

Таблица 4

$\frac{U}{\text{км/с}}$ γ°	Fe						Cu					
	1,56	1,66	1,77	1,9	2,04	2,21	0,85	0,9	0,96	1,03	1,11	1,2
17	20	22	26	29	34	40	19	21	25	28	32	37
16		24	27	31	36	42		22	25	30	34	39
15			29	33	39	45			27	32	36	42
14				36	41	48				34	38	45
13					44	52					41	49
12						57						53

Величина L зависит от плотности материала, предела текучести, скорости точки контакта, угла соударения. Положим $\beta k = 0,2$ и найдем значения L при различных U и γ для меди ($\sigma_s = 6,5$ кбар (1 кбар = 10^8 Н/м²)) и железа ($\sigma_s = 20$ кбар). Эти значения приведены в табл. 4.

Поступила 19 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Смешанная задача теории упругости с силами трения для полуплоскости. — «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, № 3.
2. Смирнов В. С. Теория обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1973.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
4. Симонов В. А. О течениях, возникающих при падении ударной волны на клиновидную плоскость. — ФГВ, 1971, т. 7, № 2.
5. Ефремов В. В. Исследование косых соударений металлических пластин в упругой постановке. — ПМТФ, 1975, № 1.
6. Эрлих Л. Б., Кособлудский В. А., Вершинин Л. И. Волнообразование на обкатываемых поверхностях. М., «Наука», 1973.
7. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. — «Докл. АН СССР», 1949, т. 65, № 6.
8. Годунов С. К., Дерибас А. А. К вопросу о струеобразовании при соударении металлов. — «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 5.
9. Годунов С. К., Дерибас А. А., Мали В. И. О влиянии вязкости материала на процесс образования струй при соударениях металлических пластин. — ФГВ, 1975, № 1.

УДК 539.374:534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Н. Мамадалиев, В. П. Молев

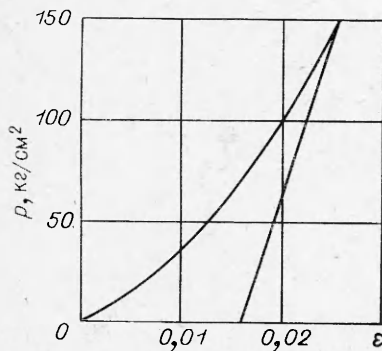
(Москва)

Рассматривается двумерная стационарная задача о распространении ударной волны в неупругой идеальной среде, заполняющей полупространство, при воздействии на его границу подвижной нагрузки. Решени-

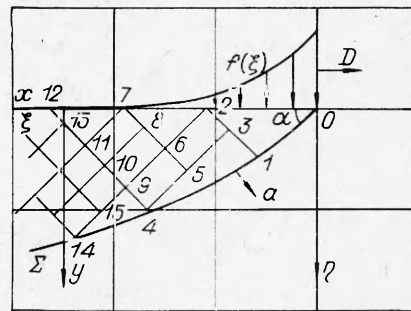
задачи построено методом характеристик для случая, когда скорость движения нагрузки превышает скорость распространения ударной волны в среде, сжимаемость которой является нелинейной и необратимой (фиг. 1), тогда как в работе [1] аналитическим способом исследуется случай линейной зависимости между p и ε . При этом поверхность среды, где приложено давление, считается, как и в [2, 3], малодеформируемой, и поэтому предполагается, что нормальное давление прикладывается на горизонтальную недеформируемую поверхность (фиг. 2).

Предлагаемая схема дает возможность проводить расчет параметров среды, в частности грунта, моделируемого обобщенным пластическим газом [2] или идеальной жидкостью [4], а также при распространении волн в водоемах с экраном [3] и т. д.

Результаты численного расчета представляются в виде кривых изменения давления и скорости среды в области возмущения и вдоль фронта волны.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Пусть по поверхности полупространства движется монотонно убывающее нормальное давление со скоростью D (см. фиг. 2). Тогда в полупространстве будет распространяться ударная волна с криволинейным фронтом Σ и скоростью a , величина которой заранее неизвестна и определяется в процессе решения задачи.

Будем полагать, что среда на фронте Σ мгновенно нагружается, а за фронтом (в возмущенной области) происходит разгрузка, которая принимается линейной. В этом случае на фронте Σ из условия сохранения массы и импульса получим

$$(1) \quad \rho_0 a = \rho^* (a - v_n^*), \quad \rho_0 a v_n^* = p^*, \quad v_t^* = 0,$$

уравнение состояния среды представим в виде полинома

$$(2) \quad p^* = \alpha_1 \varepsilon^* + \alpha_2 \varepsilon^{*2}.$$

В области разгрузки (т. е. внутри угла α) имеем уравнения

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0; \end{cases}$$

$$(4) \quad p = p^* + E_p (\varepsilon - \varepsilon^*).$$

Граничное условие при $y = 0$, $Dt + x \geq 0$ имеет вид

$$(5) \quad p = f(Dt + x),$$

где $f(\xi)$ — известная функция; v_τ^*, v_n^* — касательная и нормальная составляющие массовой скорости V среды к фронту Σ ; u, v — соответственно проекции скорости на оси x и y ; α_1, α_2, E_p — постоянные величины; ϵ, ρ — объемная деформация и плотность среды.

