

УДК 532.51

## **Исследование в окрестностях особых резонансных точек бифуркаций пространственных волновых режимов на поверхности пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру\***

**О.Ю. Цвелодуб**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Рассматриваются течения вязкой пленки жидкости по внешней поверхности вертикального цилиндра. В ходе исследования используется модельное нелинейное эволюционное уравнение на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Оно справедливо для описания длинноволновых возмущений в случае малых расходов жидкости и больших радиусов цилиндра. Изучено ветвление от невозмущенного режима течения пространственных волновых режимов. Отдельное внимание уделено особым случаям, когда значения радиусов цилиндров лежат в окрестностях некоторых критических особых точек. Для их исследования из исходного уравнения получена модельная система уравнений. Приведены несколько решений этой системы.

**Ключевые слова:** стекающая пленка, вертикальный цилиндр, модельное уравнение, трехмерные возмущения, семейства решений.

### **Введение**

Начало исследованиям волновых режимов стекающих пленок вязких жидкостей положили пионерские эксперименты П.Л. Капицы [1].

Практическая ценность пленочных течений обусловлена широким использованием стекающих пленок жидкости в технологических процессах химической промышленности, энергетики, металлургии и других областях.

Вследствие неустойчивости течения пленки с плоской свободной границей волновые режимы на ее поверхности возникают уже при достаточно малых числах Рейнольдса. Причем, как показывает большинство экспериментов, зарождающиеся двухмерные волны очень быстро становятся трехмерными и нерегулярными. В результате относительно простое ламинарное течение волновой пленки демонстрирует большое разнообразие как регулярных, так и хаотичных волновых режимов. Поэтому даже при изучении двухмерных волновых режимов полезно проводить исследование их на устойчивость

---

\* Работа выполнена в рамках госзадания ИТ СО РАН (№ 121031100246-5).

к трехмерным возмущениям. Использование при этом различных теоретических подходов позволяет получать интересные упрощенные модели. Среди них можно выделить большой класс, описывающий эволюцию длинноволновых возмущений (см., например, [1–8]). Наиболее канонические модели возникают в случае малых расходов жидкости при рассмотрении слабонелинейных возмущений. В этих случаях задача сводится к нахождению решений одного нелинейного уравнения на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. При этом нередко оказывается, что область их применимости выходит далеко за рамки собственно пленочных течений, в том числе и потому, что такие модели встречаются и в других разделах физики. В качестве примера можно упомянуть широко известное в настоящее время уравнение Курамото–Сивашинского. Впервые оно было получено в работе А.А. Непомнящего [4] для плоских возмущений на свободно стекающей пленке и затем обобщено автором на трехмерный случай [5].

Несмотря на заметное количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию волновых режимов на поверхности жидкости, в настоящее время трехмерные волновые режимы в стекающих пленках изучены далеко не полно.

Для исследования трехмерных волновых режимов, возникающих на поверхности пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру, в работе [2] было получено модельное уравнение, справедливое при описании длинноволновых возмущений в случае малых расходов жидкости. Для него процесс ветвления пространственных стационарно-бегущих семейств решений подробно исследовался в работе [6], позднее с использованием полученных результатов в работе [9] была рассмотрена эволюция трехмерных волновых режимов, возникающих в таких течениях.

Целью настоящей работы является исследование на основе модельного уравнения, приведенного в работе [2], процесса зарождения пространственных периодических решений с волновыми числами, лежащими в окрестностях особых резонансных точек. Для этого получена модельная система уравнений, описывающая периодические решения с волновыми числами, лежащими в окрестностях особых резонансных точек.

## 1. Модельное уравнение

В полной постановке исследование волновых режимов в стекающих пленках жидкости сводится к рассмотрению системы уравнений Навье–Стокса и неразрывности с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями. В случае малых расходов и больших сил поверхностного натяжения эту проблему можно свести к исследованию одного уравнения для толщины пленки. В работе [2] при этих предположениях для цилиндров больших радиусов было получено одно нелинейное уравнение, которое для случая возмущений малой, но конечной амплитуды описывает эволюцию отклонения толщины пленки от невозмущенного уровня. После некоторых преобразований это уравнение принимает вид [3]:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + S^4 \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 H = 0, \quad (1)$$

$$S = L/R = 1/(1 + 0,8\text{Re}/\text{We}\delta_0^2)^{1/2} < 1,$$

здесь  $\text{Re} = V_0 h_0 / \nu \sim 1$  — число Рейнольдса,  $\text{We} = \sigma / \rho g h_0^2 \sim 1/\varepsilon^2$  — число Вебера,  $h_0$  — толщина невозмущенной пленки,  $R$  — радиус цилиндра,  $L$  — характерный масштаб возмущений (его выбор будет пояснен ниже),  $g$  — ускорение свободного падения,

$\nu$  — коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $x$  — аксиальная цилиндрическая координата, ее направление совпадает с направлением вектора силы тяжести,  $\varphi$  — азимутальная цилиндрическая координата,  $\tau$  — безразмерное и преобразованное время, функция  $H$  — трансформированное определенным образом безразмерное отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Использование цилиндров больших радиусов означает, что справедливо неравенство  $\delta_0 = h_0 / R \ll 1$ . Полагается также, что выполнено условие длинноволновости возмущений, т.е. характерная длина возмущений свободной поверхности много больше толщины пленки —  $\varepsilon = h_0 / L \ll 1$ . Характерная скорость  $V_0 = g h_0^2 / (2\nu)$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  равна скорости поверхности пленки при безволновом режиме течения. Схема течения представлена на рис. 1.

Уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью нейтральных азимутально-однородных возмущений, у которых азимутальное волновое число  $n_\varphi = 0$ . После проведенных в работе [3] преобразований оно содержит один варьируемый параметр  $S$ , характеризующий геометрию цилиндра.

В случае азимутально-однородных возмущений уравнение (1) переходит в широко известное уравнение Курамото–Сивашинского. Для пленочных течений оно впервые было получено в работе [4].

Из линейного анализа устойчивости тривиального решения  $H \equiv 0$  уравнения (1) к возмущениям вида

$$H \sim \exp(i\alpha(x - c\tau)) \{ \exp(in_\varphi\varphi) + \exp(-in_\varphi\varphi) \} + \text{К.С.} \quad (2)$$

следует, что оно неустойчиво, если волновые числа  $(\alpha, n_\varphi)$  удовлетворяют условию

$$\alpha^2 + S^4 n_\varphi^2 - (\alpha^2 + S^2 n_\varphi^2)^2 > 0. \quad (3)$$

В выражении (2)  $\alpha$  — компонента волнового числа в направлении оси  $x$ ,  $n_\varphi$  — азимутальная компонента волнового числа, К.С. — комплексно сопряженное выражение. Из физических соображений очевидно, что  $n_\varphi$  принимает только целочисленные значения. Из (2) следует вывод, что в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением только неотрицательных значений  $n_\varphi$ .

Нейтральные волновые числа  $\alpha_{n1,2}$  находятся из выражения

$$\alpha_{n1,2}^2 = \left( 1 - 2S^2 n_\varphi^2 \pm \sqrt{1 - 4S^2 n_\varphi^2 (1 - S^2)} \right) / 2. \quad (4)$$

Из (3), (4) следует, что неустойчивые волновые числа лежат внутри интервалов  $(\alpha_{n1}, \alpha_{n2})$ .

Таким образом, для фиксированного значения  $S$  область неустойчивости представляет собой дискретный набор интер-

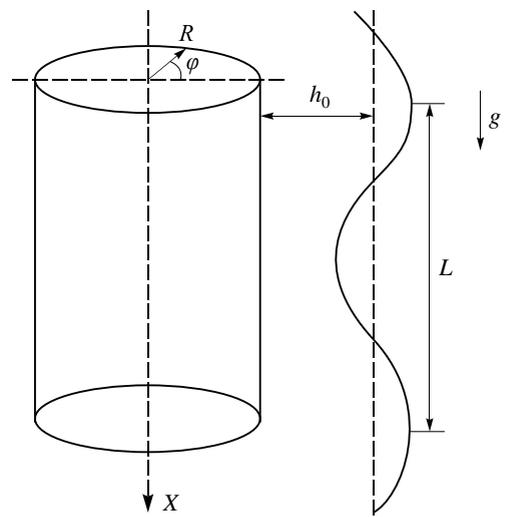


Рис. 1. Схема течения.

валов волновых чисел  $\alpha$  для  $n_\varphi = 0, 1, 2, \dots$ . Число таких интервалов и их размеры зависят от конкретных значений параметра  $S$ . При заданном  $n_\varphi \geq 1$  интервал неустойчивых волновых чисел  $\alpha$  существует, если значения параметра  $S$  удовлетворяют условию

$$S < S_c(n_\varphi) = \sqrt{(n_\varphi - \sqrt{n_\varphi^2 - 1}) / 2n_\varphi}. \quad (5)$$

Из неравенства (5) следует, что при  $S > S_c(1) \approx 0,707$  тривиальное решение  $H \equiv 0$  устойчиво по отношению ко всем пространственным возмущениям вида (2). В этом случае могут нарастать только азимутально-однородные возмущения с  $n_\varphi = 0$  и волновыми числами  $\alpha < 1$ . Эти возмущения неустойчивы при любых значениях параметра  $S$ . Здесь уместно подчеркнуть, что характерный масштаб продольных возмущений  $L$  в уравнении (1) брался таким образом, чтобы нейтральное волновое число азимутально-однородных возмущений  $\alpha_n$  было равно 1.

Пространственные стационарно-бегущие волны с волновыми числами, лежащими в окрестности простых нейтральных волновых чисел  $\alpha_{n1}$ , были аналитически построены в работах [6, 9]. Они ответвляются от тривиального решения  $H \equiv 0$ . Решения, волновые числа которых располагались внутри области неустойчивости достаточно далеко от нейтральных волновых чисел, были численно построены в работе [6]. Среди них были найдены семейства стационарно-бегущих волн, которые аналогично случаю плоской пленки [8, 10] в пределе переходили в солитонные режимы характерной подковообразной формы.

Анализ уравнения (1) показывает, что, так же как и в случае течения пленки по плоской поверхности (см., например, [8, 11]), при некоторых значениях параметра  $S$  пространственные волновые режимы могут ответвляться более сложным образом, чем в окрестности обычных нейтральных волновых чисел. Действительно, специфические бифуркации имеют место в окрестностях точек:

$$(S_*(n_\varphi), \alpha_{n1} = 1/2, n_\varphi). \quad (6)$$

Данные точки требуют особого рассмотрения. Это обусловлено тем, что из-за наличия в уравнении (1) слагаемого с квадратичной нелинейностью, в отличие от общего случая, в приближении второго порядка еще у одной из гармоник волновое число попадает в окрестность другой нейтральной точки —  $(\alpha_n = 1, n_\varphi = 0)$ . Эта точка, очевидно, существует при любых значениях параметра  $S$  (см. (4)). Поэтому данную гармонику нужно включать в рассмотрение уже в приближении первого порядка.

