ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ОДНОГО СТРУЙНОГО ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. П. Фролов (Москва)

Как известно, изучение пространственных движений идеальной жидкости со свободными поверхностями наталкивается на значительные математические трудности, поскольку в этом случае не имеется такого мощного средства анализа, каким является теория функций комплексного переменного для плоских струйных течений [1]. Поэтому представляет интерес изучение частного вида пространственных струйных течений идеальной жидкости, распространяющихся по произвольной твердой поверхности тонким слоем [2–4]. Движения жидкости такого вида наблюдаются при растекании струи гидромонитора по породе и при работе пелтоновых гидротурбин [2], в приборах по определению динамического поверхностного натяжения [5–6], в теории реактивного закрылка и газогидродинамического руля [7–9], при распылении топлива в форсунках [10], в различных аппаратах химической технологии [11,12].

В настоящей работе проведено исследование групповых свойств уравнений осесимметричного тонкослойного струйного потока невесомой жидкости, распространяющегося по произвольной поверхности вращения, и построены некоторые инвариантные решения этих уравнений.

1. Рассмотрим струйное тонкослойное течение идеальной несжимаемой жидкости по непроницаемой гладкой поверхности вращения S. Отнесем указанное движение к криволинейной ортогональной системе координат, непосредственно связанной с обтекаемой поверхностью. За координатные линии $q_1 = \mathrm{const}$ и $q_2 = \mathrm{const}$ на поверхности S выберем ортогональные семейства линий кривизны [2] (параллели и меридианы). Третью координату q_3 будем отсчитывать по внешней нормали поверхности S. Уравнения Эйлера и уравнение неразрывности для установившегося осесимметричного течения в выбранной системе координат имеют вид

$$\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_3}{H_3}\frac{\partial v_1}{\partial q_3} + \frac{v_1 v_3}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{v_3^2}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{\rho H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1}$$

$$\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{v_1 v_3}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} - \frac{v_1^2}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{\rho H_3}\frac{\partial p}{\partial q_3} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_3 H_1 H_2) = 0$$

Здесь v_1, v_3 — составляющие скорости по осям системы координат; p, ρ — давление и плотность жидкости соответственно; H_1, H_2, H_3 — параметры Ламэ, определяемые в нашем случае формулами [13] (1.2)

$$H_1(q_1, q_3) = A_1(q_1)\,[1 + q_3/R_1(q_1)],\quad H_2(q_1, q_3) = A_2(q_1)\,[1 + q_3/R_2(q_1)]\,H_3(q_1, q_3) = 1$$

В формулах (1.2) $R_1(q_1)$ и $R_2(q_1)$ — главные радиусы кривизны, а $A_1(q_1)$ и $A_2(q_1)$ — коэффициенты первой основной квадратичной формы поверхности вращения $dS^2 = A_1^2(q_1)\,dq_1^2 + A_2^2(q_1)\,dq_2^2$. Пусть поверхность S образована вращением плоской кривой $z = z(s)$, $y = y(s) > 0$ около оси z декартовой системы координат xyz (s — длина дуги кривой). В этом случае первая основная квадратичная форма поверхности вращения S будет иметь вид [14]

$$dS^2 = ds^2 + y^2(s)dq_2^2,\quad A_1 = 1,\quad A_2 = y(s),\quad s = q_1 \qquad (1.3)$$

Предполагая, что толщина струи $h(s)$, измеряемая по нормали к поверхности S до пересечения ее со свободной поверхностью струи, значительно меньше $R = \min\{R_1(s), R_2(s)\}$ на поверхности, из уравнений (1.1) аналогично плоскому случаю [4] получим для осесимметричного потока

$$u\frac{\partial u}{\partial s} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial s},\quad u^2\varkappa(s) = \frac{\partial w}{\partial r},\quad \varkappa(s) = \frac{1}{R_1(s)},\quad \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial r} + u\frac{y'(s)}{y} = 0 \qquad (1.4)$$

$$v_1 = u,\qquad v_3 = v,\qquad p/\rho = w,\qquad q_3 = r \qquad (1.5)$$

Уравнения (1.4) являются предельной формой системы (1.1) при $h/R \to 0$.

2. Исследуем групповые свойства системы квазилинейных дифференциальных уравнений (1.4).

