УДК 539.3

РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКИМ СТЕРЖНЕМ

И. И. Аргатов

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: argatov@home.ru

Построена асимптотическая модель деформирования упругого пространства с тонким армирующим жестким стержнем. Модуль упругости волокна значительно превышает модуль упругости матрицы. Получено решение задачи оптимизации формы армирующего стержня на основе условия равнопрочности.

Ключевые слова: упругое пространство, армирующий стержень, асимптотическая модель, условие равнопрочности.

1. Постановка задачи. Пусть упругое (с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) пространство содержит вытянутое вдоль оси Ox_3 тонкое цилиндрическое абсолютно жесткое включение $Q_\varepsilon = \omega_\varepsilon \times (-l, l)$. (Случай упругого включения переменного сечения рассмотрен ниже.) Здесь ε — малый положительный параметр; ω_ε — круг радиусом

$$r_\varepsilon = \varepsilon l. \tag{1.1}$$

Предполагается, что упругое пространство растягивается приложенным на бесконечности напряжением $\sigma_{33} = \sigma$.

Данная задача исследована в работе [1], где были получены приближенное аналитическое и численное решения. В [2, 3] найдено асимптотическое решение в случае жесткого включения эллипсоидальной формы. Решению близкой задачи посвящена работа [4]. В [5] (см. также [6, § 4.3]) помимо включения эллипсоидальной формы рассматривались также цилиндрическое включение и включение в форме остроконечного веретена. В работе [7] приближенное решение задачи для упругого цилиндрического включения получено методом [8], использованным первоначально при решении контактной задачи об изгибе балки на упругом полупространстве. Асимптотическое решение задачи теплопроводности получено в работах [9, 10]. В [11, 12] построено асимптотическое решение задачи теории упругости в случае тороидального абсолютно жесткого включения.

В настоящей работе применяется асимптотический метод, предложенный в [13, 14]. Уточненная асимптотическая модель строится с использованием модифицированной процедуры сращивания [15].

2. Внешнее асимптотическое представление. Растяжению упругого пространства отвечает линейное поле перемещений

$$\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x}) = (\sigma/E)[-\nu(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) + x_3\boldsymbol{e}_3]. \tag{2.1}$$

В силу симметрии смещения точек, принадлежащих поверхности недеформируемого стержня, должны быть нулевыми. Тем самым первые две компоненты вектора (2.1) в краевых условиях на боковой поверхности стержня Q_ε оставляют невязку $O(\varepsilon)$, в то время как третья компонента — невязку $O(1)$.

Влияние включения на деформацию матрицы в главном определяется касательными напряжениями на его боковой поверхности, поэтому на удалении от включения поле перемещений точек упругого пространства незначительно отличается от поля

$$\boldsymbol{v}(p;\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x}) + \int\limits_{-l}^{l} \boldsymbol{T}^{(3)}(x_1, x_2, x_3 - s)p(s)\,ds. \tag{2.2}$$

Здесь $p(s)$ — функция, характеризующая реакцию стержня; $\boldsymbol{T}^{(3)}(\boldsymbol{x})$ — решение Кельвина задачи о действии на упругое пространство единичной сосредоточенной силы, ориентированной вдоль оси Ox_3, причем (см., например, [16, § 5.7])

$$T_k^{(3)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{M}\Big(\frac{x_3 x_k}{|\boldsymbol{x}|^3} + (3-4\nu)\,\frac{\delta_{3,k}}{|\boldsymbol{x}|}\Big) \quad (k=1,2,3), \qquad M = \frac{8\pi E(1-\nu)}{1+\nu}. \tag{2.3}$$

Согласно (2.3) сингулярная составляющая вектора (2.2) имеет следующие компоненты:

$$M\int\limits_{-l}^{l} T_k^{(3)}(\boldsymbol{y}, z-s)p(s)\,ds = -y_k I_3^1(p;\boldsymbol{y},z) \qquad (k=1,2); \tag{2.4}$$

$$M\int\limits_{-l}^{l} T_3^{(3)}(\boldsymbol{y}, z-s)p(s)\,ds = 4(1-\nu)I_1^0(p;\boldsymbol{y},z) - |\boldsymbol{y}|^2 I_3^0(p;\boldsymbol{y},z). \tag{2.5}$$

