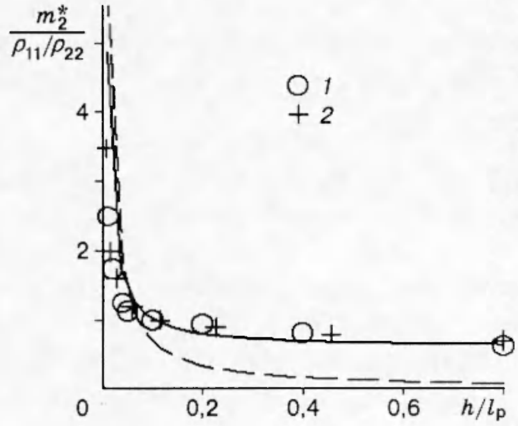


Рис. 3

Рассмотрим пример образования отраженной УВ. Зададим УВ, набегающую на облако частиц, с числом Маха $M_0 = 1{,}5$. Облако состоит из частиц оргстекла с $d = 10^{-2}$ см, $\rho_{22} = 1{,}2$ г/см$^3$, $h = 2$ см. Плотность газа за УВ $\rho_{11} = 2{,}34 \cdot 10^{-3}$ г/см$^3$, число Маха потока $M = 0{,}6$, $l_p = 14{,}4$ см. Объемная концентрация частиц, вычисленная по (4), $m_2^* = 3{,}25 \cdot 10^{-2}$.

На рис. 4 приведены результаты расчетов зависимости $p/p_1$ от $x$ на моменты времени 50, 100, 150, 200 мкс (кривые *1–4*, вертикальными отрезками обозначены границы облака). Расчеты проводились при давлении газа за набегающей УВ $p_1 = 2{,}44$ атм и начальной объемной концентрации частиц $m_2^0 = 3{,}25 \cdot 10^{-2}$. Из рис. 4 видно, что волна сжатия, образующаяся в передней части облака, с течением времени растет, ее фронт за счет нелинейных эффектов становится более крутым и она превращается в отраженную УВ. Отсюда следует, что формула (4) согласуется с данными численных расчетов.

В [3] построено приближенное аналитическое решение, описывающее течение газа в разреженном облаке частиц ($m_2 \sim 10^{-3}$); при этом пренебрегалось движением частиц, так как на начальном этапе $v_1 \gg v_2$. Влияние облака рассматривалось как малое возмущение. Уравнения для газа раскладывались в ряд по малому параметру $m_2$, и удерживались линейные члены разложения, линеаризованные уравнения решались методом характеристик.

Для обезразмеренных возмущений скорости $v = v'/v_0$, плотности $\eta = \rho'/\rho_0$ и энтро-