Пользуясь методикой [15] вычислим основную группу G системы (1.4). Группа G вполне определяется алгеброй Ли своих инфинитезимальных операторов

$$X = \xi_s\frac{\partial}{\partial s} + \xi_r\frac{\partial}{\partial r} + \xi_u\frac{\partial}{\partial u} + \xi_v\frac{\partial}{\partial v} + \xi_w\frac{\partial}{\partial w} \qquad (2.1)$$

Здесь ξ_s, ξ_r, ξ_u, ξ_v, ξ_w — функции s, u, v, w, r.

Решение определяющих уравнений алгебры Ли для системы (1.4) в общем случае зависит от трех произвольных постоянных, соответственно чему группа G — произведение трехпараметрической группы, порождаемой независимыми операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial w}, \qquad X_3 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + 2w\frac{\partial}{\partial w} \tag{2.2}$$

Большее количество операторов возможно только в том случае, если обтекаемая поверхность вращения такова, что для нее выполняется соотношение

$$y'(s)\ \varkappa(s)/y(s)\varkappa'(s) = b = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

В этом случае, кроме операторов (2.2), система (1.4) допускает еще один оператор

$$X_4 = -\frac{\varkappa}{\varkappa'}\frac{\partial}{\partial s} + r\frac{\partial}{\partial r} + \left(1 + \frac{d}{ds}\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right) v \frac{\partial}{\partial v} \tag{2.4}$$

и группа G будет четырехпараметрической.

Любое преобразование группы G можно получить путем некоторой суперпозиции преобразований, соответствующих операторам X_1, X_2, X_3, X_4. Легко проверить, что множество операторов с базисом (2.2), (2.4) образует алгебру Ли. Вычисления показывают, что коммутатор любых двух операторов из (2.2), (2.4) — линейная комбинация этих же операторов с постоянными коэффициентами.

Будем отыскивать инвариантные решения системы (1.4), построенные на однопараметрических подгруппах основной группы G. Легко показать, что для определения всех существенно различных инвариантных решений системы (1.4), построенных на однопараметрических подгруппах основной группы G, достаточно построить решения на следующих подгруппах, образующих оптимальную систему однопараметрических подгрупп основной группы G для системы уравнений (1.4) в случае произвольной поверхности вращения

$$X_1, \qquad X_1 + X_2, \qquad X_2, \qquad \alpha X_1 + X_3 \tag{2.5}$$

Здесь α — произвольный параметр.

Для поверхности вращения (2.3) оптимальная система имеет вид

$$X_1, \qquad X_1 + X_2, \qquad X_2, \qquad \alpha X_1 + X_3, \qquad X_2 + X_4, \qquad \beta X_3 + X_4 \tag{2.6}$$

Здесь β — произвольный параметр.

3. Укажем некоторые наиболее интересные инвариантные решения, построенные на подгруппах из (2.5) и (2.6).

а) *Оператор* $\alpha X_1 + X_3$ (2.5). Полный набор функционально независимых инвариантов [15] этой подгруппы есть

$$J_1 = ue^{-r/\alpha}, \qquad J_2 = ve^{-r/\alpha}, \qquad J_3 = we^{-2r/\alpha}, \qquad J_4 = s \quad (\alpha \neq 0) \tag{3.1}$$

Разрешая (3.1) относительно u, v, w, находим

$$u = J_1(s)\, e^{r/\alpha}, \qquad v = J_2(s)\, e^{r/\alpha}, \qquad w = J_3(s)\, e^{2r/\alpha} \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в уравнения системы (1.4), получаем для функций $J_1(s)$, $J_2(s)$, $J_3(s)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\alpha J_1 J_1' + J_2 J_1 + \alpha J_3' = 0, \ \alpha J_1^2 \varkappa = 2J_3, \ \alpha J_1' + J_2 + \alpha J_1\, y'/y = 0 \tag{3.3}$$

Система (3.3) интегрируется до конца. Решение основных уравнений (1.4) запишем в виде

$$u = \left(\frac{2c_1}{\alpha\varkappa}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{r}{\alpha} - \int \frac{y'ds}{\alpha y\varkappa}\right\}, \qquad v = -\left(\frac{2c_1}{\alpha\varkappa}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{r}{\alpha} - \int\frac{y'ds}{\alpha y\varkappa}\right\}\left(\frac{\alpha y'}{y} - \frac{\alpha\varkappa'}{2\varkappa} + \frac{y'\sqrt{\alpha}}{y\varkappa}\right) \tag{3.4}$$

$$w = c_1 \exp\left\{\frac{2r}{\alpha} - \int\frac{2y'ds}{\alpha y\varkappa}\right\} \qquad (c_1 = \mathrm{const})$$