Здесь

$$I_m^n(p;\boldsymbol{y},z) = \int\limits_{-l}^{l} \frac{(s-z)^n p(s)\,ds}{[(s-z)^2 + |\boldsymbol{y}|^2]^{m/2}}.$$

При $|\boldsymbol{y}| = (y_1^2+y_2^2)^{1/2} \to 0$ поведение вектор-функции $\boldsymbol{v}(p;\boldsymbol{x})$ определяется следующими асимптотическими формулами, записанными в предположении гладкости плотности $p(z)$:

$$I_3^1(p;\boldsymbol{y},z) = O\Big(C_0\sum_{\pm}\frac{1}{l\pm z} + C_1\ln\Big(\frac{\sqrt{l^2-z^2}}{|\boldsymbol{y}|}\Big) + C_2 l\Big); \tag{2.6}$$

$$I_3^0(p;\boldsymbol{y},z) = \frac{2}{|\boldsymbol{y}|^2}\,p(z) + O\Big(C_0\sum_{\pm}\frac{1}{(l\pm z)^2} + C_1\sum_{\pm}\frac{1}{l\pm z} + C_2\ln\Big(\frac{\sqrt{l^2-z^2}}{|\boldsymbol{y}|}\Big) + C_3 l\Big); \tag{2.7}$$

$$I_1^0(p;\boldsymbol{y},z) = p(z)\Big[-2\ln\Big(\frac{|\boldsymbol{y}|}{2l}\Big) + \ln\Big(1-\frac{z^2}{l^2}\Big)\Big] + (\boldsymbol{J}p)(z) + O\Big(C_1|\boldsymbol{y}| + C_0\sum_{\pm}\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{(l\pm z)^2}\Big). \tag{2.8}$$

Здесь

$$C_i = \max_{z\in[-l,l]} p^{(i)}(z) \qquad (i=0,1,2).$$

Интегральный оператор $\boldsymbol{J}$ действует в соответствии с формулой

$$(\boldsymbol{J}p)(z) = \int\limits_{-l}^{l} \frac{p(s)-p(z)}{|z-s|}\,ds. \tag{2.9}$$

Отметим, что при фиксированном значении $z \in (-l, l)$ только третья компонента $v_3(p; \boldsymbol{y}, z)$ вектора (2.2) оказывается неограниченной при $|\boldsymbol{y}| \to 0$ (см., в частности, соотношения (2.8) и (2.5)). Определяемые формулами (2.6)–(2.8) главные члены асимптотики интегралов (2.4), (2.5) согласуются с результатами работы [4].

3. Плоский пограничный слой. В плоскостях, ортогональных оси стержня, введем “растянутые” координаты

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2), \qquad \eta_i = \varepsilon^{-1} y_i. \tag{3.1}$$

Приближенное представление поля перемещений матрицы вблизи включения будем искать в форме

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}; z) = V_3(\boldsymbol{\eta}; z)\boldsymbol{e}_3. \tag{3.2}$$

Подставим выражение (3.2) в уравнения Ламе и выделим старшие относительно параметра ε члены. Тогда функция $V_3(\boldsymbol{\eta}; z)$ во внешности замкнутого круга $\overline{\omega}_1$ радиусом l должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\mu \Delta_\eta V_3(\boldsymbol{\eta}; z) = 0, \qquad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}_1, \tag{3.3}$$

где $\mu = E[2(1+\nu)]^{-1}$ — модуль сдвига.

В случае абсолютно жесткого стержня к уравнению (3.3) добавляется однородное краевое условие

$$V_3(\boldsymbol{\eta}; z) = 0, \qquad \boldsymbol{\eta} \in \partial\omega_1. \tag{3.4}$$

Зависимость от “растянутой” переменной $z \in (-l, l)$ в задаче (3.3), (3.4) является параметрической.