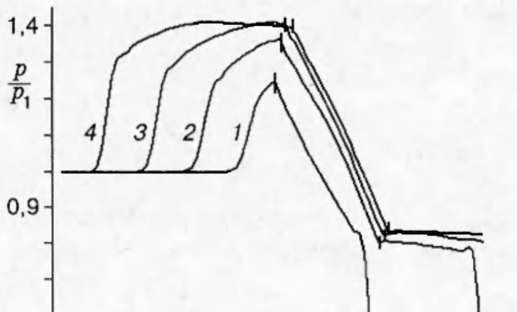


Рис. 4

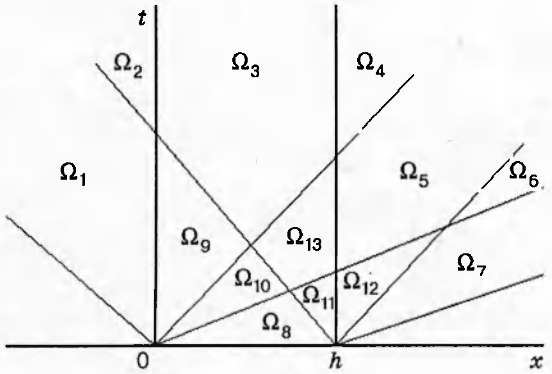


Рис. 5

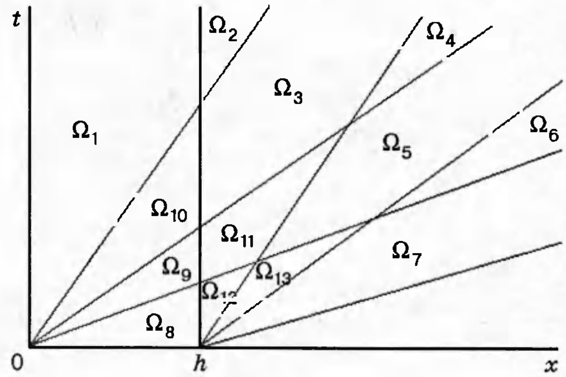


Рис. 6

пии $s = S'/c_V$ газа (индекс 0 относится к невозмущенным параметрам, а штрих — к возмущениям) получены следующие уравнения:

$$v = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{C_+} \varphi\,dt + \int\limits_{C_-} \varphi\,dt\Big), \quad s = \int\limits_{C_0} \psi\,dt, \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{v_0}{a_0}\Big(\int\limits_{C_+} \varphi\,dt - \int\limits_{C_-} \varphi\,dt\Big),$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \varphi_1 = -\frac{a_0^2}{\gamma v_0}\frac{\partial s}{\partial x}, \quad \varphi_2 = -\frac{m_2^0}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{x} (\delta(y) - \delta(y-h))dy,$$

$$\psi_1 = m_2^0\frac{\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{x} (\delta(y) - \delta(y-h))dy, \quad \psi_2 = -m_2^0\frac{1 - T_2^0/T_1^0}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{x} (\delta(y) - \delta(y-h))\,dy,$$

где $a_0$ — скорость звука; $\mathrm{M} = v_0/a_0$; $T_1^0$, $T_2^0$ — температура частиц и газа; $\tau = 4d/(3C_d v_0)$; $\omega = d^2\rho_{11}^0 c_V/(6\lambda\mathrm{Nu})$; $c_V$ и $\lambda$ — теплоемкость и коэффициент теплопроводности газа; Nu — число Нуссельта; $\delta(y)$, $\delta(y-h)$ — дельта-функции. Интегрирование проводилось вдоль характеристик

$$C_\pm:\quad x = (v_0 \pm a_0)t + \xi_\pm, \qquad C_0:\quad x = v_0 t + \xi_0.$$

Характеристиками с константами $\xi_+ = \xi_- = \xi_0 = 0$, $\xi_+ = \xi_- = \xi_0 = h$ и прямыми $x = 0$ и $x = h$ решение разбивается на 13 областей, как это показано на рис. 5 и 6 для $\mathrm{M} < 1$ и $\mathrm{M} > 1$ соответственно.

В формулах (3.6) и (3.7) работы [3] пропущено слагаемое, пропорциональное $\partial s/\partial t$, учет которого дает

$$\int\limits_{C_+} \varphi_1 dt = \frac{a_0^2}{\gamma v_0(v_0 + a_0)}\Big(-s + \int\limits_{C_+} \frac{\partial s}{\partial t}\,dt\Big), \quad \int\limits_{C_-} \varphi_1 dt = \frac{a_0^2}{\gamma v_0(v_0 - a_0)}\Big(-s + \int\limits_{C_-} \frac{\partial s}{\partial t}\,dt\Big).$$

Пренебрегая теплообменом, выпишем исправленное решение. При дозвуковом течении имеем