Потребуем, чтобы решение (3.4) удовлетворяло условию

$$v = 0 \quad \text{при} \quad r = 0 \tag{3.5}$$

т. е. нормальная составляющая скорости v должна обращаться в нуль на обтекаемой поверхности. Из (3.4) при $c_1 \neq 0$ находим, что построенное решение имеет смысл при изучении струйных движений только вдоль поверхности, определяемой уравнением

$$\frac{\alpha\varkappa'}{2\varkappa} = \frac{\alpha y'}{y} + \frac{y'\sqrt{\alpha}}{y\varkappa} \tag{3.6}$$

где кривизна $\varkappa(s)$ известным образом выражается через $y(s)$ [14]. При этом в решении (3.4) $v \equiv 0$.

Условие на свободной поверхности струи

$$p = p_0 \text{ при } r = h(s) \tag{3.7}$$

определяет толщину струи $h(s)$. Из последнего соотношения (3.4) с помощью (3.6) находим

$$h(s) = \frac{\alpha}{2} \ln \frac{p_0}{\rho c_1} \left(\frac{\varkappa \sqrt{\alpha}}{\varkappa \sqrt{\alpha} + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha}}} \tag{3.8}$$

Интегрируя затем (3.6) с учетом условия

$$dy^2 + dz^2 = ds^2$$

получаем уравнение образующей поверхности вращения в виде квадратуры

$$z = \int \frac{D_1 y^{2\alpha+1} - y + D_2}{[1 - (D_1 y^{2\alpha+1} - y + D_2)^2]^{1/2}} \, dy + D_3 \tag{3.9}$$

где D_1, D_2, D_3 — постоянные, которые определяются путем задания координаты, угла наклона и кривизны образующей в начальной точке.

б) *Оператор* $\beta X_3 + X_4$ (2.6). В этом случае полный набор функционально независимых инвариантов есть

$$J_1 = r\varkappa(s), \quad J_2 = ur^{-\beta}, \quad J_3 = wr^{-2\beta}, \; J_4 = v\varkappa^{\beta+2}/\varkappa' \tag{3.10}$$

Разрешая (3.10) относительно u, v и w, получим

$$u = J_2(\xi)\, r^{\beta}, \quad v = J_4(\xi)\varkappa'(s)/\varkappa^{\beta+2}, \quad w = J_3(\xi)\, r^{2\beta}, \qquad \xi = J_1 = r\varkappa(s) \tag{3.11}$$

Для определения функций $J_2(\xi)$, $J_3(\xi)$, $J_4(\xi)$ из уравнений (1.4) с учетом соотношения (2.3) имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} J_2 J_2' \xi + J_4 J_2' \xi^{-\beta} + J_3' \xi = 0 \\ J_2^2 = J_3' + 2\beta J_3 \xi^{-1}, \qquad J_2' \xi + J_4' \xi^{-\beta} + J_2 b = 0 \end{gathered} \tag{3.12}$$

В случае $\beta = 0$ уравнения (3.12) интегрируются в конечном виде, так что получаем

$$\begin{gathered} u = c_2 \exp \left\{ -\int \frac{2\xi d\xi}{\xi^2 - 2(1-b)\xi + 2c_3} \right\} \\ v = \frac{c_2 \varkappa'}{2\varkappa^2} (\xi^2 - 2b\xi + 2c_3) \exp \left\{ -\int \frac{2\xi d\xi}{\xi^2 - 2(1-b)\xi + 2c_3} \right\} \\ w = c_2^2 \int \exp \left\{ -\int \frac{4\xi d\xi}{\xi^2 - 2(1-b)\xi + 2c_3} \right\} d\xi + c_4 \end{gathered} \tag{3.13}$$

Здесь c_2, c_3, c_4 — постоянные интегрирования. Из условия (3.5) следует, что $c_3 = 0$.

Таким образом, частное решение системы (1.4), описывающей струйное тонкослойное движение жидкости вдоль поверхности вращения, примет вид

$$u = \frac{c_2}{[\xi + 2(1-b)]^2}, \quad v = \frac{c^2 \varkappa'}{2\varkappa} \frac{r(\xi - 2b)}{[\xi + 2(1-b)]^2}, \quad w = c_4 - \frac{c_2^2}{3[\xi + 2(1-b)]^3} \tag{3.14}$$

Это решение справедливо для поверхности вращения, удовлетворяющей соотношению (2.3), из которого уравнение образующей поверхности вращения находим в виде

$$z = \int \frac{F_1 y^m + F_2}{[1 - (F_1 y^m + F_2)^2]^{1/2}} \, dy + F_3 \tag{3.15}$$

где F_1, F_2, F_3 — постоянные интегрирования, $m = (b + 1) b^{-1}$.