Как легко видеть из (4), в критических точках связь между  $S_*(n_\varphi)$  и  $n_\varphi$  имеет вид

$$S_*(n_\varphi) = \left[ \frac{\sqrt{4n_\varphi^2 - 3} - n_\varphi}{4n_\varphi(n_\varphi^2 - 1)} \right]^{1/2} \quad \text{при } n_\varphi > 1,$$

$$S_*(1) = \sqrt{0,375} \quad \text{при } n_\varphi = 1.$$

На рис. 2 и 3 показаны области линейной неустойчивости для случаев  $S_*(1)$  и  $S_*(2)$  соответственно.

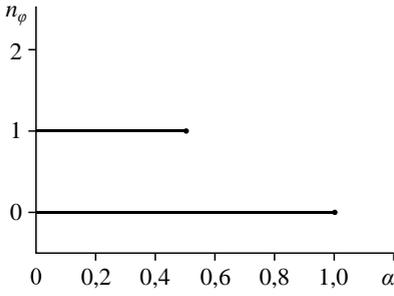


Рис. 2. Области линейной неустойчивости для случая  $S_*(1)$ .

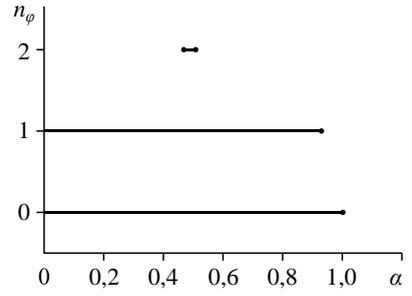


Рис. 3. Области линейной неустойчивости для случая  $S_*(2)$ .

Целью настоящей работы является получение модельной системы уравнений, описывающей эволюцию возмущений с волновыми числами, лежащими в окрестностях особых точек (6). Для этого в указанных окрестностях ищем решения уравнения (1) в виде рядов:

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots, \tag{7}$$

$$S = S_* + \varepsilon S_1 + \dots$$

Действуя аналогично [8, 11], введем набор быстрых и медленных переменных:

$$t_m = \varepsilon^m \tau, \quad x_m = \varepsilon^m x, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{8}$$

здесь  $\varepsilon$  — некоторый малый параметр. Подставляя (7) в уравнение (1), используя (8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , приходим к бесконечной системе линейных уравнений.

Уравнение первого порядка по  $\varepsilon$  имеет вид:

$$\frac{\partial H_1}{\partial t_0} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_0^2} + S^4 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + S_*^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 H_1 = 0. \tag{9}$$

Нужные нам решения уравнения (9) в окрестности точек (6) необходимо искать в виде

$$H_1 = A_1 \exp(ix_0/2) [\exp(in_\varphi \varphi) + \exp(-in_\varphi \varphi)] + A_2 \exp(ix_0) + \text{К.С.} \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получим, что амплитуды гармоник  $A_1, A_2$  не зависят от быстрого времени  $t_0$ , но они могут быть функциями более медленных времен и координат.

Уравнение второго порядка по  $\varepsilon$ , полученное из (1), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H_1}{\partial t_1} + 4H_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_0 \partial x_1} + S^4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi^2} + 4S_1 S_*^3 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2} + \\ & + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + S_*^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 H_2 + \\ & + 4 \left( \frac{\partial^4 H_1}{\partial x_0^3 \partial x_1} + S_1 S_*^3 \frac{\partial^4 H_1}{\partial \varphi^2} + S_1 S_* \frac{\partial^4 H_1}{\partial x_0^2 \partial \varphi^2} + S_*^2 \frac{\partial^4 H_1}{\partial x_0 \partial x_1 \partial \varphi^2} \right) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Требование равенства нулю секулярных членов в (11) приводит к системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t_1} + 2iA_2\bar{A}_1 + i\frac{a}{2}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + bS_1A_1 &= 0, \\ \frac{\partial A_2}{\partial t_1} + 4iA_1^2 - 2i\frac{\partial A_2}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь для  $n_\varphi = 1$  имеем  $a = -0,5$ ,  $b = S_* = \sqrt{0,375}$ , а для  $n_\varphi > 1$  —  $a = 1 - 4S_*^2n_\varphi^2$ ,  $b = S_*n_\varphi^2(4S_*^2(n_\varphi^2 - 1) + 1)$ . В таблице для нескольких значений  $n_\varphi$  приведены значения  $S_c(n_\varphi)$ ,  $S_*$ , соответствующее этому  $S_*$  второе нейтральное волновое число  $\alpha_{n2}$ ,  $a$  и  $b$ .

