ПМТФ, № 4, 1963

# К ОЦЕНКЕ РОЛИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ТЕПЛООБМЕНА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

*С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев, Н. А. Рубцов*

(*Новосибирск*)

Интерес к исследованиям, учитывающим влияние теплового излучения на процессы теплообмена, за последнее время заметно увеличился в связи с все возрастающим практическим применением высокотемпературных процессов.

Излучение вносит в процесс теплообмена как прямой, так и косвенный вклад. Последний определяется влиянием излучения на температурное поле, а следовательно, и на процессы переноса тепла теплопроводностью и конвекцией.

Ниже дается оценка роли излучения при расчетах теплообмена в турбулентном пограничном слое высокотемпературного газа. При этом использованы относительные предельные законы теплообмена и трения турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости [1].

Известно, что в ядре плоского турбулентного пограничного слоя плотность теплового потока по нормали к обтекаемой поверхности определяется выражением

$$q = -c_p\gamma \langle v_y\theta \rangle (1 - \beta_T) \tag{1}$$

где $\beta_T$ — коэффициент, учитывающий влияние пульсаций плотности на турбулентный перенос тепла; $\langle v_y\theta \rangle$ определяется гипотезой Прандтля

$$\langle v_y\theta \rangle = l_T^2 \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \tag{2}$$

Здесь $l_T$ — длина пути теплового смещения. При $c_p = \text{const}$ из (1) и (2) может быть получено искусственно выражение для суммарного, комбинированного критерия Стентона $S$, отображающего турбулентно-лучистый перенос тепла на стенку

$$S = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{\varphi} l_T^2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} (1 - \beta_T) \tag{3}$$

Здесь

$$\omega = \frac{w_x}{w_0}, \quad \vartheta = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}, \quad \varphi = \frac{q}{q_1''} \quad (q_1'' = q_1 + E_1)$$

Индексы 0 и 1 обозначают значение величин соответственно в невозмущенном потоке и на стенке, $q_1''$ — общий ($q_1$ — конвекция и $E_1$ — излучение) поток на стенке, $\rho$, $\rho_0$ — плотность газов в пределах пограничного слоя и невозмущенного потока.

Анализируемый критерий $S$ относится к значению критерия $S_0$, подсчитанному в условиях обтекания пластины неизлучающим потоком с физическими параметрами, не изменяющимися по толщине пограничного слоя ($\rho = \rho_0$)

$$\frac{S}{S_0} = \frac{\rho}{\rho_0} l_T^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} (1 - \beta_T) \frac{1}{S_0\varphi_0} \frac{\varphi_0}{\varphi}$$

Здесь $\varepsilon$ — коэффициент неподобия полей температур и скоростей.

Это соотношение позволяет получить, так же как и в работе [1], для предельных переходов при $R \to \infty$ интегральные выражения

$$\Psi_s = \left(\int_0^1 \left(\frac{\rho\varphi_0}{\rho_0\varphi\varepsilon}\right)^{1/2} d\vartheta\right)^2 \quad \text{или} \quad \int_0^1 \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Psi_s (\varphi/\varphi_0)(\rho_0/\rho)}} = 1 \quad \left(\Psi_s = \left(\frac{S}{S_0}\right)_{R_T^{**}}\right) \tag{4}$$

позволяющие косвенно рассчитывать теплообмен на поверхности пластины, обтекаемой излучающим турбулентным потоком. Здесь $\Psi_s$ — безразмерный параметр лучисто-конвективного теплообмена, $R$ — число Рейнольдса.

Для установления влияния излучения на суммарный эффект переноса тепла следует отнести $\Psi_s$ и $\Psi_q$, рассчитанному при тех же условиях, но без учета излучения. Роль излучения может быть оценена из следующего общего соотношения:

$$\frac{S}{S_q} = \frac{1}{\Psi_q}\left(\int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^{1/2} d\vartheta\right)^2 \tag{5}$$