В соответствии с методом сращиваемых асимптотических разложений (см., например, [17, 18]) асимптотические формулы (2.5) и (2.8) определяют логарифмическое поведение функции $V_3(\boldsymbol{\eta}; z)$ при $|\boldsymbol{\eta}| \to \infty$.

Функция

$$G_\infty(\boldsymbol{\eta}) = -\frac{1}{2\pi} \ln\Big(\frac{|\boldsymbol{\eta}|}{l}\Big) \tag{3.5}$$

удовлетворяет соотношениям (3.3) и (3.4), причем

$$\int\limits_{\partial\omega_1} \partial_\nu G_\infty(\boldsymbol{\eta})\, ds_\eta = 1. \tag{3.6}$$

Здесь $\partial_\nu = \nu_1(\partial/\partial\eta_1) + \nu_2(\partial/\partial\eta_2)$ — производная вдоль внутренней (относительно области ω_1) единичной нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ к контуру $\partial\omega_1$; ds_η — элемент длины дуги.

Положим

$$V_3(\boldsymbol{\eta}; z) = \mu^{-1} p(z) G_\infty(\boldsymbol{\eta}). \tag{3.7}$$

Тогда касательные напряжения в упругом пространстве вблизи боковой поверхности стержня Q_ε в главном вычисляются по формулам

$$\sigma_{i3}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{y}, z) = \varepsilon^{-1} p(z)\, \frac{\partial G_\infty}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\eta}) \qquad (i = 1, 2). \tag{3.8}$$

При этом отнесенная к единице длины стержня равнодействующая касательных напряжений $\sigma_{n3} = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2$ на площадке с внутренней (относительно Q_ε) единичной нормалью $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, 0)$ с учетом формул (3.8) и (3.6) равна

$$\int\limits_{\partial\omega_\varepsilon} \sigma_{n3}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{y}, z)\, ds_y = p(z).$$

Из данной формулы следует механический смысл функции $p(z)$ как плотности погонных касательных напряжений, действующих на матрицу со стороны включения.

В окрестностях концов стержня напряженно-деформированное состояние в упругой матрице существенно трехмерно и не описывается построенными уравнениями плоского пограничного слоя. Подходы к построению соответствующих пространственных пограничных слоев рассмотрены в работах [5, 10].

4. Сращивание внутреннего и внешнего асимптотических представлений. Выполнив замену переменных (3.1) в представлении (3.7) с учетом соотношений (3.5) и (1.1), получим

$$V_3(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{y}; z) = -\frac{1}{2\pi\mu}\, p(z) \ln\Big(\frac{|\boldsymbol{y}|}{r_\varepsilon}\Big). \tag{4.1}$$

В то же время из формул (2.7), (2.8), (2.5) и (2.2) для фиксированного значения $z \in (-l, l)$ при $|\boldsymbol{y}| \to 0$ с точностью до членов порядка $O(C|\boldsymbol{y}|)$ имеем

$$\begin{aligned} v_3(p; \boldsymbol{y}, z) = v_3^0(0, z) - \frac{2}{M}\, p(z) +& \\ + \frac{4(1-\nu)}{M}\Big\{p(z)\Big[-2\ln\Big(\frac{|\boldsymbol{y}|}{2l}\Big) + \ln\Big(1 - \frac{z^2}{l^2}\Big)\Big] + (\boldsymbol{J}p)(z)\Big\} + \dots .& \end{aligned} \tag{4.2}$$

Напомним, что процедура сращивания заключается в определении уравнения, связывающего функции $p(z)$ и $v_3^0(0, z)$, из которого должно следовать асимптотическое соотношение

$$v_3(p; \boldsymbol{y}, z) - V_3(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{y}; z) = o(1), \qquad |\boldsymbol{y}|/l \sim \sqrt{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{4.3}$$