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\Big(v_0 t + \frac{\mathrm{M}x}{1-\mathrm{M}}\Big)(1 + (\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_1,$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\frac{\mathrm{M}h}{1-\mathrm{M}}(1 + (\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_2,$$

$$v' = -\frac{m_2^0 h\mathrm{M}}{2\tau(1-\mathrm{M})}\Big(1 + (\gamma-1)\mathrm{M} - \frac{2\gamma\mathrm{M}}{1+\mathrm{M}}\frac{x}{h}\Big) \quad \text{в } \Omega_3,\ \Omega_{13},$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\,\frac{\mathrm{M}h}{1+\mathrm{M}}\,(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_4,\ \Omega_5,\ \Omega_6,$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\Big(v_0t - \frac{(x-h)\mathrm{M}}{1+\mathrm{M}}\Big)(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_7, \qquad v' = -\frac{m_2^0}{\tau}\,v_0t \quad \text{в } \Omega_8,$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\Big(v_0t(1+(\gamma-1)\mathrm{M}) + x\mathrm{M}\,\frac{1-(\gamma-1)\mathrm{M}}{1+\mathrm{M}}\Big) \quad \text{в } \Omega_9,\ \Omega_{10},$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\Big(v_0t(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) + (x-h)\mathrm{M}\,\frac{1+(\gamma-1)\mathrm{M}}{1-\mathrm{M}}\Big) \quad \text{в } \Omega_{11},$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\Big(v_0t + (x-h)\,\frac{\mathrm{M}}{1+\mathrm{M}}\Big)(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_{12},$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\Big(a_0t + \frac{x}{1-\mathrm{M}}\Big)(1+(\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_1, \qquad \rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0 h}{2a_0\tau}\,\frac{1+(\gamma-1)\mathrm{M}}{1-\mathrm{M}} \quad \text{в } \Omega_2,$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{a_0\tau(1-\mathrm{M})}\Big(\frac{\gamma x}{1+\mathrm{M}} + \frac{h}{2}(1+(\gamma-1)\mathrm{M})\Big) \quad \text{в } \Omega_3,$$

$$\rho' = -\frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0 h}{2a_0\tau}\,\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}+2\gamma-1}{1+\mathrm{M}} \quad \text{в } \Omega_4, \tag{5}$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{a_0\tau}\Big((\gamma-1)(x-v_0t) - \frac{h}{2}\,\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}+2\gamma-1}{1+\mathrm{M}}\Big) \quad \text{в } \Omega_5,$$

$$\rho' = -\frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0 h}{2a_0\tau}\,\frac{1-(\gamma-1)\mathrm{M}}{1+\mathrm{M}} \quad \text{в } \Omega_6, \qquad \rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\Big(\frac{x-h}{1+\mathrm{M}} - a_0t\Big)(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_7,$$

$$\rho' = 0 \quad \text{в } \Omega_8, \qquad \rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\Big(a_0t(1+(\gamma-1)\mathrm{M}) - x\,\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}+2\gamma-1}{1+\mathrm{M}}\Big) \quad \text{в } \Omega_9,$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\Big(a_0t - \frac{x}{1+\mathrm{M}}\Big)(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_{10},$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\Big(\frac{h-x}{1-\mathrm{M}} - a_0t\Big)(1+(\gamma-1)\mathrm{M}) \quad \text{в } \Omega_{11},$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\Big((x-h)\,\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}+2\gamma-1}{1+\mathrm{M}} - a_0t(1+(\gamma-1)\mathrm{M})\Big) \quad \text{в } \Omega_{12},$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\mathrm{M}\rho_0}{a_0\tau}\Big(-(\gamma-1)v_0t - \Big(1+\frac{\gamma\mathrm{M}^2}{1-\mathrm{M}^2}\Big)x + \frac{h}{2}\,\frac{1+(\gamma-1)\mathrm{M}}{1-\mathrm{M}}\Big) \quad \text{в } \Omega_{13},$$

$$S' = 0 \quad \text{в } \Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_6,\ \Omega_7, \qquad S' = m_2^0c_V\,\gamma\,(\gamma-1)\mathrm{M}^2x/(v_0\tau) \quad \text{в } \Omega_3,\ \Omega_9,$$

$$S' = m_2^0c_V\,\gamma\,(\gamma-1)\mathrm{M}^2t/\tau \quad \text{в } \Omega_8,\ \Omega_{10},\ \Omega_{11},\ \Omega_{13},$$

$$S' = m_2^0c_V\,\gamma\,(\gamma-1)\mathrm{M}^2(v_0t-x+h)/(v_0\tau) \quad \text{в } \Omega_5,\ \Omega_{12},$$

$$S' = m_2^0c_V\,\gamma\,(\gamma-1)\mathrm{M}^2h/(v_0\tau) \quad \text{в } \Omega_4.$$

Качественная зависимость $v'(x)$, построенная в соответствии с (5) для фиксированного момента времени $t$, показана на рис. 7. Видно, что навстречу потоку газа распространяется волна сжатия, в которой происходит его торможение, а в облаке газ ускоряется в волне разрежения. Отметим, что наблюдаемое ранее [3] различие численного и аналитического решений в области $\Omega_4$ исчезло.