Так как в настоящей работе рассматриваются только пространственно периодические решения уравнения (1), представим решение системы (12) в виде:

$$A_1 = A_{10}(t_1)\exp(i\delta x_1), \quad A_2 = A_{20}(t_1)\exp(2i\delta x_1). \tag{13}$$

Тогда из (12), (13) для  $A_{10}(t_1)$  и  $A_{20}(t_1)$  имеем систему:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{10}}{dt_1} + 2iA_{20}\bar{A}_{10} + A_{10}(bS_1 - a\delta/2) &= 0, \\ \frac{dA_{20}}{dt_1} + 4iA_{10}^2 + 4A_{20}\delta &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Произведем в (14) замену:

$$A_{10} = \tilde{A}_{10}|S_1|, \quad A_{20} = \tilde{A}_{20}|S_1|, \quad \delta = \tilde{\delta}|S_1|, \quad t_1 = \tilde{t}_1|S_1|. \tag{15}$$

В результате система (14) принимает вид (знак  $\sim$  опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{dA_{10}}{dt_1} + 2iA_{20}\bar{A}_{10} + A_{10}(\text{sign}(S_1)b - a\delta/2) &= 0, \\ \frac{dA_{20}}{dt_1} + 4iA_{10}^2 + 4A_{20}\delta &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Преобразование (15) можно трактовать следующим образом. Все функции, появляющиеся в решении первого порядка  $H_1$ , так же как и поправки к компоненте волнового вектора  $\alpha_{n1}$ , пропорциональны комплексу  $\varepsilon|S_1|$ . Включив  $|S_1|$  в состав малого параметра, построим решение в виде ряда по параметру  $\varepsilon|S_1|$ . В результате вместо соотношений (7), (11), (12) получим их модификации, где  $S_1$  будет заменена на  $\text{sign}(S_1)$ , а вместо системы (14) сразу приходим к системе (16).

**Таблица**  
**Значения параметров  $S_c(n_\varphi)$ ,  $S_*$ ,  $\alpha_{n2}$ ,  $a$  и  $b$  для некоторых значений  $n_\varphi$**

| $n_\varphi$ | $S_c(n_\varphi)$ | $S_*$      | $\alpha_{n2}$ | $a$    | $b$     |
|-------------|------------------|------------|---------------|--------|---------|
| 1           | 0,7071           | 0,61237    | 0             | -0,5   | 0,61237 |
| 2           | 0,2588           | 0,2586     | 0,4635        | -0,07  | 1,8626  |
| 3           | 0,1691           | 0,16908    | 0,4852        | -0,029 | 2,914   |
| 4           | 0,12600043       | 0,12600016 | 0,4919        | -0,016 | 3,936   |

## 2. Стационарные решения

Для стационарных решений системы (16) имеем:

$$a\delta^2 - 2_1\delta\text{sign}(S_1)b - 4|A_{10}|^2 = 0, \quad (17)$$

$$iA_{10}^2 = -A_{20}\delta,$$

$$|A_{10}|^2 = \frac{a\delta^2 - 2\delta\text{sign}(S_1)b}{4}.$$

Из (17) очевидно, что одному значению модуля пространственной гармоники  $A_{10}$  отвечают два различных значения  $\delta$  и  $A_{20}$ :

$$\delta_{1,2} = \frac{\text{sign}(S_1)b \pm \sqrt{b^2 + 4a|A_{10}|^2}}{a}, \quad (18)$$

$$A_{20_{1,2}} = -\frac{i}{\delta_{1,2}}A_{10}^2. \quad (19)$$

Как видно из таблицы, по крайней мере, для  $1 \leq n_\phi \leq 4$  параметр  $a$  является отрицательным. Поэтому для амплитуд  $A_{10}$ , удовлетворяющих неравенству

$$|A_{10}| \leq A_{10}^* = \frac{b}{2\sqrt{-a}}, \quad (20)$$

$\delta_i$  будут вещественны независимо от знака  $\text{sign}(S_1)$ , т.е. стационарные решения системы (16) с параметрами (18)–(20) существуют. Отметим, что за счет подходящего сдвига начала отсчета переменной  $x_1$  амплитуду пространственной гармоники  $A_{10}$  можно сделать вещественной и положительной. Поэтому знак модуля у нее в дальнейшем будем опускать. При такой нормировке амплитуды плоских гармоник  $A_{20_i}$  будут чисто мнимыми (см. (19)).

Из (18), (19) при максимальном значении амплитуды  $A_{10}^*$  (см. (20)) получим:

$$\delta^* = \text{sign}(S_1)\frac{b}{a}, \quad A_{20}^* = -\frac{i}{\delta^*}A_{10}^{*2} = \text{sign}(S_1)\frac{ib}{4}. \quad (21)$$

В случае, когда амплитуда  $A_{10}$  стремится к нулю, величины  $\delta_i$  и  $A_{20_i}$  в пределе принимают значения:

$$\delta_1^n = \text{sign}(S_1)\frac{2b}{a}, \quad A_{20_1} = 0, \quad (22)$$

$$\delta_2^n = 0, \quad A_{20_2} = \text{sign}(S_1)\frac{ib}{2}. \quad (23)$$

Из (22) с учетом (8) и (15) получаем, что решение (10) отвечается от тривиального в точке с продольным волновым числом  $\alpha_{n1} + \varepsilon|S_1|\delta_1^n \equiv 1/2 + \text{sign}(S_1)\frac{2b}{a}\varepsilon|S_1|$ .

Его пространственная гармоника  $A_{10}$  достигает своего максимума  $A_{10}^*$  при  $\delta^*$ . В точке  $\alpha_{n1} + \varepsilon|S_1|\delta_2^n \equiv 1/2$  это решение вырождается в плоское с амплитудой  $A_{20_2}$ .

