УДК 574.376

А. Л. Гайков, Ю. И. Мещеряков

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЕ С ДИСЛОКАЦИОННОЙ КИНЕТИКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Характер распространения упругопластических волн в твердом теле, инициируемых ударным нагружением, зависит от типа материала, т. е. его реологических, релаксационных, диссипативных и дисперсионных свойств, которые могут нелинейно зависеть от величины приложенного ударного напряжения. В одном из первых аналитических исследований процессов установления волн [1] в условиях одномерной деформации применено сравнительно простое определяющее уравнение вязкоупругого тела с квадратичной нелинейностью. В [1] представлен интересный, но физически пока не ясный результат, соответственно которому время выхода волны на стационарный режим распространения примерно в 5 раз больше длительности стационарного фронта волны. Этот результат, однако, не согласуется с экспериментальными данными, полученными для упруговязкопластичных материалов. В этой связи весьма необходимо проведение аналогичного анализа при сохранении одномерности задачи на более сложном виде определяющего уравнения и сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными. Одно из таких реалистических определяющих уравнений, широко обсуждаемых в литературе,— уравнение Соколовского — Мальверна и его дислокационный вариант [2, 3].

В настоящей работе проводится аналитическое исследование процесса распространения нестационарной упругопластической волны в материале с дислокационной кинетикой пластического деформирования. Ставилась задача вывести аналитическое соотношение для так называемого числа Блэнда [1] — отношение времени выхода волны на стационарный участок распространения к длительности ее стационарного фронта. Знание этой характеристики позволяет оценить времена установления волн в различных материалах без проведения сложных и дорогостоящих экспериментов.

1. Постановка задачи. Решается система уравнений сплошной среды, замкнутая уравнением в дислокационной форме:

(1.1а) $$\rho\partial^2 u_i/\partial t^2 + \sigma_{ij,j} = 0;$$

(1.1б) $$\partial\varepsilon_{ij}/\partial t + \partial^2 u_i/\partial t\,\partial x_j = 0;$$

(1.1в) $$\sigma_{ij} = F[\varepsilon_{ij},\ \dot{\varepsilon}_{ij},\ \ldots].$$

Для одноосного нагружения с помощью перехода к сдвиговой деформации γ (см. [2]) перепишем систему (1.1а)—(1.1в) в одномерном виде. Определяющее уравнение в дислокационной форме есть в [2]. В итоге

(1.2а) $$\rho u_{tt} + \sigma_x = 0;$$

(1.2б) $$\varepsilon_t + u_{tx} = 0;$$

(1.2в) $$\sigma_t - \rho c^2\varepsilon_t = -\frac{8}{3}\mu\frac{b^2N_0}{B}\left(1 + \frac{\alpha}{N_0}\gamma\right)(\tau - \tau_i),$$

где ρ — плотность материала; u — смещение частиц среды; σ — нормальное напряжение; ε — полная (упругая плюс пластическая) деформация в направлении распространения волны; c — продольная скорость звука; b — значение вектора Бюргерса; N_0 — начальная плотность дислокаций; τ — максимальное разрешающее напряжение; τ_i — обратное напряжение [2]; α — коэффициент размножения дислокаций. Индексы t и x означают дифференцирование по времени и координате, значок через запятую у тензора — по соответствующей координате.

При одноосной деформации изотропных материалов τ и γ могут выражаться через нормальные компоненты полной деформации и напряжения:

(1.3) $$\tau = (3/4)[\sigma - (\lambda + 2\mu/3)\varepsilon];$$

(1.4) $$\gamma = (3\mu/8)[\sigma - (\lambda + 2\mu)\varepsilon].$$

Исключив из (1.3) нормальное напряжение, имеем $\tau = \mu(\varepsilon - 2\gamma)$. Тогда определяющее уравнение (1.2в) принимает форму

$$\gamma_t = \gamma_* (1 + M\gamma)(\varepsilon - 2\gamma), \tag{1.5}$$

где $\gamma_* = b^2 N_0 \mu / B$, $M = \alpha / N_0$.
Система уравнений (1.2а), (1.2б), (1.5) приводится к одному нелинейному уравнению для сдвиговой деформации γ:

$$\square_c \left(\frac{\gamma_t}{\gamma_* (1 + M\gamma)} \right) + \frac{2c_\text{г}^2}{c^2} \square_{c_\text{г}} \gamma = 0 \tag{1.6}$$

