ОБ ОБРАЗОВАНИИ ШЕЙКИ В ПЛОСКОМ ОБРАЗЦЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Л. В. Ершов

(Москва)

Экспериментальному и теоретическому изучению напряженного и деформированного состояния в шейке были посвящены исследования [1-14] и др. Краткий обзор исследований подобного рода можно найти в работе [1]. Здесь отметим, что в работах [1] [7,8,13] используются линеаризированные уравнения при различных предпосылках о свойстве материала; в работах [7,8] материал предполагается вязкопластическим, в работе [11] — жестко-пластическим, в работе [13] применяется теория малых упруго-пластических деформаций.

В настоящей работе определение процесса образования шейки в образце рассматривается как задача теории устойчивости; подобная постановка использовалась в работе [13]. Однако в ней линеаризация исходных соотношений была проведена недостаточно корректно (так в уравнениях равновесия отбрасывался ряд малых первого порядка).

Подробный анализ уравнений при потере устойчивости был произведен В. В. Новожиловым [15]; эти уравнения используются ниже; исходные положения приняты такими же, как и в работе [13].

Рассматривается полоса толщиной $2h$, начало координат принимается в центре симметрии полосы. Исследуется случай плоской деформации, т. е. растяжение полосы происходит в плоскости xy. Материал полосы предполагается несжимаемым.

Пусть p — равномерное давление, растягивающее полосу; σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты напряжения, e_x, e_y, γ_{xy} — компоненты деформаций, u, v — перемещения соответственно вдоль осей x и y.

В рассматриваемом случае законы активной пластической деформации несжимаемых материалов записываются в виде

$$\sigma_x - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_x, \qquad \sigma_y - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_y, \qquad \sigma_z - \sigma = 0, \qquad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3e_i} \gamma_{xy} \tag{1}$$

Здесь σ_i, e_i — соответственно интенсивность напряжений и интенсивность деформаций, причем для плоского деформированного состояния

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \qquad e_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(e_x - e_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

Имеет место экспериментально определяемая зависимость

$$\sigma_i = \Phi(e_i)$$

Решение задачи ищется в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^\circ + \sigma_x', \ldots, \qquad e_x = e_x^\circ + e_x', \ldots, \qquad u = u^\circ + u', \ldots, \tag{2}$$

где компоненты с индексом градус наверху соответствуют невозмущенному однородному состоянию полосы, которое характеризуется следующими равенствами:

$$e_y^\circ = - e_x^\circ, \qquad \gamma_{xy}^\circ = 0, \qquad e_i^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} e_x^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} e_y^\circ \tag{3}$$

При некотором значении $p = p^*$, которое будем называть критическим, возможны несколько форм равновесия, т. е. в образце может появиться шейка.

Решение задачи состоит в отыскании компонент возмущения, которым приписан индекс штрих наверху.

Из (1) с учетом (3) и несжимаемости материала нетрудно получить для компонент возмущенного состояния

$$\sigma_x' = \sigma' + 2Ae_x', \qquad \sigma_y' = \sigma - 2Ae_x', \qquad \tau_{xy}' = B\gamma_{xy}' \tag{4}$$

где

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{d\Phi}{de_i}\right)_0, \qquad B = \frac{1}{3}\left(\frac{\Phi}{e_i}\right)_0$$

Уравнения равновесия для компонент напряжения возмущенного состояния имеют вид [5]

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} + \frac{P}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right] = 0 \tag{5}$$

Полагая

$$u' = \partial\psi / \partial y, \qquad v' = - \partial\psi / \partial x \tag{6}$$

---

[1] Ивлев Д. Д. Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.

удовлетворим уравнению несжимаемости. Подставляя (4) в (5), используя (6) и исключая из полученной системы σ' для определения функции $\psi(x, y)$, получим уравнение

$$(1+\beta)\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}=0 \qquad \left(\alpha=\frac{2(2A-B)}{B}, \quad \beta=\frac{p}{2B}\right) \tag{7}$$

Уравнение (7) легко интегрируется. Используя условия симметрии перемещений в шейке, его решение можно представить в виде

$$\psi(x_1 y)=[C_1\,\mathrm{sh}\,\lambda\omega_1 y\cos\lambda\omega_2 y+C_2\,\mathrm{ch}\,\lambda\omega_1 y\sin\lambda\omega_2 y]\sin\lambda x \tag{8}$$

Здесь

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\sqrt{1+\beta}\right]}, \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\sqrt{1+\beta}\right]}$$

C_1, C_2— произвольные постоянные, λ — параметр.

Сравнивая выражение (8) с соответствующим выражением (1.18) работы [13], нетрудно убедиться в том, что они совпадают с точностью до параметров ω_1 и ω_2.

Используя (4) — (6), можно составить выражения для компонент возмущенного состояния, которые здесь не приводятся.

Линеаризированные граничные условия имеют вид

$$\sigma_y'=0, \quad \tau_{xy}'-p\frac{\partial v'}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad y=h \tag{9}$$

Подставляя выражения компонент возмущенного состояния в граничные условия (9), получим линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно двух произвольных постоянных. Так как при образовании шейки эта система должна иметь ненулевое решение, то ее определитель должен быть равен нулю.