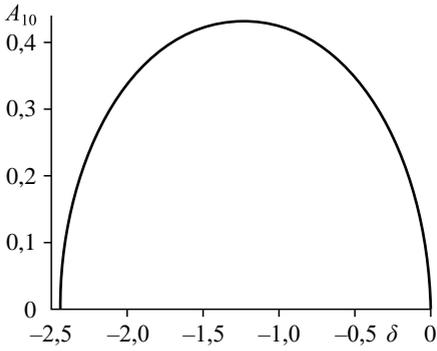


Рис. 4. Зависимость амплитуды пространственной гармоники  $A_{10}$  от  $\delta$  для случая  $S_1 > 0, n_\varphi = 1$ .

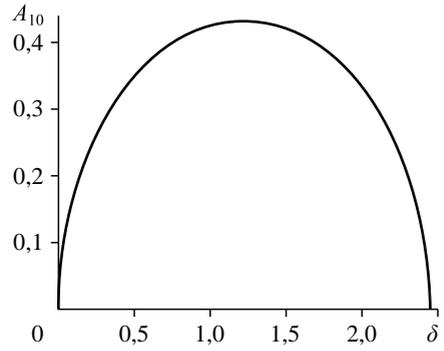


Рис. 5. Зависимость амплитуды пространственной гармоники  $A_{10}$  от  $\delta$  для случая  $S_1 < 0, n_\varphi = 1$ .

Как следует из (17)–(23), для системы (12) решения (13) существуют в интервале  $(\delta_1^n, \delta_2^n) \equiv (\delta_1^n, 0)$ . Взаимозависимости его основных характеристик  $\delta_i, A_{10}, A_{20}$  в окрестности особой точки для  $n_\varphi = 1$  представлены на рис. 4–6. На рис. 4, 5 приведены зависимости амплитуд пространственной гармоники  $A_{10}$  от  $\delta$  для  $S_1 > 0$  и  $S_1 < 0$  соответственно, а на рис. 6 — зависимости модуля амплитуды гармоники  $A_{20}$  от  $A_{10}$ . Отметим, что все указанные зависимости представляют собой параболы. Аналогичная информация для  $n_\varphi = 2$  приведена на рис. 7–9.

Из представленных рисунков следует, что на цилиндрах меньшего радиуса, чем критический ( $S_1 > 0$ ), имеет место жесткий тип ветвления — решения (18)–(20) ответвляются в область линейной устойчивости невозмущенного

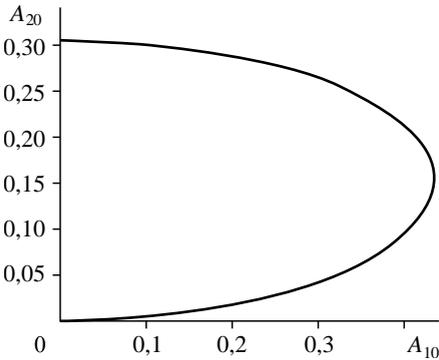


Рис. 6. Зависимость модуля амплитуды плоской гармоники  $A_{20}$  от амплитуды пространственной гармоники  $A_{10}$  для случая  $n_\varphi = 1$ .

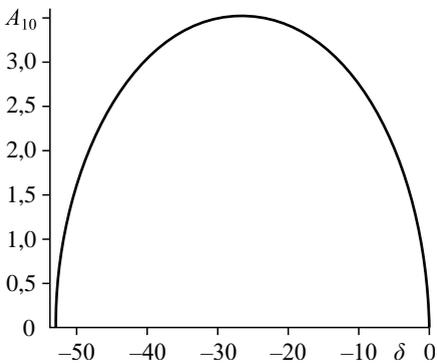


Рис. 7. Зависимость амплитуды пространственной гармоники  $A_{10}$  от  $\delta$  для случая  $S_1 > 0, n_\varphi = 2$ .

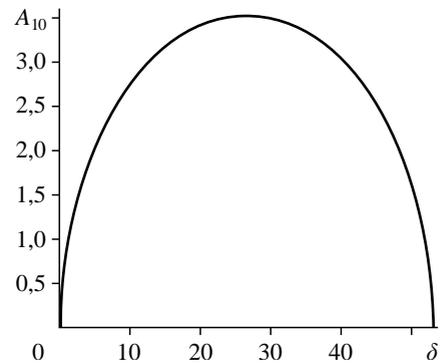
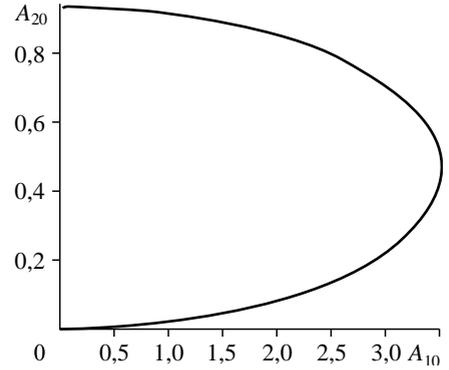


Рис. 8. Зависимость амплитуды пространственной гармоники  $A_{10}$  от  $\delta$  для случая  $S_1 < 0, n_\varphi = 2$ .

Рис. 9. Зависимость модуля амплитуды плоской гармоники  $A_{20}$  от амплитуды пространственной гармоники  $A_{10}$  для случая  $n_\varphi = 2$ .



решения. Для цилиндров больших радиусов ( $S_1 < 0$ ) имеем бифуркацию мягкого типа — решение продлевается в область линейной неустойчивости. И в том и другом случаях пространственные стационарные решения при приближении волновых чисел к  $\alpha_{n1} \equiv 0,5$  вырождаются в плоские (см. рис. 6, 9 и формулы (23)).