($\square_a \equiv \partial^2/\partial x^2 - (1/a^2)\partial^2/\partial t^2$ — стандартное обозначение волнового оператора, $c_\text{г}^2 = c^2 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho c^2}\right)$ — гидростатическая скорость). Уравнение (1.6) дополним начальными и граничными условиями. В случае одноосного ступенчатого нагружения для смещения частиц среды запишем их как

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; \tag{1.7а}$$

$$u_t(0, t) = v_0 \theta(t) \tag{1.7б}$$

($\theta(t)$ — функция Хевисайда). Эти условия перепишем в условия на γ, воспользовавшись соотношением Зейтца — Рида (считается, что оно справедливо на границе мишени):

$$\gamma_t^{(0)} = b N_{m0} v_\text{д}^{(0)} \tag{1.8}$$

($\gamma_t^{(0)}$, N_{m0}, $v_\text{д}^{(0)}$ — соответственно сдвиговая деформация, плотность и скорость дислокаций на границе мишени). Скорость дислокаций выражается через напряжение:

$$v_\text{д} = (\tau - \tau_i) b / B, \tag{1.9}$$

максимальное напряжение заменяется на нормальное: $\tau = \sigma g$, где $g = (1-2\nu)/[2(1-\nu)]$, ν — коэффициент Пуассона. При дальнейшем выводе необходимо учесть и соотношение Гюгонио — Рэнкина на границе материала:

$$\sigma = \rho c u_t^{(0)}. \tag{1.10}$$

Используя (1.7а)—(1.10), а также в предположении чисто упругого отклика материала в начальный момент времени, начальные и граничные условия на γ выразим так:

$$\gamma_x(0, t) = -(1/c)\gamma_* \left[\rho c u_t^{(0)}(t) g/\mu - \tau_*\right];$$
$$\gamma_t(0, t) = \gamma_* \left[g \rho c u_t^{(0)}(t)/\mu - \tau_*\right];$$
$$\gamma_t(x, 0) = \gamma_* \left[g \rho c u_t^{(0)}(0)/\mu - \tau_*\right];$$
$$\gamma(x, 0) = 0; \quad \tau_* = \tau_0/\mu.$$

2. Метод решения. Заметим, что при $M \to \infty$ в уравнении (1.6) можно отбросить первый член, в итоге останется обыкновенное волновое уравнение для γ, которое даст в качестве решения простую волну, движущуюся с гидростатической скоростью. Этот результат аналогичен одному из выводов [4].

В уравнении (1.6) для нахождения решения выделяется малый параметр $\varkappa$, для этого оно переписывается в удобной форме

$$\square_{c_\text{г}} \left(\gamma + \beta \frac{\gamma_t}{1/M + \gamma} \right) + \varkappa \frac{\beta}{c^2} \left(\frac{\gamma_t}{1/M + \gamma} \right)_{tt} = 0 \tag{2.1}$$

$$\left(\beta \equiv \frac{c^2}{2 c_\text{г}^2 M \gamma_*}, \quad \varkappa \equiv 1 - c_\text{г}^2/c^2 \right).$$

Так как $c_г \sim c$, $\varkappa$, очевидно, безразмерен, следовательно, в нулевом приближении член, содержащий $\varkappa$, можно отбросить. Уравнение (2.1) в этом случае принимает вид

$$\Box_{c_г} \Xi = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\Xi (x, t) = \gamma (x, t) + \beta \frac{\gamma_t (x, t)}{1/M + \gamma (x, t)}. \tag{2.3}$$

Граничные и начальные условия на γ легко выразить в терминах функции $\Xi(x, t)$:

$$\Xi (0, t) = (A - B)\, t + \beta \frac{A\theta (t) - B}{1/M + (A - B)\, t}; \tag{2.4а}$$

$$\Xi_x (0, t) = - \frac{1}{c} (A\theta (t) - B) + \beta \frac{(A\theta (t) - B)^2}{c\, [1/M + (A - B)\, t]^2} - \beta \frac{A\delta (t)}{1/M + (A - B)\, t}; \tag{2.4б}$$

$$\Xi (x,0) = \beta M (A - B) \theta(-x^2) \tag{2.4в}$$

$$(A = \gamma_* g \rho c v_0/\mu,\ B = \gamma_* \tau_*).$$

Решение задачи (2.2), (2.4а)—(2.4в) ищется в виде

$$\Xi(x, t) = V(x,t) + W(x,t),$$

где при условии $W(x, 0) = \Xi(x, 0)$

$$W(x, t) = \beta M(A - B)\theta(c_г^2 t^2 - x^2).$$

Для функции $V(x, t)$ получается система

$$\Box_{c_г} V = 0, \quad V (x, 0) = 0, \tag{2.5}$$

$$V (0, t) = \Xi (0, t) - \beta M (A - B) \equiv u_0 (t),$$

$$V_x (0, t) = \Xi_x (0, t) \equiv u_1 (t).$$

Решением такой задачи будет

$$V(x, t) = g_x(x, \cdot) * u_0(\cdot) + g(x, \cdot) * u_1(\cdot). \tag{2.6}$$

Свертка в формуле (2.6) производится с функцией Грина:

$$g (x, t) = \frac{c_г}{2} \theta \left(\frac{x^2}{c_г^2} - t^2 \right).$$

Для получения аналитического вида решения задачи (2.5) выбирается область изменения скорости движения пластической волны. Считается, что ее скорость не может быть меньше гидростатической скорости $c_г$ и больше упругой скорости c ($t < x/c_г$). Используя это условие, (2.5) перепишем в виде

$$V (x, t) = \frac{1}{2} \left[u_0 \left(\frac{x}{c_г} + t \right) - u_0 \left(\frac{x}{c_г} - t \right) \right] + \frac{c_г}{2} \int\limits_{x/c_г - t}^{x/c_г + t} u_1 (\tau)\, d\tau.$$

Тогда для функции $\Xi(x, t)$, с учетом конкретного вида граничных и начальных условий, окончательно получаем

$$\Xi (x, t) = \beta M (A - B)\, \theta \left(c_г^2 t^2 - x^2 \right) + (A - B) \left(1 - \frac{c_г}{c} \right) t + \frac{\beta}{2} \left[\frac{A\theta \left(\frac{x}{c_г} + t \right) - B}{1/M + (A - B) \left(\frac{x}{c_г} + t \right)} - \frac{A\theta \left(\frac{x}{c_г} - t \right) - B}{1/M + (A - B) \left(\frac{x}{c_г} - t \right)} \right] + \beta\, (c_г/c)\, t/(\{1/[M (A - B)] + x/c_г\}^2 - t^2).$$

Теперь решим обыкновенное дифференциальное уравнение (2.3), подставив $y(x,\ t) = 1/(1/M + \gamma(x,\ t))$. В результате

$$(2.7)\qquad \gamma(x,t)=\frac{\exp\left[\frac{1}{\beta}\int\limits_{x/c_{\Gamma}}^{t}\left(\Xi(x,\tau)+\frac{1}{M}\right)d\tau\right]}{\eta+\frac{1}{\beta}\int\limits_{x/c_p}^{t}\exp\left[\frac{1}{\beta}\int\limits_{x/c_p}^{\tau}\left(\Xi(x,z)+\frac{1}{M}\right)dz\right]d\tau}-\frac{1}{M}.$$

Постоянная интегрирования η находится из условия равенства нулю сдвиговой деформации в начальный момент времени:

$$\eta=M\exp\left[\frac{1}{\beta}\int\limits_{x/c_p}^{0}\left(\Xi(x,\tau)+\frac{1}{M}\right)d\tau\right]-$$
$$-\frac{1}{\beta}\int\limits_{x/c_p}^{0}\exp\left[\frac{1}{\beta}\int\limits_{x/c_p}^{\tau}\left(\Xi(x,z)+\frac{1}{M}\right)dz\right]d\tau.$$

Проводя интегрирование под знаком экспоненты, для

$$F(x,t)=\frac{1}{\beta}\int\limits_{x/c_{\Gamma}}^{t}\left(\Xi(x,\tau)+\frac{1}{M}\right)d\tau$$

получим

$$(2.8)\qquad F(x,t)=\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{M}\left(t-\frac{x}{c_p}\right)+\frac{A-B}{2}\left(1-\frac{c_{\Gamma}}{c}\right)\left(t^2-x^2/c_p^2\right)\right]+$$
$$+\left(1-\frac{c_{\Gamma}}{c}\right)\ln\left(1-\frac{t^2-x^2/c_p^2}{\left[\frac{1}{M(A-B)}+\frac{x}{c_{\Gamma}}\right]^2-x^2/c_p^2}\right).$$