Из условий совпадения выписанной в разложении (4.2) асимптотики внешнего представления поля перемещений упругого пространства с его внутренним представлением (4.1) получаем следующее уравнение:

$$p(z)\Big[2\ln\Big(\frac{2l}{r_\varepsilon}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)} + \ln\Big(1 - \frac{z^2}{l^2}\Big)\Big] + (\boldsymbol{J}p)(z) = -\frac{2\pi E}{1+\nu}\, v_3^0(0, z). \tag{4.4}$$

Как известно, в силу свойств интегрального оператора $\boldsymbol{J}$ (см. формулу (2.9)) задача отыскания решения результирующего уравнения (4.4) при малых значениях параметра ε представляет собой некорректно поставленную задачу [10, 19]. Однако для построения асимптотики решения исходной задачи достаточно найти приближенное (с точностью до $O(\varepsilon)$) решение уравнения (4.4).

Замечание 4.1. Из работ [10, 19] следует, что уравнение (4.4) остается в силе и в случае стержня Q_ε переменной толщины с радиусом поперечного сечения $r_\varepsilon(z)$. Так, для тонкого эллипсоида вращения с максимальным радиусом поперечного сечения $r_\varepsilon(0)$ (см. (1.1)) $r_\varepsilon(z) = r_\varepsilon\sqrt{1 - (z/l)^2}$ и уравнение (4.4) принимает наиболее простой вид

$$\Lambda_\varepsilon p(z) + (\boldsymbol{J}p)(z) = -2\pi\sigma z/(1+\nu), \tag{4.5}$$

где

$$\Lambda_\varepsilon = 2\ln(2l/r_\varepsilon) - 1/[2(1-\nu)]. \tag{4.6}$$

Нетрудно проверить, что решение уравнения (4.5) выражается формулой

$$p(z) = -\frac{2\pi\sigma}{1+\nu}\,\frac{z}{\Lambda_\varepsilon - 2}. \tag{4.7}$$

Замечание 4.2. Уравнение (4.4) содержит большой (при $\varepsilon \to 0$) параметр Λ_ε, поэтому оно допускает асимптотическое решение в форме разложения [19]

$$p(z) = \Lambda_\varepsilon^{-1} q^0(z) + \Lambda_\varepsilon^{-2} q^1(z) + \dots . \tag{4.8}$$

Подставляя разложение (4.8) в уравнение (4.4), находим

$$q^0(z) = -\frac{2\pi E}{1+\nu}\, v_3^0(0,z), \quad q^i(z) = -q^{i-1}(z) \ln\Big(1 - \frac{z^2}{l^2}\Big) - (\boldsymbol{J} q^{i-1})(z) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4.9}$$

Заметим, что решение, полученное в работах [4, 5], соответствует главному члену (4.9) "логарифмической" асимптотики (4.8).

5. Уравнение для определения плотности p**.** В работе [15] предложена модифицированная процедура сращивания внешнего (2.2) и внутреннего (3.2) асимптотических представлений без использования асимптотических формул (2.8) и (4.2), содержащих интегральный оператор $\boldsymbol{J}$. Так, согласно соотношениям (2.5), (2.7) при $|\boldsymbol{y}| \to 0$ вместо асимптотического разложения (4.2) имеем

$$v_3(p; \boldsymbol{y}, z) = v_3^0(0,z) + \frac{4(1-\nu)}{M}\, I_1^0(p; \boldsymbol{y}, z) - \frac{2}{M}\, p(z) + O\Big(C \sum_{\pm} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{(l \pm z)^2}\Big). \tag{5.1}$$

Используя асимптотическую формулу (2.8), нетрудно показать, что условие сращивания (4.3) будет выполнено, если при $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{\varepsilon}\, l$ приравнять выражения, выписанные в разложениях (5.1) и (4.1). В результате получим следующее уравнение (ср. с (4.4)):

$$\Lambda p(z) + (J_\varepsilon p)(z) = -2\pi E v_3^0(0,z)/(1+\nu). \tag{5.2}$$

Здесь

$$(J_\varepsilon p)(z) = \int\limits_{-l}^{l} \frac{p(s)\, ds}{\sqrt{(z-s)^2 + r_\varepsilon l}}, \qquad \Lambda = \ln\Big(\frac{l}{r_\varepsilon}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)}. \tag{5.3}$$

Теорема об однозначной разрешимости уравнения (5.2) доказана в работе [15].