Рассмотрим устойчивость стационарных решений (18)–(20) системы (16) относительно линейных возмущений того же периода. Представляя возмущенное решение в виде

$$\tilde{A}_1 = (A_{10} + a_1(t_1)) \exp(i\delta x_1), \quad \tilde{A}_2 = (A_{20} + a_2(t_1)) \exp(2i\delta x_1)$$

и линеаризуя систему (16) относительно амплитуд возмущений  $a_1(t_1)$  и  $a_2(t_1)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt_1} + 2i(A_{20}\bar{a}_1 + a_2A_{10}) + (\text{sign}(S_1)b - a\delta/2)a_1 &= 0, \\ \frac{da_2}{dt_1} + 8iA_{10}a_1 + 4\delta a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь черта над символом  $a_1$  означает комплексно сопряженное выражение.

Будем искать решение системы (24) в виде:

$$a_1(t_1) = a_{10} \exp(\lambda t_1), \quad a_2(t_1) = a_{20} \exp(\lambda t_1). \quad (25)$$

С помощью подходящего сдвига начала отсчета переменной  $t_1$  сделаем амплитуду возмущения пространственной гармоники  $a_{10}$  вещественной. Тогда, подставляя (25) в (24), приходим к системе:

$$\begin{aligned} [\lambda + 2iA_{20} + \text{sign}(S_1)b - a\delta/2]a_{10} + 2iA_{10}a_{20} &= 0, \\ 8iA_{10}a_{10} + (\lambda + 4\delta)a_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Из условия существования нетривиальных решений системы (26), получаем уравнение для  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + B\lambda + D = 0, \quad (27)$$

здесь  $B = 4\delta$ ,  $D = 4a\delta^2 - 8\text{sign}(S_1)b\delta$ .

Из (27) очевидно, что каждому значению  $\delta$  отвечают два значения  $\lambda$ :  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Как показали расчеты, по крайней мере, для первых трех значений азимутального числа  $n_\varphi$  ( $1 \leq n_\varphi \leq 3$ ) на интервале  $(\delta_1^n, \delta_{\text{cr}})$  эти  $\lambda_{1,2}$  вещественны, а на интервале  $(\delta_{\text{cr}}, \delta_2^n) \equiv (\delta_{\text{cr}}, 0)$  они становятся комплексными. Переход происходит в точках  $\delta_{\text{cr}} = \text{sign}(S_1)2b/(a-1)$ . В них амплитуды имеют значения:  $A_{10}^{\text{cr}} = |\delta_{\text{cr}}|/2$ ,  $A_{20,1,2} = -\frac{i}{4}\delta_{\text{cr}}^2$ .

На знаки всех корней уравнения (27) радикально влияет знак  $\text{sign}(S_1)$ . В случае, когда он положителен (это означает, что радиус соответствующих цилиндров немного

меньше критического радиуса), для всех значений  $A_{10}$  и рассмотренных  $n_\varphi$  как вещественные  $\lambda_{1,2}$ , так и вещественные части комплексных  $\lambda_{1,2}$  положительны. Соответственно, возмущения (25) экспоненциально монотонно нарастают или растут, осциллируя. Т.е. в этом случае решения (18)–(20) неустойчивы.

Для цилиндров больших радиусов, чем критический ( $\text{sign}(S_1) = -1$ ), ситуация переворачивается — и вещественные  $\lambda_{1,2}$  и вещественные части комплексных  $\lambda_{1,2}$  отрицательны, соответственно, монотонная и осцилляторная моды в (25) становятся затухающими.

Вышесказанное иллюстрируют рис. 10, 11. Здесь при  $n_\varphi = 1$  приведены зависимости  $\lambda_{1,2}$  от  $\delta$  для  $S_1 > 0$  и  $S_1 < 0$  соответственно.

### 3. Стационарно-бегущие решения

Для стационарно-бегущих со скоростью  $c$  решений

$$A_{10} = A_{10}^c \exp(-ict_1 / 2), \quad A_{20} = A_{20}^c \exp(-ict_1) \quad (28)$$

система (16) принимает вид:

$$\begin{aligned} [\text{sign}(S_1)b - (ic + a\delta) / 2] A_{10}^c + 2iA_{20}^c \bar{A}_{10}^c &= 0, \\ 4i(A_{10}^c)^2 + [4\delta - ic] A_{20}^c &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Исключив из (29)  $A_{20}^c$ , получим:

$$\left[ c^2 + ic(2\text{sign}(S_1)b + \delta(4 - a)) - \delta(8\text{sign}(S_1)b - 4a\delta) \right] - 16 \left| (A_{10}^c)^2 \right| = 0. \quad (30)$$

Выражение в квадратных скобках в (30) должно быть вещественным. При  $c = 0$  из (30) получаем первое уравнение системы (17). Для  $c \neq 0$  выражение в скобках при множителе  $ic$  равно нулю:

$$2\text{sign}(S_1)b + \delta(4 - a) = 0. \quad (31)$$

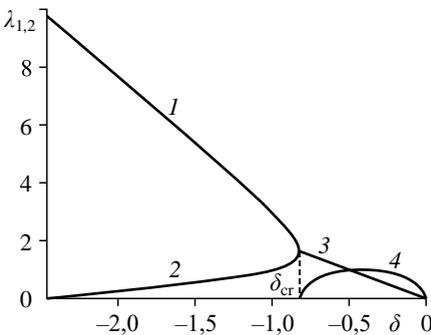


Рис. 10. Зависимость значений  $\lambda_{1,2}$  от  $\delta$  для случая  $S_1 > 0$ ,  $n_\varphi = 1$  при  $\delta_{cr} = -0,816$ .