С целью построения решения задачи методом характеристик переходим к подвижной системе координат $\xi = Dt + x$, $\eta = y$ и введем потенциал скорости φ

$$u = \partial\varphi/\partial x, \quad v = \partial\varphi/\partial y.$$

Тогда из (3) имеем уравнения характеристик и характеристические соотношения

$$(6) \quad \eta'_{1,2} \frac{d\eta}{d\xi} = \pm \frac{1}{\sqrt{D^2/c_p^2 - 1}}, \quad d\varphi_\xi + \eta'_{2,1} d\varphi_\eta = 0,$$

а также формулу Бернулли в виде

$$(7) \quad dp = \rho D d\varphi_\xi \left(c_p^2 = \frac{E_p}{\rho} \right),$$

где $D > c_p$.

Принимая во внимание, что уравнение (4) можно использовать для определения объемной деформации ϵ , систему уравнений (6), (7) с учетом (1), (5) и уравнений состояния (2), (4) решаем на ЭВМ для случая, когда заданная нагрузка изменяется вдоль ξ по закону

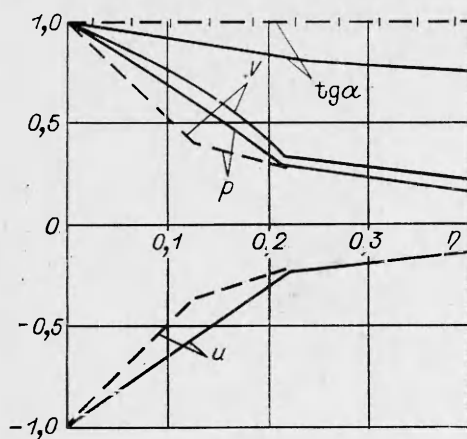
$$(8) \quad f(\xi) = p_0(1 - \xi/n_0);$$

$$(9) \quad f(\xi) = p_0 \exp(-\xi/m_0),$$

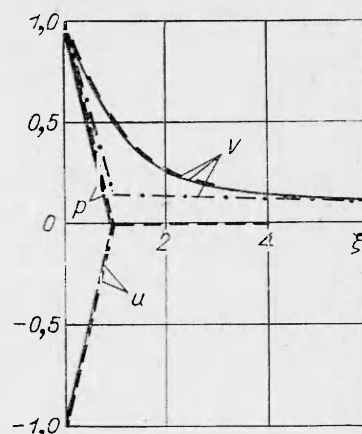
где p_0, n_0, m_0 — постоянные величины, имеющие размерность соответственно силы и длины.

Приведенная на фиг. 2 численная схема расчета состоит в следующем. Сначала по уравнениям (1), (2) с учетом (5) определяются все параметры точки 0, в том числе угол наклона ударной волны α . Затем из точки 0 (см. фиг. 2) откладывается отрезок $0I$ под углом α и в точку 1 переносятся параметры среды в точке 0. Такая аппроксимация тем точнее, чем меньше длина отрезка $0I$. Из точки 1 проводится характеристика второго семейства 1, 3, 2, пересекающая границу полуплоскости в точке 2. По уравнениям (4)–(7), представленным в конечных разностях, определяются параметры точки 2. На середине отрезка 1, 3, 2 выбирается точка 3. Ее параметры находятся как среднеарифметические величины от параметров среды в точках 1 и 2. Затем из точки 3 проводится характеристика первого семейства до пересечения ее с продолжением отрезка $0I$ в точке 4 и т. д.

На основе вышеприведенной схемы задача решается численно с помощью ЭВМ для $m_0 = 0,1, n_0 = 0,15; 1,0$; некоторые результаты расчета в виде графиков p, u, v и $\tan \alpha$ представлены на фиг. 3–6 в безразмерном виде по отношению к их максимальным значениям, а переменные ξ и η отнесены к единице длины. Все кривые, рассчитанные для (8), показаны на фиг. 3–5, где сплошные линии относятся к нелинейной, штриховые — к линейной среде, штрихпунктирные соответствуют случаю, когда $\alpha = 45^\circ$, штриховые с кружочками — лучевому приближению [5], штриховые с черточками представляют акустику. На фиг. 6 сплошные линии