Критерий $S$ дает результирующий эффект лучисто-конвективного теплового переноса, отображающий взаимодействие излучения с турбулентным переносом в пределах пограничного слоя. Это взаимодействие скрыто в безразмерном потоке тепла $\varphi$. Анализ такого взаимодействия может быть проведен путем отнесения разности между $S$ и $S_q$ к лучистому критерию $S_E$

$$\frac{S - S_q}{S_E} = \frac{1}{\Psi_F}\left[\left(\int_0^0 \left(\frac{\rho\varphi_0}{\rho_0\varphi}\right)^{1/2} d\vartheta\right)^2 - \Psi_q\right] \tag{6}$$

где

$$S_E = \frac{E_1}{c_p\gamma_0 w_0 (T_1 - T_0)}, \quad S_q = \frac{q_1}{c_p\gamma_0 w_0 (T_1 - T_0)}, \quad \Psi_p = \frac{S_q}{S_0}, \quad \Psi_E = \frac{S_E}{S_0}$$

Здесь $\Psi_q$ и $\Psi_E$ — безразмерные параметры соответственно турбулентного (без излучения) и лучистого теплообмена, $q_1$ и $E_1$ — турбулентный и лучистый результирующие потоки тепла на поверхности обтекаемой стенки.

Заметим, что $\Psi_E$ и соответственно $E_1$ определяются существующими решениями относительно результирующей плотности излучения.

Применим эти соотношения к теплообмену на пластине, обтекаемой турбулентным потоком излучающего газа. Набегающий поток рассматривается как серая среда со средними интегральными, оптическими свойствами ($k = \alpha + \beta$, $\beta = 0$). Здесь $k$ — коэффициент ослабления среды, складывающийся в общем случае из коэффициентов поглощения $\alpha$ и рассеяния $\beta$. Эти свойства среды считаются не зависящими от температуры ($k = \text{const}$). Поверхность пластины — серое тело, $A_1 = \text{const}$ при температуре $T_1 = \text{const}$. Невозмущенная часть потока за пределами пограничного слоя излучает как объемное серое тело $\varepsilon_0 = \text{const}$, не отражающее со своей поверхности и находящееся при температуре невозмущенного потока, $T_0 = \text{const}$.

Как следует из соотношения (4), вычисление $\Psi_s$ сопряжено с отысканием параметра $\varphi_0 / \varphi$, который является также неизвестным.

Как обычно, тепловой поток $\varphi_0$ аппроксимируем полиномом третьей степени

$$\varphi_0 = 1 - 3\xi_T^2 + 2\xi_T^3$$

коэффициенты которого определяются из граничных условий

$$\varphi = 0, \quad \partial\varphi / \partial\xi_T = 0 \quad \text{при } \xi_T = 1.0, \qquad \varphi = 1 - \varphi_{1,E} \quad \text{при } \xi_T = 0 \tag{7}$$

и уравнения энергии

$$\partial\varphi / \partial\xi_T = -\partial\varphi_E / \partial\xi_T|_{\xi_T \approx 0} \tag{8}$$

в околостеночной области.

Искомый безразмерный параметр $\varphi_0 / \varphi$ записывается следующим образом:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi} = \left(1 - \varphi_{1,E} - \frac{\partial \varphi_E}{\partial \xi_T} \xi_T f(\xi_T)\right)^{-1} \tag{9}$$

Входящее в это выражение $\varphi_{1,E}$ и $\partial\varphi_E / \partial\xi_T$ определяются оптико-геометрическими и режимными параметрами излучающей системы и будут в общем случае функциями сложного вида. Их определение может быть проведено, исходя из общих выражений [2], для объемной ($\eta$) и поверхностной ($E$) плотностей результирующего излучения в некоторых точках соответственно объема $V$ и поверхности $F$

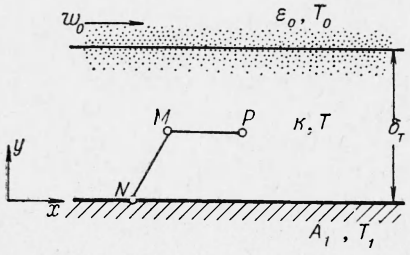
$$-\eta(M) = \eta_-(M) - \alpha(M) \int_F \Gamma_1(M, N)\, E_-(N)\, dF_N - \alpha(M) \int_V L_1(M, P)\, \eta_-(P)\, dV_p \qquad (M \in U_V) \tag{10}$$

$$E(M) = A(M) \int_F A(N)\, \Gamma(M, N)\, E_0(N)\, dF_N + 4A(M) \int_V \alpha(P)\, L(M, P)\, E_0(P)\, dV_p - A(M)\, E_0(M) \qquad (M \in U_F)$$