Таким образом, получим характеристическое уравнение, дающее зависимость p^* от параметра шейки λ

$$\Phi_1(\alpha,\beta)\sin 2\omega_2\gamma+\Phi_2(\alpha,\beta)\,\mathrm{sh}\,2\omega_1\gamma=0 \tag{10}$$

где

$$\Phi_1(\alpha,\beta)=(2-\beta-3\beta^2)+(\alpha+\beta)(1-\beta+\beta^2)-\frac{\omega_2}{\omega_1}2\beta(2-\beta)\sqrt{(1+\beta)-{}^1/_4(\alpha+\beta)}$$

$$(\gamma=\lambda h)$$

$$\Phi_2(\alpha,\beta)=2\beta(2-\beta)\sqrt{(1+\beta)-{}^1/_4(\alpha+\beta)^2}+[(2-\beta-3\beta^2)+(\alpha+\beta)(1-\beta+\beta^2)]\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$(\gamma=\lambda h)$$

Уравнение (10) имеет корень $\gamma=0$, что соответствует отсутствию шейки в образце.

Для каждого материала при достижении давлением определенного значения p^* существует единственный положительный корень $\gamma\neq 0$. Если длину начальной шейки обозначить $2l$, то нетрудно получить, что $l/h=\pi/2\gamma$.

Для полосы, изготовленной из отожженной стали SAE1112, уравнение (10) было решено численно, причем исходные данные принимались согласно работе [13]. При этом получилось, что $l/h=1.76$ (заметим, что для данного случая в работе [13] получено $l/h=1.7$).

Таким образом, при рассмотрении процесса образования шейки в образце с позиций теории устойчивости в уравнениях равновесия для компонент возмущенного состояния (5) быть может пренебрежение членами, учитывающими поворот элементарных частиц, не ведет к большой погрешности. Аналогичный прием использовался в работах [16,17].

Поступила 11 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Н а д а и А. Пластичность и разрушение твердых тел. ИИЛ, 1954.
2. S i e b e l E. Werkstoffausschuss Ber., 71, Stahl u. Eisen, Düsseldorf (1925).
3. M a c - G r e g o r C. W. Relation between stress and Reduction in Area for Tensile Tests of Metals. AI ME Tech. Pub., 805, New York meeting (1937).
4. M ö l l e n d o r f W. Mitt. Materialprüfungsamt. Berlin — Dahlem, 41, № 5, 6 (1923).
5. P a r k e r E. R., D a v i s H. E., F l a n i g a n A. E. A study of the Tension Test. Proc. ASTM, 46 (1946), 1159—1174.
6. Н е й б е р Г. Концентрация напряжения, Гостехиздат, 1947.
7. И л ь ю ш и н А. А. Деформация вязко-пластического тела. Уч. зап. МГУ, Механика, 1940, вып. 39.
8. И ш л и н с к и й А. Ю. Об устойчивости вязко-пластического течения полосы и круглого прута. ПММ, 1943, т. VIII, вып. 3.
9. I t e r s o n F. K. Th. Plasticity in Engineering, Glasgow (1947).
10. Д а в и д е н к о в Н. Н. и С п и р и д о н о в а Н. И. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца. Ж. Заводская лаборатория, 1945, № 6.

11. Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. ИИЛ, 1955.
12. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, 1956.
13. Жуков А. М. К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении. Инж. сб., 1949, т. V, вып. 2.
14. Онат Е., Прагер В. Об образовании шейки в плоском образце при растяжении. Сб. переводов, Механика, 1955, № 4.
15. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
16. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. тр., т. I, Изд-во АН СССР, 1951.
17. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. ж., 1954, т. VI, № 2.

О ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. С. Наместников

(Новосибирск)

В работе Л. М. Качанова [1] было определено время до разрушения цилиндрического образца при ползучести под постоянной нагрузкой P путем введения гипотезы охрупчивания (или повреждаемости)

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi}\right)^n \quad (1 \geqslant \psi \geqslant 0) \tag{1}$$

и применения теории установившейся ползучести

$$\dot{p} = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} = B_1\sigma^m \tag{2}$$

в предположении несжимаемости материала

$$\sigma = \sigma_0 \exp p, \qquad \sigma = \frac{P}{F}, \qquad \sigma_0 = \frac{P}{F_0}, \qquad p = \ln\frac{l}{l_0} \tag{3}$$

Здесь F, l — текущие значения площади поперечного сечения и длины образца соответственно; A, m, n и B_1— постоянные материала при данной температуре.

В работе Хоффа [2] дана другая постановка задачи. Время до разрушения цилиндрического образца определялось из соотношений (2) и (3) при предположении, что в момент разрушения площадь поперечного сечения образца обращается в нуль (так называемое «вязкое разрушение»).

В обеих работах применяется теория установившейся ползучести на том основании, что основное время жизни образца составляет вторая стадия ползучести. Это утверждение справедливо только для низкого уровня напряжений. При более же высоком уровне напряжений основную часть жизни образца будет составлять первая стадия ползучести, а поэтому для определения времени разрушения при ползучести следует применять теорию неустановившейся ползучести. С этой точки зрения, концепция Л. М. Качанова имеет больше логических оснований, чем концепция Хоффа, так как при тех нагрузках, при которых применение этих концепций справедливо, основной вид разрушения будет, по-видимому, составлять хрупкое разрушение. Заметим, что концепция Л. М. Качанова обладает, к сожалению, досадным недостатком, заключающимся в том, что для определения констант гипотезы охрупчивания [1] необходимо располагать данными, содержащими весьма большие времена разрушения.

Определим время до разрушения, применяя теорию неустановившейся ползучести. Для этого рассмотрим гипотезу упрочнения в двух вариантах

$$\dot{p}p^{\alpha} = \varkappa\sigma^{q} \tag{4}$$

$$\dot{p}p^{\alpha} = k\exp\frac{\sigma}{\lambda} \tag{5}$$

Здесь α, $\varkappa$, k, q и λ — постоянные материала при данной температуре и σ — истинное напряжение. Из (3) и (4) имеем

$$\dot{p}p^{\alpha} = \varkappa\sigma_0{}^{q}\exp qp$$