3. Выход волны на стационарность. При приближении скорости волны к стационарной логарифм в выражении (2.8) можно разложить, учтя малость вычитаемого под знаком логарифма: $F(x,t) = \omega(x,\ t)(t - x/c_p)$, где

$$(3.1)\qquad \omega(x,\ t) = 1/M\beta + a(K - \xi(x))(t + x/c_p).$$

Здесь $a = 1 - c_{\Gamma}/c$; $K = (A - B)/(2\beta)$; $\xi(x)=\left[\left(\frac{1}{M(A-B)}+\frac{x}{c_{\Gamma}}\right)^2-x^2/c_p^2\right]^{-1}$. Далее функция $\omega(x,\ t)$ исследуется на экстремум, при этом выбирается физическая критическая точка, для которой

$$(3.2\text{а})\qquad x_0=\frac{(M(A-B))^{-1}}{c_{\Gamma}\left(1-c_{\Gamma}^2/c_p^2\right)}\left(\sqrt{1+\left(1-c_{\Gamma}^2/c_p^2\right)c_{\Gamma}^2\left(\frac{M^2(A-B)^2}{K}-1\right)}+1\right);$$

$$(3.2\text{б})\qquad t_0=\frac{(M(A-B))^{-1}}{c_{\Gamma}c_p\left(1-c_{\Gamma}^2/c_p^2\right)}\left(\sqrt{1+\left(1-c_{\Gamma}^2/c_p^2\right)c_{\Gamma}^2\left(\frac{M^2(A-B)^2}{K}-1\right)}+1\right).$$

При вычислении учтен вид зависимости обычной волны от координаты и времени.

Характеристическое уравнение квадратичной формы вторых производных для функции $\omega(x,\ t)$ имеет вид

$$\lambda(\lambda + (2a/c_p)\xi_x(x_0)) + a\xi_x(x_0) = 0,\ \xi_x(x_0) < 0,$$

корни его таковы:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{c_p} |\xi_x(x_0)| \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{c_p^2}{a|\xi_x(x_0)|}}\right).$$

Очевидно, что найденная критическая точка — это точка перегиба. С помощью формулы (3.1) нетрудно убедиться, что $\omega(x, t)$ — убывающая функция. В дальнейшем принимается, что участок перегиба, на котором частота меняется не более чем на 10 % в ту или другую сторону, есть участок стационарного распространения волны, тогда t_0 — время выхода волны на стационарность. При $c_p \to c_г$ корень в выражении (3.2б) можно разложить в ряд, в итоге

$$t_0 = \frac{2(c_г/c_p)}{M\gamma_*(g\rho c v_0/\mu - \tau_*)(1 - c_г^2/c_p^2)}.$$

Получен интересный результат, согласно которому время выхода волны на стационарный участок распространения уменьшается с ростом скорости нагружения и плотности нагружаемого материала и увеличивается с приближением скорости распространения пластической волны к гидростатической скорости.

В (2.7) интеграл в знаменателе оценивается как

$$\int_0^t \exp[F(x, \tau)]\, d\tau \approx t \exp[F(x, t)],$$

погрешность приближения можно легко оценить с помощью очевидного неравенства

$$t \exp[F(x, 0)] \leqslant \int_0^t \exp[F(x, \tau)]\, d\tau \leqslant t \exp[F(x, t)].$$

Таким образом, ошибка не превышает $\Delta I = 1 - \exp[F(x,0) - F(x, t)]$, что является тем более малой величиной, чем более верно, что $\exp[F(x, 0) - F(x, t)] \approx 1$.

При вычислении длительности стационарного фронта по аналогии с [1] для числа Блэнда имеем

$$\frac{t_0}{\Delta t} = \frac{4(c_г/c_p)(1 - c_г^2/c_p^2)^{-1}}{M(g\rho c v_0/\mu - \tau_*)\ln 19}. \tag{3.3}$$

В достаточно большом диапазоне скоростей число Блэнда меняется не очень сильно. Данная формула проверялась на экспериментальных профилях [2]. Получено неплохое совпадение с экспериментом. Так, для выстрела 927 в [2] толщина мишени из алюминия 6061-Т6, при которой профиль становится стационарным, равна 6,15 мм. По формуле (3.3) для этого же выстрела при ширине стационарного профиля 60 нс вычисленная толщина мишени 6,13 мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bland D. R.** Structure of the shock wave in a solids // J. Inst. Math. and its Appl.— 1965.— V. 1, N 1.
2. **Jonston S. N., Barker L. M.** Dislocation dynamic and steady plastic wave profiles // J. Appl. Phys.— 1969.— V. 40, N 10.
3. **Taylor J. W.** Dislocation dynamics and dynamic yielding // J. Appl. Phys.— 1965.— V. 36, N 10.
4. **Мещеряков Ю. И.** Динамика дислокаций и одноосная деформация при малых скоростях нагружений // Пробл. прочности.— 1980.— № 2.

г. Ленинград *Поступила 20/VII 1988 г.*