Здесь

$$\eta_-(M) = 4\alpha(M)\, E_0(M), \qquad E_0(M) = \sigma_0 T^4(M), \qquad E_-(N) = A(N)\, E_0(N)$$

Через $\Gamma_1(M, N)$, $L_1(M, P)$, $\Gamma(M, N)$ и $L(M, P)$ в (8) обозначено разрешение ядра соответствующих интегральных уравнений излучения [2], имеющие физический смысл разрешающих угловых коэффициентов излучения между элементарными площадками в фиксированной точке $M$ текущих точках $N$ и $P$. В общем случае разрешающие угловые коэффициенты определяются интегральными соотношениями. В частном случае, когда излучающая система приближенно представлена плоскопараллельной схемой пограничного слоя (фиг. 1) с оптическими свойствами, указанными выше, может быть учтено лишь однократное отражение от поверхности диффузно излучающей пластины. Указанные обстоятельства позволяют свести уравнения (10) к выражениям, записанным для условий околостеночной области




Фиг. 1. Схема пограничного слоя

$$\left.\frac{\partial E}{\partial y}\right|_{y \approx 0} = 4\sigma_0 k T_1^4 - 2\sigma_0 k \varepsilon_0 [K_1(k\delta_T) - 2R_1 K_2(k\delta_T)]\, T_0^4 + 2\sigma_0 k^2 \int_0^{\delta_T} [\mathrm{Ei}(-k\zeta) - 2R_1 K_1(k\zeta)]\, T^4(\zeta)\, d\zeta \tag{11}$$

$$E_1 = -2\sigma_0 A_1 \varepsilon_0 K_2(k\delta_T)\, T_0^4 - \sigma_0 A_1 T_1^4 + 2\sigma_0 k A_1 \int_0^{\delta_T} K_1(k\zeta)\, T^4(\zeta)\, d\zeta$$

Здесь использованы специальные функции [3] вида

$$K_1(x) = x\mathrm{Ei}(-x) + e^{-x}, \quad K_2(x) = \frac{1}{2}[xK_1(x) - e^{-x}]$$

$$\left(\mathrm{Ei}(-x) = -\int_y^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\varepsilon\right)$$

Ограничимся рассмотрением случая интенсивного теплообмена ($T_0 \gg T_1$). В связи с этим, уравнения (11) упростятся и могут быть представлены в безразмерном виде

$$\varphi_{1,E} = -\frac{A_1 N}{S}\left[2\varepsilon_0 K_2(B) - 2B\int_0^1 K_1(B\zeta)\,\vartheta^4(\zeta)\,d\zeta\right] \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi_E}{\partial \xi_T} = \frac{2BN}{S}\left\{\varepsilon_0[K_1(B) + 2R_1K_2(B)] - \right.$$

$$\left. - B\int_0^1 [\mathrm{Ei}(-B\zeta) - 2R_1K_1(B\zeta)]\,\vartheta^4(\zeta)\,d\zeta\right\} \tag{13}$$

$$\left(N = \frac{\sigma_0 T_0^3}{c_p \gamma_0 W_0},\ B = kV_T\right)$$

Здесь $B$ — критерий Бугера.

В соответствии с (9), (12) и (13) составляется соотношение $\varphi / \varphi_0$. При этом, следуя работе [1], полагаем $f(\xi_T) \approx 1$ и $\xi_T$ выражаем через $\vartheta$ посредством соотношения $\xi_T = \vartheta^7$ при значении числа Праидтля $P = 1$. Подставляя значения $\rho_0 / \rho$ и $\Psi_s \varphi / \varphi_0$ при $R_1 = 1 - A_1 \approx 0$, сводим решение задачи к отысканию $\Psi_s$ из интегрального соотношения

$$\int_0^1 \{\vartheta\,[\Psi_s + a(\zeta) + b(\zeta)\,\vartheta^7]\}^{-1/2}\, d\vartheta = 1 \tag{14}$$