Для сверхзвукового течения решение имеет вид

$$v' = -\frac{m_2^0}{\tau}\frac{\gamma \mathrm{M}^2}{\mathrm{M}^2-1}x \text{ в } \Omega_1, \qquad v' = -\frac{m_2^0}{\tau}\frac{\gamma \mathrm{M}^2}{\mathrm{M}^2-1}h \text{ в } \Omega_2,$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\left(\frac{2\gamma \mathrm{M}^2 h}{\mathrm{M}^2-1} + \left(v_0 t - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}-1}x\right)(1+(\gamma-1)\mathrm{M})\right) \text{ в } \Omega_3, \Omega_{11},$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\frac{\mathrm{M}h}{\mathrm{M}+1}(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) \text{ в } \Omega_4, \Omega_5, \Omega_6,$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\left(v_0 t - (x-h)\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+1}\right)(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) \text{ в } \Omega_7, \Omega_{13}, \qquad v' = -\frac{m_2^0}{\tau}v_0 t \text{ в } \Omega_8,$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{2\tau}\left(v_0 t(1+(\gamma-1)\mathrm{M}) + x\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+1}(1-(\gamma-1)\mathrm{M})\right) \text{ в } \Omega_9, \Omega_{10},$$

$$v' = -\frac{m_2^0}{\tau}\left(v_0 t - \frac{\gamma \mathrm{M}^2}{\mathrm{M}^2-1}(x-h)\right) \text{ в } \Omega_{12},$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\gamma \mathrm{M}\rho_0}{a_0\tau(\mathrm{M}^2-1)}x \text{ в } \Omega_1, \quad \rho' = \frac{m_2^0\gamma \mathrm{M}\rho_0}{a_0\tau(\mathrm{M}^2-1)}h \text{ в } \Omega_2,$$

$$\rho' = \frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\left(\frac{2\gamma h}{\mathrm{M}^2-1} + a_0 t(1+(\gamma-1)\mathrm{M}) - \frac{1+(\gamma-1)\mathrm{M}}{\mathrm{M}-1}x\right) \text{ в } \Omega_3,$$

$$\rho' = -\frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0 h}{2a_0\tau}\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}^2+1+\gamma(\mathrm{M}-2)}{\mathrm{M}^2-1} \text{ в } \Omega_4,$$

$$\rho' = \frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\left(2(\gamma-1)(x-v_0 t) - h\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}^2+1+\gamma(\mathrm{M}-2)}{\mathrm{M}^2-1}\right) \text{ в } \Omega_5, \tag{6}$$

$$\rho' = \frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0 h}{2a_0\tau}\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}-1}{\mathrm{M}+1} \text{ в } \Omega_6, \quad \rho' = \frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\left(\frac{h-x}{\mathrm{M}+1} + a_0 t\right)((\gamma-1)\mathrm{M}-1) \text{ в } \Omega_7,$$

$$\rho' = 0 \text{ в } \Omega_8, \quad \rho' = \frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\left(\frac{x}{\mathrm{M}+1} - a_0 t\right)((\gamma-1)\mathrm{M}-1) \text{ в } \Omega_9,$$

$$\rho' = \frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\left(a_0 t(1+(\gamma-1)\mathrm{M}) - x\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}^2+1+\gamma(\mathrm{M}-2)}{\mathrm{M}^2-1}\right) \text{ в } \Omega_{10},$$

