О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА С ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. И. Яковлев

(Новосибирск)

В работе [1] рассматривалось взаимодействие расширяющегося плазменного шнура с магнитным полем заданного электрического контура для изучения соотношений между энергетическими величинами. Естественно, в число определяющих безразмерных параметров, кроме магнитного числа Рейнольдса R_m, в этом случае входили и параметры внешнего контура.

Ниже рассматривается взаимодействие расширяющегося шнура с постоянным магнитным полем и изучается зависимость внутреннего к. п. д. $\eta_i = (A - Q)/A$ только от R_m для двух частных случаев заданной гидродинамики расширения плазменного шнура. Здесь A — работа плазмы против э. о. с. за единицу времени, Q— интенсивность джоулевых потерь в плазме. Величины A и Q отнесены к единице длины шнура.

Решим следующую задачу. В однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$ имеется расширяющийся плазменный шнур с постоянной проводимостью σ, расположенный параллельно вектору $\mathbf{H}_0$. В начальный момент времени радиус шнура равнялся нулю. Скорость шнура $\mathbf{V} = [V(r, t), 0, 0]$ считается заданной (используется цилиндрическая система координат, связанная с осью расширяющегося шнура).

Необходимо определить распределение напряженности магнитного поля $H(r, t)$ внутри шнура $0 \leqslant r \leqslant a(t)$ (через $a(t)$ обозначается радиус шнура) при $t > 0$ и, исходя из этого, построить зависимость величины внутреннего к. п. д. η_i от числа R_m (при тех допущениях, которые сделаны ниже относительно поля скоростей $V(r, t)$, величина η_i не зависит от времени).

Величины A и Q, отнесенные к объему шнура единицы длины, полностью определяются полями $H(r, t)$, $V(r, t)$ и вычисляются по формулам

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{a(t)} V(r, t)\frac{\partial H(r, t)}{\partial r} H(r, t)\, r dr, \qquad Q = \frac{1}{2}\frac{c^2}{4\pi\sigma}\int_0^{a(t)}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 r dr \tag{1}$$

Магнитное поле $H(r, t)$ $(0 \leqslant r \leqslant a(t))$ определяется уравнением и условием

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rVH), \quad H[a(t), t] = H_0 \tag{2}$$

Определяющими параметрами будут H_0, r, t, $c^2/4\pi\sigma$, из которых можно составить единственную безразмерную переменную

$$x = \frac{4\pi\sigma r^2}{c^2 t} \tag{3}$$

Ищем автомодельное решение поставленной задачи. Пусть

$$H = H_0 h(x) \tag{4}$$

Зададимся полем скоростей в виде

$$V(r, t) = f(x)\, r / t \tag{5}$$

и перейдем от уравнения (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению для $h(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dh}{dx}\right) + \frac{1}{4}x\frac{dh}{dx} - \frac{1}{2}\left[f(x)\, x\frac{dh}{dx} + h(x)\left(f(x) + x\frac{df}{dx}\right)\right] = 0 \tag{6}$$

Рассмотрим два частных случая.

1 *случай*. Пусть $f(x) = \alpha / x$, где α — произвольная постоянная. Этому случаю соответствует поле скоростей

$$V(r, t) = \frac{\alpha}{x}\frac{r}{t} = \frac{\alpha c^2}{4\pi\sigma}\frac{1}{r} \tag{7}$$

отвечающее цилиндрическому источнику несжимаемой жидкости. Для определения закона расширения шнура $a(t)$ согласно (7) имеем уравнение и условие

$$\frac{da}{dt} = \frac{\alpha c^2}{4\pi\sigma}\frac{1}{a(t)}, \qquad a(0) = 0 \tag{8}$$

Отсюда

$$[a(t)]^2 = 2\alpha\frac{c^2 t}{4\pi\sigma} \tag{9}$$

Обозначим через x_0 граничное значение автомодельной переменной x, т. е. то значение x, которое получается при замене r в выражении (3) на $a\ (t)$. Тогда согласно (9)

$$x_0 = \frac{4\pi\sigma a^2}{c^2 t} = 2\alpha \tag{10}$$

Из этого выражения видно, что безразмерную постоянную $x_0 = 2\alpha$ можно рассматривать как магнитное число Рейнольдса

$$R_m = \frac{4\pi\sigma a\ (a\ /\ t)}{c^2} = 2\alpha \tag{11}$$

Уравнение (6) в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dh}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{x}\right)x\frac{dh}{dx} = 0 \tag{12}$$

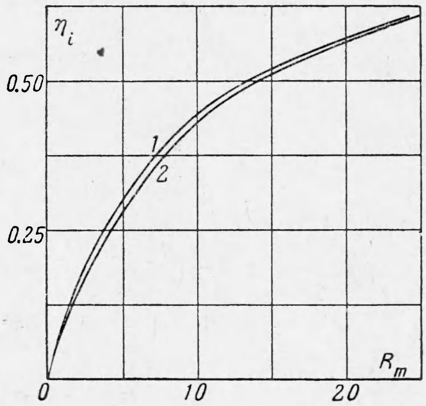
общее решение которого есть

$$h\ (x) = C_1 \int_0^x \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{\tau}{4}} d\tau + C_2 \tag{13}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из следующих условий:

$$\text{(а)}\ h\ (2\alpha) = 1, \qquad \text{(б)}\ h\ (0) = 0 \tag{14}$$

Первое из этих условий будет безразмерной формой записи условия (2), вывод второго условия дан в приложении. Окончательно имеем



$$h\ (x) = \left(\int_0^x \tau^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\tau}{4}} d\tau\right)\left(\int_0^{2\alpha} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{\tau}{4}} d\tau\right)^{-1} \tag{15}$$

Из выражений (1)с использованием (3), (4) и (15) получаем

$$\frac{Q}{A} = \frac{4}{\alpha}\left(\int_0^{2\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{2}} dx\right)\left(\int_0^{2\alpha} x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{x}{4}} dx\right)^{-2} \tag{16}$$

На фиг. 1 представлена кривая зависимости внутреннего к. п. д. η_i от $R_m = 2\alpha$.