Здесь

$$a(\zeta) = \frac{2N}{S_0}\left[\varepsilon_0 K_2(B) - B\int_0^1 K_1(B\zeta)\,\vartheta^4(\zeta)\,d\zeta\right.$$

$$b(\zeta) = \frac{2BN}{S_0}\left[\varepsilon_0 K_1(B) - B\int_0^1 \mathrm{Ei}(-B\zeta)\,\vartheta^4(\zeta)\,d\zeta\right] \tag{15}$$

Решение интегрального соотношения (14) относительно $\Psi_s$ может быть получено приближенно, путем разложения подынтегральной функции в ряд. Вводя подстановку $\theta = \vartheta^7$, а затем разлагая подынтегральную функцию в биномиальный ряд относительно $\theta$ и интегрируя его почленно, уравнение (14) запишем в виде соотношения

$$(\Psi_s + a)^{-1/2}\left\{2 - \tfrac{1}{15}\, b(\Psi_s + a)^{-1} + \tfrac{3}{4\cdot 29}\, b^2(\Psi_s + a)^{-2} - \right.$$

$$\left. - \tfrac{5}{8\cdot 43}\, b^3(\Psi_s + a)^{-3} + \ldots\right\} = 1$$

Анализируя постоянные ряда, представленного фигурными скобками, отмечаем, что $b \ll (\Psi_s + a)$. Это определяет быструю сходимость знакопеременного ряда. Ограничиваясь его первыми двумя членами, получаем

$$(\Psi_s + a)_{n+1} = [2 - {}^1/_{15}\, b(\Psi_s + a)_n^{-1}]^2 \tag{16}$$

Эта формула позволяет сравнительно просто определять численные значения $\Psi_s$ методом последовательных приближений. Здесь $n$ — порядок приближения.

Соотношение (16), представленное в каноническом виде

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0 \qquad (B = 0)$$

позволяет в качестве первого приближения использовать приближенное решение, действительный корень которого $x_3 = A$ ($|A| = 2$). Это определяется тем, что [4]

$$|A| \gg E, \qquad E^3 = C = x_1x_2x_3 = {}^1/_{15}\, b$$

Третье приближение ($n = 2$) позволяет получить решение (16) относительно ($\Psi_s + a$) с точностью до четвертого знака. Входящие в (16) коэффициента $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ могут быть представлены в форме, весьма удобной для вычислений, если приближенно полагать $\vartheta(\zeta) \approx \zeta^{1/4}$. В действительности показатель степени при $\zeta$ меньше ($\vartheta = \zeta^{1/7}$). Однако в данном случае это не существенно в связи с тем, что при малых оптических плотностях пограничного слоя ($B < 0.4$) рассматриваемый член, отображающий роль собственного излучения пограничного слоя в переносе тепла на стенку, пренебрежим ($< 0.2$), а при больших оптических плотностях ($B > 0.4$) сказывается допущение $T_1 \ll T_0$. В общем же случае рассматриваемое приближение $\vartheta \approx \zeta^{1/4}$ несколько завышает собственное излучение пограничного слоя. Однако это позволяет осуществить линеаризацию подынтегральных функций и легко получить квадратуры соответствующих интегралов в выражениях для $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$. Интеграл в первом равенстве (15) вычисляется следующим образом

$$B\int_0^1 K_1(B\zeta)\,\zeta d\zeta = \frac{1}{B}\int_0^B K_1(B\zeta)\,(B\zeta)\,d(B\zeta)$$

и, анализируя затем правый интеграл, имеем

$$\int_0^B K_1(x)\,x\,dx = e\int_0^B e^{-x}x dx + \int_0^B x^2\,\mathrm{Ei}(-x)\,dx$$

Известно [5], что

$$\int_0^B x^2\,\mathrm{Ei}(-x)\,dx = -\int_0^B x^2 E_1(x)\,dx =$$

$$= -2\left\{\frac{1}{3} - \left[\frac{B^2}{2}E_2(B) + BE_3(B) + E_4(B)\right]\right\}$$