Замечание 5.1. Уравнения (5.2) и (4.4) справедливы и для случая цилиндрического стержня Q_ε с поперечным сечением ω_ε произвольной формы (см. также [14]). При этом величина r_ε равна внешнему конформному радиусу замкнутой области $\overline{\omega}_\varepsilon$ (см., например, [20]).

6. Асимптотическая модель деформации жесткого волокна в упругой матрице. Предположим, что стержень Q_ε выполнен из упругого материала с модулем упругости E_j. Будем считать, что отношение E_j/E велико. В отсутствие объемных нагрузок деформация стержня описывается уравнением

$$E_j S_\varepsilon \frac{d^2 w}{dz^2}(z) = p(z), \qquad z \in (-l, l) \tag{6.1}$$

с краевыми условиями (воздействием растягиваемой матрицы на стержень через его торцы пренебрегается)

$$E_j S_\varepsilon \frac{dw}{dz}(\pm l) = 0. \tag{6.2}$$

Здесь S_ε — площадь поперечного сечения ω_ε; $w(z)$ — перемещение сечения стержня с координатой z.

Уравнение, связывающее функцию $w(z)$ с реакцией $p(z)$, выводится с помощью метода, предложенного в [13, 14]. Предположению о полном сцеплении волокна с матрицей соответствует краевое условие $V_3(\boldsymbol{\eta}; z) = w(z)$ при $\boldsymbol{\eta} \in \partial\omega_1$ (ср. с (3.4)). Отсюда следует новое выражение для нетривиальной компоненты плоского пограничного слоя (ср. с (3.7)):

$$V_3(\boldsymbol{\eta}; z) = \mu^{-1} p(z) G_\infty(\boldsymbol{\eta}) + w(z). \tag{6.3}$$

Результатом сращивания внешнего асимптотического представления (2.2) с внутренним (3.2), (6.3) является следующее уравнение:

$$p(z)[\Lambda_\varepsilon + \ln(1 - z^2/l^2)] + (\boldsymbol{J}p)(z) = 2\pi E[w(z) - v_3^0(0,z)]/(1+\nu)$$

(параметр Λ_ε и интегральный оператор $\boldsymbol{J}$ определены в (4.6) и (2.9)).

Применяя модифицированную процедуру сращивания [15], получим уравнение

$$\Lambda p(z) + (J_\varepsilon p)(z) = 2\pi E[w(z) - v_3^0(0,z)]/(1+\nu) \tag{6.4}$$

(параметр Λ и интегральный оператор J_ε определены в (5.3)).

Результаты численных расчетов по асимптотической модели (6.1), (6.2), (6.4) сопоставлены с результатами расчетов [1] методом конечных элементов. Рассчитывались следующие величины: касательное напряжение на поверхности стержня $\tau(z)$ и среднее по сечению напряжение в стержне $\sigma_j(z)$:

$$\tau(z) = -\frac{1}{2\pi r_\varepsilon}\,p(z), \qquad \sigma_j(z) = \frac{1}{\pi r_\varepsilon^2}\int\limits_{-l}^{z} p(s)\,ds.$$

Вычисления проводились при $\varepsilon = 0{,}01$ и $E/E_j = 10^{-4}$; 10^{-5}. Различие полученных значений $\tau(z)$, $\sigma_j(z)$ и результатов расчетов [1] составляет 5 и 14 % соответственно.

В замечаниях 4.1 и 5.1 указаны возможные пути обобщения построенной математической модели деформации упругой матрицы с жестким стержнем. Полученные формулы могут быть использованы для вычисления оптимальной длины армирующего волокна постоянного сечения (см. также [1]).