$$\rho' = \frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\left(a_0 t(1-(\gamma-1)\mathrm{M}) + \frac{x}{\mathrm{M}+1}\left((\gamma-1)\mathrm{M}-1-\frac{2\gamma}{\mathrm{M}-1}\right) + \frac{2\gamma h}{\mathrm{M}^2-1}\right) \text{ в } \Omega_{11},$$

$$\rho' = \frac{m_2^0\gamma \mathrm{M}\rho_0}{a_0\tau}\frac{x-h}{\mathrm{M}^2-1} \text{ в } \Omega_{12},$$

$$\rho' = \frac{m_2^0 \mathrm{M}\rho_0}{2a_0\tau}\left((x-h)\frac{(\gamma-1)\mathrm{M}^2+1+\gamma(\mathrm{M}-2)}{\mathrm{M}^2-1} - a_0 t(1+(\gamma-1)\mathrm{M})\right) \text{ в } \Omega_{13},$$

$$S' = 0 \text{ в } \Omega_6, \Omega_7, \quad S' = m_2^0 c_V\,\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2 x/(v_0\tau) \text{ в } \Omega_1, \Omega_{10},$$

$$S' = m_2^0 c_V\,\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2 t/\tau \text{ в } \Omega_8, \Omega_9,$$

$$S' = m_2^0 c_V\,\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2(v_0 t - x + h)/(v_0\tau) \text{ в } \Omega_5, \Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{13},$$

$$S' = m_2^0 c_V\,\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2 h/(v_0\tau) \text{ в } \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4.$$

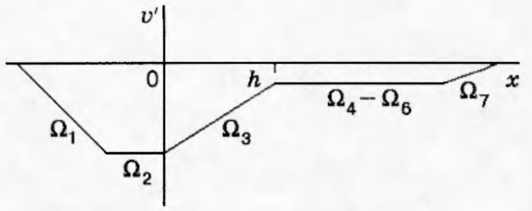


Рис. 7

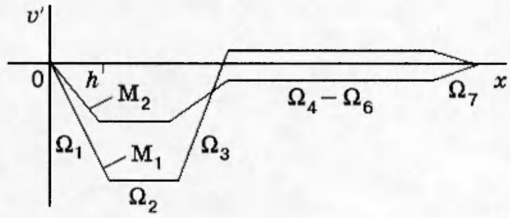


Рис. 8

Сравнение систем уравнений (6) и (3.12) из [3] показывает, что в $\Omega_1$ решение (3.12) является верным, поэтому все выводы о зависимости $\mathrm{M}(x)$, сделанные на его основе, правильны. Система уравнений (5), (6) справедлива также в том случае, когда в однородный поток газа внезапно помещается облако частиц конечных размеров. Отметим, что формулы (5), (6) не применимы в окрестности точки $\mathrm{M} = 1$.

На рис. 8 приведена зависимость $v'(x)$ для чисел Маха потока $\mathrm{M}_1$ и $\mathrm{M}_2$, где $\mathrm{M}_1 < \mathrm{M}_* < \mathrm{M}_2$, $\mathrm{M}_* = 1/(\gamma - 1)$. Видно, что в облаке газ тормозится, а за облаком ускоряется в волне разрежения. При $\mathrm{M} > \mathrm{M}_*$ газ ускоряется до скорости, бо́льшей, чем скорость газа перед облаком, что связано с наличием высокого давления в облаке и адиабатичностью процесса расширения газа за ним. Данный эффект подтверждается результатами численных расчетов (рис. 9, где $v = v_0 + v'$, вертикальными отрезками обозначены границы облака). На входе в облако газ имел параметры: $\mathrm{M} = 4$, $\rho_{11} = 10^{-3}$ г/см$^3$, $v_0 = 1{,}36 \cdot 10^5$ см/с, а облако частиц: $m_2^0 = 10^{-3}$, $\rho_{22} = 1{,}2$ г/см$^3$, $h = 1$ см, $d = 100$ мкм.

Оценим условие формирования отраженной УВ на основе приближенного решения (5), (6). Волна сжатия, встающая перед облаком частиц, формируется в области $\Omega_2$, поэтому для ее нахождения используем решение из $\Omega_2$.