Используя далее соотношения между функциями $E_n(x)$ различных порядков

$$nE_{n+1}(x) = e^{-x} - xE_n(x)$$

получаем в окончательном виде

$$2\frac{BN}{S_0}\int_0^1 K_1(B\zeta)\,\vartheta^4(\zeta)\,d\zeta \approx \frac{2N}{3BS_0}\,[1 - e^{-B} + 2BK_2(B)]$$

Аналогичным образом в (15) получаем

$$B\int_0^1 \mathrm{Ei}(-B\zeta)\,\vartheta^5(\zeta)\,d\zeta \approx -\frac{1}{2B}\,[1 - e^{-B} - BK_1(B)]$$

Принятое допущение в итоге позволило представить выражения (15) в следующем виде:

$$a(\zeta) = -\frac{2}{3}\frac{N}{S_0 B}\left[A(B) + BK_2(B)(2-3\varepsilon_0)\right] \qquad (17)$$

$$b(\zeta) = \frac{N}{S_0}\left[A(B) + BK_1(B)\right] \qquad (A(B) = 1 - e^{-B})$$

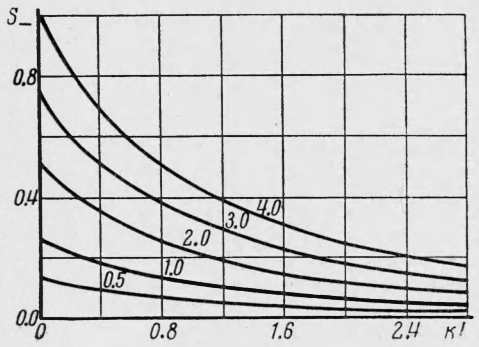
Здесь $A$ — поглощательная способность пограничного слоя. В заключение исследуем безразмерный параметр теплообмена $\Psi_s$ для конкретного случая обтекания пластины излучающим газом, являющимся в своей невозмущенной части оптически плотным ($\varepsilon_0 \approx 1$).

Расчетное выражение для $\Psi_s$ получаем из (16) и (17).

С точностью до третьего знака в процессе отыскания последовательных приближений это выражение имеет следующий вид:

$$\Psi_s = \left\{2 - 0.016\frac{N}{S_0}\left[A(B) + BK_1(B)\right]\right\}^2 + \frac{2}{3}\frac{N}{S_0 B}\left[A(B) - BK_2(B)\right] \qquad (18)$$

На фиг. 2 представлены результаты расчетов по формуле (18), изображенные в виде зависимости $S = S / S_q - 1$ от критерия оптической плотности пограничного слоя для нескольких значений $N / S_0 = 0.5$, 1.0, 2.0, 3.0 и 4.0. Представленные зависимости хорошо отображают существенную роль оптической плотности в переносе сложного, лучисто-конвективного потока на стенку, особенно для больших $N / S_0$, характеризующих долю излучения невозмущенного потока.




Фиг. 2. Зависимость $S/S_q - 1$ от оптической плотности пограничного слоя для значений параметра $N / St_0 = 0.5$, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, указанных на кривых

С ростом критерия $B$ значения параметра $(S - S_q) / S_E$ уменьшаются, что определяется взаимодействием излучения с конвекцией, усиливающимся в оптически плотных средах.

Таким образом, предельные относительные законы трения и теплообмена позволяют сравнительно просто учитывать излучение в расчетах сложного теплового переноса в турбулентном пограничном слое.

Приближенное решение для расчета лучисто-конвективного параметра теплообмена $\Psi_s$ на непроницаемой пластине имеет простую форму записи (18) для случая интенсивного теплообмена.

Поступила 12 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Изд. СО АН СССР, 1962.
2. Суринов Ю. А. О некоторых вопросах теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающих средах. ДАН СССР, 1958, т. 123, № 5.
3. Genzel L. Der Anteil der Wärmestrahlung bei Wärmeleitungsvorgängen. Z. Phys. 1953, Bd. 135. S. 177—195.
4. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми, 1959.
5. Кондратьев К. Я. Лучистый теплообмен в атмосфере. Гидрометеоиздат, 1956, стр. 167.