Случаи, когда значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественные (1, 2), а также когда комплексные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют вещественную часть (3), и когда  $\lambda_1$  имеет мнимую часть ( $\lambda_{2i} = -\lambda_{1i}$ ) (4).

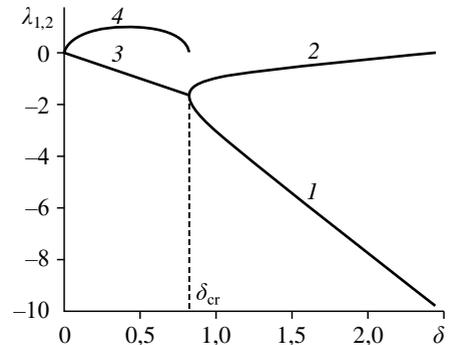


Рис. 11. Зависимость значений  $\lambda_{1,2}$  от  $\delta$  для случая  $S_1 < 0$ ,  $n_\varphi = 1$  при  $\delta_{cr} = -0,816$ .

Обозначения см. на рис. 10.

В этом случае, с учетом (31), уравнение (30) принимает вид:

$$c^2 = 16((A_{10}^c)^2 - \delta_{c^*}^2), \quad (32)$$

где

$$\delta_{c^*} = \text{sign}(S_1) \frac{2b}{a-4}. \quad (33)$$

Для  $\delta_{c^*}$  в (33) в случае  $c = 0$  амплитуда пространственной гармоники стационарного решения (17)–(20) записывается как

$$(A_{10}^c)^2 = \frac{a\delta_{c^*}^2 - 2\delta_{c^*} \text{sign}(S_1)b}{4} = \delta_{c^*}^2, \quad (34)$$

то есть  $A_{10} \equiv A_{10}^c|_{c=0}$ .

Таким образом, из (32)–(34) следует, что семейства стационарно-бегущих решений, у которых  $c \neq 0$ , ответвляются от семейства с  $c = 0$  именно в точках, где  $\delta = \delta_{c^*}$ . В этих точках у семейств стационарно-бегущих решений для амплитуд плоской гармоники имеем:

$$A_{20}^c = -\frac{4i}{4\delta_{c^*} - ic} A_{10}^{c^2}. \quad (35)$$

Умножая (35) на его комплексно сопряженное выражение, приходим к соотношению:

$$|A_{20}^c| = A_{10}^c.$$

То есть в точках бифуркации решений с  $c \neq 0$  модули пространственной и плоской гармоник стационарных решений (17)–(20) одинаковы.

Зависимость  $\pm c$  от  $A_{10}^c$  для случая  $n_\varphi = 1$  представлена на рис. 12. Как видно из (32), эта зависимость для  $\pm \delta_{c^*}$  имеет один и тот же вид. Здесь  $|\delta_{c^*}| = 0,2722$ .

Подставив (33) в (27), получим, что в точках  $\delta_{c^*}$  собственные значения  $\lambda_{1,2}$  для стационарных решений (17)–(20) равны:

$$\lambda_{1,2} = 2\delta_{c^*}(-1 \pm i\sqrt{3}).$$

Для исследования устойчивости решений (32)–(35) относительно линейных возмущений того же периода проделаем ту же процедуру, что и для стационарных решений (17)–(20), тогда для определения показателей экспонент  $\lambda_{1,2}$  приходим к уравнению, аналогичному уравнению (27):

$$\lambda^2 + B\lambda + D = 0, \quad B = 4\delta_{c^*} - ic, \quad D = 16A_{10}^{c^2}. \quad (36)$$

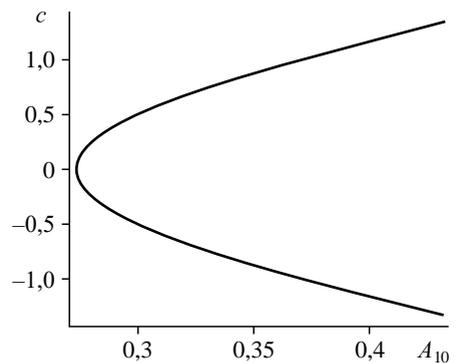


Рис. 12. Зависимость  $\pm c$  от  $A_{10}^c$  для случая  $n_\varphi = 1$  и  $|\delta_{c^*}| = 0,2722$ .

В отличие от уравнения (27), уравнение (36) является комплексным. Его решения  $\lambda_{1,2} \equiv \lambda_{1,2r} + i\lambda_{1,2i}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\lambda_{1r} &= -2\delta_c^* + 0,5\sqrt{X}, & \lambda_{1i} &= c(0,5 - 2\delta_c^* / \sqrt{X}), \\ \lambda_{2r} &= -2(\delta_c^* + 0,5\sqrt{X}), & \lambda_{2i} &= c(0,5 + 2\delta_c^* / \sqrt{X}),\end{aligned}\quad (37)$$

где  $X = 16\delta_{c^*}^2 - 40A_{10}^2 + \sqrt{(16\delta_{c^*}^2 - 40A_{10}^2)^2 + 16c^2\delta_{c^*}^2}$ .

Так как вопрос об устойчивости или неустойчивости соответствующих решений определяется знаками вещественных частей  $\lambda_{1,2}$ , отметим их взаимосвязь для случаев  $\pm |\delta_{c^*}|$ .