7. Оптимизация формы армирующего стержня на основе условия равнопрочности. Используем главный член логарифмической асимптотики (4.8). Положим

$$p(z) = -\frac{1}{\Lambda(z)}\,\frac{2\pi\sigma}{1+\nu}\,z. \tag{7.1}$$

Считая радиус $r(z)$ стержня переменным, согласно формуле (4.6) имеем

$$\Lambda(z) = 2\ln\Big(\frac{2l}{r(z)}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)}. \tag{7.2}$$

Предполагается, что $\max r(z) \ll l$ при $|z| \leqslant l$.

Найдем функцию $r(z)$ из условия равнопрочности армирующего стержня. Обозначая через σ_0 допускаемое напряжение, получаем

$$\frac{1}{\pi r^2(z)}\int\limits_{-l}^{z} p(s)\,ds = \sigma_0, \tag{7.3}$$

откуда следует соотношение

$$p(z) = 2\pi\sigma_0 r(z) r'(z). \tag{7.4}$$

Подставляя выражение (7.4) в уравнение (7.1) с учетом (7.2), получаем уравнение

$$2\pi\sigma_0\Big(2\ln\Big(\frac{2l}{r}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)}\Big) r\,\frac{dr}{dz} = -\frac{2\pi\sigma}{1+\nu}\,z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$r^2(z)\Big(2\ln\Big(\frac{2l}{r(z)}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)} + 1\Big) = \frac{\sigma}{(1+\nu)\sigma_0}\,(l^2 - z^2). \tag{7.5}$$

Следует отметить, что постоянная интегрирования в интеграле (7.5) выбрана таким образом, чтобы выполнялось граничное условие $r(\pm l) = 0$, вытекающее из условия (7.3).

Главный член логарифмической асимптотики решения уравнения (7.5) определяет оптимальную форму — эллипсоид вращения:

$$r(z) = r_0\sqrt{1 - z^2/l^2}. \tag{7.6}$$

Покажем, что зависимость (7.6) является точным решением рассматриваемой задачи оптимизации, если вместо упрощенного уравнения (7.1) использовать уравнение (4.4). Действительно, подставляя выражение (7.6) в уравнение (4.4), находим (см. также формулы (4.5) и (4.7))

$$p(z) = -\frac{2\pi\sigma}{1+\nu}\frac{z}{\Lambda_0 - 2}, \tag{7.7}$$

где

$$\Lambda_0 = 2\ln\Big(\frac{2l}{r_0}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)}.$$

Подставляя выражения (7.6) и (7.7) в соотношение (7.3), получаем

$$\frac{r_0^2}{l^2}\Big(2\ln\Big(\frac{2l}{r_0}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)} - 2\Big) = \frac{\sigma}{(1+\nu)\sigma_0}. \tag{7.8}$$

Трансцендентное уравнение (7.8) позволяет определить значение параметра r_0 в формуле (7.6).

Наконец, покажем, что эллипсоидальная форма армирующего стержня (7.6) является оптимальной и при учете деформации самого волокна в рамках построенной асимптотической модели, которая определяется следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} p(z)\Big[2\ln\Big(\frac{2l}{r(z)}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)} + \ln\Big(1 - \frac{z^2}{l^2}\Big)\Big] + (\boldsymbol{J}p)(z) = \frac{2\pi E}{1+\nu}\Big(w(z) - \frac{\sigma z}{E}\Big), \\ \frac{d}{dz}\Big(E_j\pi r^2(z)\,\frac{dw}{dz}(z)\Big) = p(z), \qquad z \in (-l, l), \\ E_j\pi r^2(\pm l)\,\frac{dw}{dz}(\pm l) = 0. \end{gathered} \tag{7.9}$$

При этом условие равнопрочности стержня принимает вид

$$\frac{1}{\pi r^2(z)}\Big(E_j\pi r^2(z)\,\frac{dw}{dz}(z)\Big) = \sigma_0. \tag{7.10}$$