2 *случай*. Пусть $f\ (x) = \text{const} = {}^1/_2$. Тогда

$$V\ (r,\ t) = \frac{1}{2}\frac{r}{t} \tag{17}$$

Для этого поля скоростей закон расширения шнура и граничное значение автомодельной переменной будут

$$a\ (t) = \beta\sqrt{t}, \qquad x_0 = \frac{4\pi\sigma a^2}{c^2 t} = \frac{4\pi\sigma\beta^2}{c^2} = R_m \tag{18}$$

где β — произвольная постоянная, имеющая размерность $LT^{-1/2}$.

В рассматриваемом случае безразмерный параметр x_0 играет роль магнитного числа Рейнольдса.

Уравнение (6) сводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dh}{dx}\right) - \frac{1}{4}h\ (x) = 0. \tag{19}$$

ограниченное решение которого на интервале $0 \leqslant x \leqslant x_0$ при выполнении условия $h\ (x_0) = 1$ выражается через модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка [2]

$$h\ (x) = I_0\ (\sqrt{x})\ /\ I_0\ (\sqrt{x_0}) \tag{20}$$

Проделав все необходимые вычисления, находим выражение для отношения

$$\frac{Q}{A} = 2\left[1 + \frac{I_0\ (\sqrt{R_m})}{I_1\ (\sqrt{R_m})}\left(\frac{2}{\sqrt{R_m}} - \frac{I_0\ (\sqrt{R_m})}{I_1\ (\sqrt{R_m})}\right)\right] \tag{21}$$

Зависимость $\eta_i = \eta_i(R_m)$ для этого случая также представлена на фиг. 1.

Из сравнения этих двух кривых, относящихся к случаям с весьма резко отличающейся внутренней гидродинамикой расширения шнура, замечаем, что значения внутреннего к. п. д. при одном и том же значении R_m мало отличаются одно от другого.

Приложение. Используя первое из условий (14), выражение (13) для $h(x)$ можно переписать в виде

$$h(x) = 1 + C_1 \int\limits_{2\alpha}^{x} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{\tau}{4}} d\tau \tag{22}$$

Для определения C_1 используем дополнительное условие, получающееся из рассмотрения магнитного потока через шнур. В момент времени t магнитный поток через шнур

$$\Phi(t) = 2\pi \int\limits_{0}^{a(t)} rH(r, t)\, dr$$

Переходя от переменной интегрирования r к переменной x согласно (3) и (4), получаем

$$\Phi(t) = H_0 \frac{c^2 t}{4\pi\sigma} \int\limits_{0}^{2\alpha} h(x)\, dx \tag{23}$$

С другой стороны, этот магнитный поток создавался за счет проникновения через наружную поверхность шнура, причем в начальный момент магнитный поток через шнур равнялся нулю. Следовательно,

$$\Phi(t) = \int\limits_{0}^{t} \frac{d\Phi}{dt} dt \qquad \left(\frac{d\Phi}{dt} = \frac{c^2}{2\sigma} \frac{\partial H}{\partial r}\bigg|_{r=a(t)} a(t)\right) \tag{24}$$

Выражение полной производной магнитного потока через шнур [1], переходя переменной x, представим в виде

$$\frac{d\Phi}{dt} = H_0 \frac{c^2}{\sigma} 2\alpha \frac{dh(2\alpha)}{dx} \qquad \text{или} \qquad \Phi(t) = H_0 \frac{c^2 t}{\sigma} 2\alpha \frac{dh(2\alpha)}{dx} \tag{25}$$

Из сравнения (23) и (25) находим условие для определения C

$$\frac{1}{4} \int\limits_{0}^{2\alpha} h(x)\, dx = 2\alpha \frac{dh(2\alpha)}{dx} \tag{26}$$

Подставляя в это условие выражение (22) для $h(x)$, получаем следующее выражение для искомой постоянной

$$C_1 = \frac{\alpha}{2} \left\{ (2\alpha)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{4} \int\limits_{0}^{2\alpha} \left[\int\limits_{x}^{2\alpha} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{\tau}{4}} d\tau \right] dx \right\}^{-1}$$

которое после преобразований можно записать в окончательном виде

$$C_1 = \left(\int\limits_{0}^{2\alpha} x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{x}{4}} dx \right)^{-1} \tag{27}$$

Из (24) легко теперь заметить, что $h(0) = 0$.

Автор искренне признателен Л. А. Заклязьминскому за внимание к работе.

Поступила 4 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев В. И. Индукционное взаимодействие расширяющегося плазменного шнура с внешним электрическим контуром. ПМТФ, 1963, № 2.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.