Она хорошо видна из (37):

$$\lambda_{1r}(-|\delta_{c^*}|) = -\lambda_{2r}(|\delta_{c^*}|), \quad \lambda_{2r}(-|\delta_{c^*}|) = -\lambda_{1r}(|\delta_{c^*}|).$$

Как показали расчеты, для стационарно-бегущих решений (32)–(35) результаты по их устойчивости вполне коррелируют с результатами для стационарных решений (17)–(20). При положительном знаке  $\text{sign}(S_1)$  для всех значений  $A_{10}^c$  и рассмотренных  $n_\varphi$  вещественные части показателей экспонент  $\lambda_{1,2}$  положительны. Возмущения (25) осциллируют, экспоненциально нарастая.

Для отрицательных значений  $\text{sign}(S_1)$  ситуация обратная — вещественные части  $\lambda_{1,2}$  теперь отрицательны, при этом возмущения, осциллируя, затухают. То есть в этом случае решения (32)–(35) к таким возмущениям устойчивы.

### Заключение

Для моделирования волновых режимов течения пленки вязкой жидкости по внешней поверхности вертикального цилиндра использовано нелинейное эволюционное уравнение. Оно справедливо для описания длинноволновых слабонелинейных возмущений в случае малых расходов жидкости (число Рейнольдса  $\text{Re} \sim 1$ ) и больших радиусов цилиндров.

В работе исследовано ветвление от невозмущенного режима течения с постоянной толщиной пленки пространственных волновых режимов. При этом внимание уделено особым случаям, когда значения радиусов цилиндров лежат в окрестностях некоторых критических особых точек. Их особенность состоит в том, что в отличие от обычных ситуаций в указанных случаях при построении решений уже в первом приближении необходимо учитывать сразу две гармоники. Это связано с тем, что из-за квадратичной нелинейности в используемом уравнении (при обычной процедуре построения слабонелинейных решений) в особых случаях в приближении второго порядка еще у одной из гармоник волновое число попадает в окрестность другой нейтральной точки. Поэтому эту гармонику нужно включать в рассмотрение уже в приближении первого порядка.

Для анализа рассматриваемых режимов из исходного уравнения получена модельная система уравнений, описывающая эволюцию амплитуд пространственной и плоской гармоник, волновые числа которых лежат в окрестностях особых резонансных точек. Получены ее стационарные и стационарно-бегущие решения.

Выявлено, что для цилиндров меньшего радиуса, чем критический ( $S_1 > 0$ ), имеет место жесткий тип ветвления — стационарные решения ответвляются в область линейной устойчивости невозмущенного решения. Для цилиндров больших радиусов ( $S_1 < 0$ )

имеем бифуркацию мягкого типа — решение продлевается в область линейной неустойчивости. И те и другие решения вырождаются в плоское при приближении волновых чисел к  $\alpha_{n1} = 0,5$ .

Найдены два семейства стационарно-бегущих решений, у которых  $c \neq 0$ . Они отходят от семейства стационарных решений в определенных точках, где  $\delta = \delta_{c*}$ . В этих точках модули амплитуд равны друг другу, а зависимость амплитуды  $A_{10}^c$  от скорости  $c$  является квадратичной.

Исследование устойчивости стационарных и стационарно-бегущих решений относительно линейных возмущений того же периода показало, что все решения для цилиндров, радиус которых меньше критического радиуса, в рассматриваемом приближении неустойчивы — среди возмущений есть и монотонная и осцилляторная моды, но все они со временем экспоненциально нарастают. Для цилиндров больших радиусов, чем критический, ситуация обратная — и монотонная, и осцилляторная моды становятся затухающими, т. е. в этом случае все решения к этим возмущениям устойчивы.

Используемые в настоящей статье подходы могут оказаться полезными для изучения широкого класса нелинейных активно-диссипативных эволюционных уравнений в частных производных.

### Список литературы

1. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18, вып. 1. С. 3–28.
2. Shlang T., Sivashinsky G.J. Irregular flow of a liquid film down a vertical column // J. Phys. 1982. Vol. 43, No. 3. P. 459–466.
3. Цвелодуб О.Ю. Спиральные волны на поверхности пленки, стекающей по поверхности цилиндра // Прикл. механика и технич. физика. 1994. Т. 35, № 6. С. 56–63.
4. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 28–34.
5. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений // Гидродинамика: Сб. науч. тр. Пермь, 1974. Вып. 5. С. 91–104.
6. Бочаров А.А., Цвелодуб О.Ю. Волновые режимы течения вязкой пленки, стекающей по вертикальному цилиндру // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 2. С. 176–183.
7. Tsvlodub O.Yu., Trifonov Yu.Ya. On steady-state traveling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. Vol. 39. P. 336–351.
8. Tsvlodub O.Yu., Kotychenko L.N. Spatial wave regimes on a surface of thin viscous liquid film // Physica D. 1993. Vol. 63. P. 361–377.
9. Цвелодуб О.Ю., Бочаров А.А. Нестационарные периодические пространственные волны на поверхности пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 3. С. 331–345.
10. Петвиашвили В.И., Цвелодуб О.Ю. Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости // ДАН СССР. 1978. Т. 238, № 6. С. 1261–1263.
11. Tsvlodub O.Yu. A small-mode model for spatial regimes on a freely falling liquid film // IOP Conf. Series: J. Physics. 2019. Vol. 1382. P. 012103-1–012103-7.

*Статья поступила в редакцию 24 ноября 2023 г.,  
после доработки — 17 января 2024 г.,  
принята к публикации 13 июня 2024 г.*