Ф и г. 3

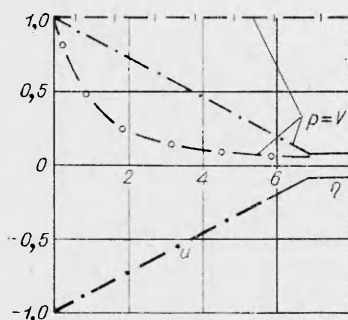


Ф и г. 4

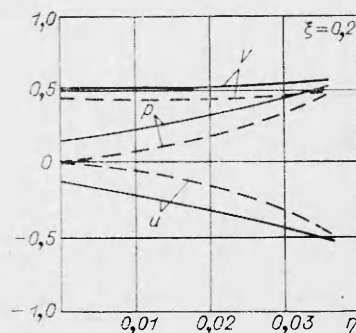
относятся к случаю (8), а штриховые — (9), причем изменение параметров среды вдоль фронта приводится на фиг. 3 и 5, вдоль свободной поверхности — на фиг. 4.

Эти кривые позволяют изучить влияние свойств материала среды и нагрузки на ударно-волновые процессы, кинематические параметры и давление в полупространстве. Установлено, что в отличие от линейно-сжимаемой среды [1] нелинейная сжимаемость материала полупространства приводит к возрастанию величин давления и массовой скорости вдоль фронта (фиг. 3), расширению области возмущения и уменьшению вертикальной составляющей скорости на свободной (граничной) поверхности (фиг. 4). Если ударная волна с осью $O\xi$ составляет угол $\alpha < 45^\circ$, то изменение вертикальной составляющей скорости вдоль $O\xi$ становится плавным и менее пологим, чем при $\alpha = 45^\circ$.

В последнем случае проведенное сравнение результатов численного расчета и аналитического решения [1] показывает, что все параметры среды на фронте волны взаимно совпадают с точностью до 0,1%, в то время как при лучевом приближении [5] их значения несколько занижаются. Далее обнаружено, что характер изменения профиля нагрузки вдоль граничной поверхности существенным образом меняет распределение давления как вглубь, так и вдоль полупространства. На основе анализа результатов расчета отметим, что p , u , v в области последствия подвижной нагрузки $\xi > 1$ в зависимости от глубины изменяются по нелинейному закону (в отличие от области приложения нагрузки $\xi \leq 1$).



Ф и г. 5



Ф и г. 6

Из фиг. 6 видно, что при $\xi = 0,2$ экспоненциальная нагрузка по сравнению с нагрузкой конечной длины приводит к повышению значения p , u , v во всех точках полупространства, что и следовало ожидать, так как величина приложенной на свободную поверхность нагрузки (9) больше, чем (8).

Данная схема позволяет рассчитать параметры нелинейно-сжимаемой полуплоскости и в случае нелинейной разгрузки среды.

Авторы выражают благодарность Х. А. Рахматулину за полезные советы и обсуждения результатов работы.

Поступила 27 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Капустянский С. М. Распространение и отражение двумерных пластических волн. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1973, № 1, с. 60—68.
2. Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. М., изд. Моск. ун-та, 1964.
3. Гриб А. А., Шарый В. А. Распространение ударной волны в водоеме с наклонным дном. — «Вестн. Ленинг. ун-та. Математика, механика, астрономия», 1974, вып. 3, с. 74—81.
4. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. Капустянский С. М., Шхинек К. Н. Распространение двумерных волн в уруго-пластической среде. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1972, № 3, с. 48—55.

УДК 534.12

О ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ УПРУГОГО СЛОЯ

В. А. Сарайкин

(Новосибирск)

При исследовании волновых явлений в упругом слое широкое применение получили приближенные теории, основанные на представлении смещений в виде рядов относительно срединной поверхности [1—3]. Разложение в ряды по полиномам Лежандра является одним из способов такого представления искомого решения теории упругости и обладает преимуществами перед остальными [1]. Удерживая то или иное количество членов, для коэффициентов ряда можно вывести различные варианты уравнений динамики пластин. Наиболее полно исследованы уравнения Бернулли — Эйлера и Тимошенко. Кроме того, для описания процессов, протекающих в слое, в последнее время привлекаются различные варианты уточненных уравнений [2, 4, 5].

Интерес к колебаниям пластин, к выводу более точных уравнений связан отчасти с тем, что переход от уравнений теории упругости к приближенным приводит к погрешностям в описании нестационарных процессов. Так, из-за приближенного учета распределения смещений по толщине слоя не учитываются поверхностные волны Рэлея и фронты многократно отраженных от поверхностей слоя волн, т. е. при выводе уравнений пластин игнорируются высокие частоты. Эти быстро изменяющиеся части решения теории упругости определяются в разложениях смещений слагаемыми, отбрасываемыми при выводе достаточно простых для анализа или расчета на ЭВМ вариантов уравнений динамики пластин. Ясно, что лучшей аппроксимации решения задач теории упругости решениями приближенных уравнений можно достичь, увеличивая число слагаемых ряда