Условие на свободной поверхности струи (3.7) как и раньше определяет толщину струи.

Поступила 27 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Бай Ши-и. Теория струй. Физматгиз, 1960.
2. Франкль Ф. И. Приближенный расчет струйного потенциального течения жидкости, распространяющегося по поверхности твердого тела тонким слоем. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
3. Volterra V. Sur les jets liquides. J. Math. Pures et Appl., 1932, vol. 11, № 1.
4. Фролов А. П. К задаче о струйных течениях жидкости по криволинейным поверхностям. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.

5. Taylor G. The dynamics of thin sheets of fluid. Proc. Roy. Soc. A, 1959, vol. 253, No. 1274.
6. Buchwald E., König H. Dynamische Oberflächenspannung aus Flüssig keitsglocken. Ann. Phys., 1936, B. 26, H. 7.
7. Williams J., Butler S. F. J., Wood M. N. The Aerodynamics of Jet Flaps. Ministry of Aviation, ARC, R. M, 1963, No. 3304.
8. Mascell E. C., Spence D. A. A theory of the jet flap in three dimension. Proc. Roy. Soc. A, 1959, vol. 251, No. 1266.
9. Pantazopol D., Comănescu Tz. Influence of a jet sheet on a deflection of a plane jet. Rev. roumaine sci. tech., Ser. mech. appl. 1964. vol. 9, No 2.
10. Fraser R. P., Dombrowsky N., Routley J. H. The mechanisms of disintegration of liquid sheets in cross—current air streams. Appl. sci. res., A, 1963, vol. 12.
11. Franzini J. B., Hassan N. A. Hydraulics of thin films flow. J. of Hydraulic Division. Proc. of ASCE, 1964. vol. 90, No. 3816, part 2.
12. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
13. Струминский В. В. Трехмерный пограничный слой на произвольной поверхности. Докл. АН СССР, 1956, т. 108, № 4.
14. Фиников С. П. Теория поверхностей. Гостехиздат, 1934.
15. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.

ВЛИЯНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ НА КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ И ПРОФИЛЬ СКОРОСТИ ОТКРЫТОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ

О. Ф. Васильев, В. И. Квон

(Новосибирск)

В последнее время вопрос о гидравлических сопротивлениях и кинематике неустановившихся потоков вызывает все больший интерес.

Одной из первых попыток оценить влияние нестационарности на скоростную структуру потока было исследование В. В. Ведерникова и В. А. Архангельского [1].

Скоростная структура неустановившегося потока подробно изучалась Г. Ф. Федоровым. Им, в частности, установлено [2], что на свободной поверхности поступательная скорость может оказаться меньшей, чем внутри потока. Ниже предлагается объяснение этого факта.

В работе [3] проведено исследование влияния нестационарности на касательное напряжение; при этом были приняты допущения: 1) эпюры скорости равномерного и нестационарного течения сходны, 2) касательные напряжения равномерного и нестационарного течения равны на дне потока.

Здесь эти допущения снимаются и в рамках предположений, сделанных в работе [4], проводится приближенное исследование касательного напряжения и эпюры скорости при неустановившемся движении открытого плоскопараллельного турбулентного потока жидкости.

§ 1. **Напряжение трения**. Рассматриваются течения открытого плоскопараллельного турбулентного потока жидкости при больших числах Рейнольдса и малой поперечной компоненте ускорения. Тогда имеем уравнения [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cos\vartheta - \sin\vartheta\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1.1)$$

и граничные условия

$$\partial h / \partial t + u\, \partial h / \partial x = v, \quad \tau = 0 \quad \text{при } y = h; \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.2)$$

Здесь t — время; x, y — декартова прямоугольная система координат, ось x направлена по прямолинейному дну потока; u, v — компоненты скорости соответственно по осям x и y; h — глубина; τ — напряжение трения; ρ — плотность; g — ускорение силы тяжести; ϑ — угол наклона дна к горизонту (считается положительным).Для замыкания системы (1.1) необходимы дополнительные соображения, например, соотношения полуэмпирической теории турбулентности, приведенные в [4].

Представим отношение напряжения трения τ в какой-нибудь точке потока к напряжению трения на дне потока τ_0 в виде полинома по степеням $\eta = y / h$. Коэффициенты полинома

$$\tau / \tau_0 = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \ldots + b_n\eta^n \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant 1)$$