Положим

$$p(z) = -p_0 z/l, \qquad w(z) = w_0 z/l. \tag{7.11}$$

Тогда с учетом (7.6), (7.11) соотношения (7.9) будут выполняться точно, если выполняются равенства

$$\frac{p_0}{l}\Big(2\ln\Big(\frac{2l}{r_0}\Big) - \frac{1}{2(1-\nu)} - 2\Big) = \frac{2\pi E}{1+\nu}\Big(\frac{\sigma}{E} - \frac{w_0}{l}\Big), \qquad 2\pi E_j w_0\,\frac{r_0^2}{l^2} = p_0. \tag{7.12}$$

Подставляя выражения (7.6) и (7.11) в уравнение (7.10), получим уравнение

$$E_j w_0/l = \sigma_0. \tag{7.13}$$

Исключая из системы уравнений (7.12), (7.13) параметры p_0 и w_0, для определения параметра r_0 имеем уравнение

$$\frac{r_0^2}{l^2}\Big(2\ln\Big(\frac{2l}{r_0}\Big)-\frac{1}{2(1-\nu)}-2\Big)=\frac{\sigma}{(1+\nu)\sigma_0}-\frac{E}{(1+\nu)E_j}. \tag{7.14}$$

Из уравнения (7.14) следует, что учет деформации армирующего стержня приводит к уменьшению значения параметра r_0.

Заключение. На основе построенной в работе асимптотической модели деформирования жесткого включения переменного сечения в упругой среде исходя из критерия равнопрочности получено решение задачи оптимизации формы. Установлено, что оптимальной формой армирующего жесткого волокна является эллипсоидальная. Волокна конечной длины (зачастую моделируемые вытянутыми эллипсоидами) применяются в качестве армирующих элементов в современных композитных материалах (см., например, обзор [21]). Как известно, наибольший армирующий эффект создают включения, обладающие значительно более высокой (по сравнению с матрицей) жесткостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никошков Г. П., Черепанов Г. П.** Растяжение упругого пространства с изолированным жестким стержнем // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 460–465.
2. **Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г.** Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 1. С. 165–170.
3. **Качаловская Н. Е., Улитко А. Ф.** Напряженное состояние упругой среды, содержащей “иглообразное” включение // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 5. С. 45–49.
4. **Phan-Thien N.** The inclusion problem for a rigid slender body in an infinite elastic medium // Fibre Sci. Technol. 1979. V. 12, N 3. P. 235–239.
5. **Канаун С. К.** Стационарные поля в однородной среде, возмущенные включением в форме криволинейного стержня // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 293–304.
6. **Канаун С. К.** Метод эффективного поля в механике композитных материалов / С. К. Канаун, В. М. Левин. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводск. ун-та, 1993.
7. **Хаит Е. Б.** Распределение нагрузки в волокне в композиционном материале // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 1. С. 153–158.
8. **Галин Л. А.** О гипотезе Циммермана — Винклера для балок // Прикл. математика и механика. 1943. Т. 7, вып. 4. С. 293–300.
9. **Федорюк М. В.** Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 46, № 1. С. 167–186.
10. **Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.** Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 37–39.
11. **Зорин И. С., Назаров С. А.** Асимптотика напряженно-деформированного состояния упругого пространства с жестким тороидальным включением // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 6. С. 1340–1343.
12. **Зорин И. С., Назаров С. А.** О напряженно-деформированном состоянии упругого пространства с тонким тороидальным включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 3. С. 79–86.
13. **Argatov I. I., Nazarov S. A.** Junction problem of shashlik (skewer) type // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1993. V. 316. P. 1329–1334.

14. **Аргатов И. И., Назаров С. А.** О равновесии упругого тела на пронизывающих его горизонтальных тонких упругих стержнях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 236–242.
15. **Аргатов И. И.** Давление узкого прямоугольного штампа на упругое основание // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 2. С. 58–67.
16. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
17. **Ван-Дайк М. Д.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
18. **Ильин А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
19. **Федорюк М. В.** Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1980. Т. 1. С. 113–131.
20. **Полиа Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полиа, Г. Сеге. М.: Физматгиз, 1962.
21. **Kachanov M., Sevostianov I.** On quantitative characterization of microstructures and effective properties // Intern. J. Solids Struct. 2005. V. 42. P. 309–336.
22. **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 15/III 2007 г.