Согласно (1), отраженную УВ будем считать образовавшейся, если $p'/p_1 \approx \rho'/\rho_1 + S'/c_V \approx 0{,}4$, где $p'$, $\rho'$ и $S'$ — возмущения давления, плотности и энтропии газа, возникающие в результате взаимодействия с облаком частиц. Подставляя $\rho'$ и $S'$ из (5), получим условие формирования отраженной УВ при $\mathrm{M} < 1$:

$$m_2^* = \frac{0{,}8}{\gamma}\,\frac{\rho_{11}}{\rho_{22}}\,\frac{1}{h/l_p}\,\frac{1-\mathrm{M}}{\mathrm{M}^2(1+(\gamma-1)\mathrm{M})}. \tag{7}$$

Для сверхзвукового течения аналогичная подстановка из (6) дает аналитическое решение

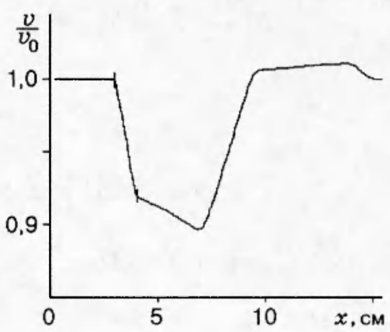


Рис. 9

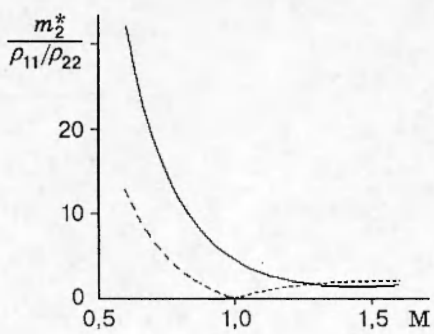


Рис. 10

$$m_2^* = \frac{0{,}4}{\gamma^2}\frac{\rho_{11}}{\rho_{22}}\cdot\frac{1}{h/l_{\text{p}}}\,\frac{\text{M}^2-1}{\text{M}^2+(1-1/\gamma)\text{M}^2(\text{M}^2-1)}. \qquad (8)$$

На рис. 3 штриховой линией показано отношение $m_2^*/(\rho_{11}/\rho_{22})$ в зависимости от $h/l_{\text{p}}$, построенное по формуле (8). Видно, что для $h/l_{\text{p}} < 0{,}1$ имеется хорошее совпадение аналитического результата с численным. При бóльших значениях $h/l_{\text{p}}$ численное и аналитическое решения различаются, поэтому появляется отличие в значениях $m_2^*$.

На рис. 10 приведено сравнение численного (сплошная кривая) и аналитического (штриховая) решений по зависимости $m_2^*/(\rho_{11}/\rho_{22})$ от M при $h/l_{\text{p}} = 0{,}04$. Видно, что в области сверхзвукового течения эти решения достаточно хорошо согласуются между собой. В окрестности $\text{M} = 1$ аналитическое решение не работает, а отличие при $\text{M} < 1$ связано с тем, что здесь $m_2^*$ лежит в области, где приближенное решение дает большую ошибку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Boiko V. M., Fedorov A. V., Fomin V. M., et al.** Ignition of small particles behind shock waves // Shock Waves, Explosions, and Detonations. Ser. Progress in Astronautics and Aeronautics. V. 87. N. Y.: AIAA Publishing, 1987. P. 71–87.
2. **Киселев В. П., Киселев С. П., Фомин В. М.** О взаимодействии ударной волны с облаком частиц конечных размеров // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 26–37.
3. **Киселев С. П., Киселев В. П.** О некоторых особенностях течения газа, возникающего в результате взаимодействия ударной волны с облаком частиц // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 8–18.
4. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
5. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Система квазилинейных уравнений. М.: Мир, 1987.
6. **Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука, 1992.

*Поступила в редакцию 30/V 1996 г.,*
*в окончательном варианте — 30/IX 1996 г.*