УДК 517.958+532.59

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗМУЩЕНИЯХ СДВИГОВОГО ПОТОКА С НЕМОНОТОННЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

М. М. Стерхова

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача о возмущениях заданного плоского течения идеальной несжимаемой жидкости, соответствующего сдвиговому потоку с горизонтальной свободной границей. В приближении длинных волн возмущенное течение описывается решением задачи Коши для линейной системы интегродифференциальных уравнений, переходящей в случае отсутствия сдвига вектора скорости в известные линеаризованные уравнения теории мелкой воды. Получено явное решение задачи Коши для этой системы уравнений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу со свободной границей:

$$\begin{gathered}
\rho(U_T + UU_X + VU_Y) + p_X = 0 \qquad (0 \leqslant Y \leqslant H(X,T)),\\
U_X + V_Y = 0, \quad p_Y = -\rho g, \quad H_T + \Big(\int\limits_0^H U\,dY\Big)_X = 0, \qquad (1.1)\\
p(X, H(X,T), T) = 0, \quad V(X,0,T) = 0,\\
U(X,Y,0) = U_0(X,Y), \quad H(X,0) = H_0(X).
\end{gathered}$$

Задача (1.1) описывает в приближении теории длинных волн плоскопараллельное завихренное течение слоя однородной весомой жидкости глубины $H = H(X,T)$ над ровным дном $Y = 0$. Здесь U, V — компоненты вектора скорости жидкости; p — давление; ρ — плотность ($\rho = \mathrm{const}$); g — ускорение свободного падения; $U_0(X,Y)$, $H_0(X)$ — заданные функции.

В [1] было показано, что задача (1.1) сводится к задаче Коши для системы интегродифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
u_t + uu_x + g\int\limits_0^1 h_x d\nu = 0, \quad h_t + (uh)_x = 0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\
u(x,0,\lambda) = U_0(x, \lambda H_0(x)), \quad h(x,0,\lambda) = H_0(x),
\end{gathered} \qquad (1.2)$$

где $u(x,t,\lambda) = U(x, \Phi(x,t,\lambda), t)$; $h(x,t,\lambda) = \Phi_\lambda(x,t,\lambda)$; функция $\Phi(x,t,\lambda)$ определяется в результате решения задачи

$$\Phi_t + \Big(\int\limits_0^\Phi U(x,Y,t)\,dY\Big)_x = 0, \qquad \Phi(x,0,\lambda) = \lambda H_0(x).$$

Координатные поверхности $\lambda = \mathrm{const}$ являются контактными поверхностями, $\lambda = 0$ соответствует дну, $\lambda = 1$ — свободной поверхности. При

$U_Y \equiv 0$ (что отвечает в длинноволновом приближении безвихревому течению) система (1.2) переходит в известные уравнения теории мелкой воды. Случай $U_Y \not\equiv 0$ соответствует завихренному (сдвиговому) течению.

В [1, 2] дано определение гиперболичности для системы с операторными коэффициентами и указаны условия гиперболичности системы уравнений (1.2) для монотонного профиля скорости ($U_Y \neq 0$), а в [3] получены условия гиперболичности уравнений (1.2) для немонотонного профиля скорости в предположении, что U_Y обращается в нуль в единственной точке $Y_*(X,T)$, $0 < Y_*(X,T) < H(X,T)$ (при этом $U_{YY}(Y_*) \neq 0$).

В настоящей работе получено явное решение задачи Коши для линеаризованной на стационарном решении $\mathbf{u} = (u_0(\lambda), h_0(\lambda))^{\mathrm{т}}$ (сдвиговый поток с горизонтальной свободной границей) системы уравнений (1.2) (индекс т обозначает транспонирование).

Линейная задача Коши

$$u_t + u_0 u_x + g\int\limits_0^1 h_x d\nu = 0, \quad h_t + h_0 u_x + u_0 h_x = 0, \qquad (1.3)$$
$$u(x,0,\lambda) = u_2(x,\lambda), \quad h(x,0,\lambda) = h_2(x,\lambda)$$

описывает малые возмущения сдвигового потока.

Рассмотрим немонотонные профили скорости $u_0(\lambda)$, удовлетворяющие условиям

$$u_{0\lambda} > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \lambda < \lambda_1, \quad u_{0\lambda} < 0 \quad \text{при} \quad \lambda_1 < \lambda < 1,$$
$$u_{0\lambda\lambda}(\lambda_1) \neq 0, \quad u_0(0) < u_0(1). \qquad (1.4)$$

Как и в [3], введем некоторые вспомогательные величины (они понадобятся при приведении системы уравнений (1.3) к характеристическому виду).

Пусть λ_2 — точка из отрезка [0,1], где достигается равенство $u_0(\lambda_2) = u_0(1)$. Для каждой точки λ из отрезка $[\lambda_2, \lambda_1]$ вводим функцию $\lambda_s = \lambda_s(\lambda)$ ($\lambda_s \geqslant \lambda_1$), определяемую равенством $u_0(\lambda) = u_0(\lambda_s(\lambda))$.

Произвольной гладкой функции ψ сопоставим полином третьей степени от переменной ν $Q(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)$, удовлетворяющий условиям

$$Q(\lambda,\lambda,\lambda_s,\psi) = \psi(\lambda), \quad Q(\lambda_s,\lambda,\lambda_s,\psi) = \psi(\lambda_s),$$
$$Q_\nu(\lambda,\lambda,\lambda_s,\psi) = \psi_\nu(\lambda), \quad Q_\nu(\lambda_s,\lambda,\lambda_s,\psi) = \psi_\nu(\lambda_s).$$

Этот полином представим в виде

$$Q(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi) = \frac{1}{2}(\psi(\lambda) + \psi(\lambda_s)) - \frac{1}{8}(\psi_\nu(\lambda) - \psi_\nu(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s) +$$
$$+(-\frac{1}{4}(\psi_\nu(\lambda) + \psi_\nu(\lambda_s)) + \frac{3}{2}(\psi(\lambda) - \psi(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-1})(\nu - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_s)) +$$
$$+\frac{1}{2}(\psi_\nu(\lambda) - \psi_\nu(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-1}(\nu - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_s))^2 +$$
$$+((\psi_\nu(\lambda)) + \psi_\nu(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-2} -$$
$$-2(\psi(\lambda) - \psi(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-3})(\nu - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_s))^3.$$

Полином $Q(\nu,\lambda,\lambda_s)$ построен таким образом, чтобы разность значений $Q(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)$ и $\psi(\nu)$ в окрестности точки λ_1 (где $\lambda \to \lambda_s$) была следующей: $(\psi(\nu) - Q(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)) = O((\nu - \lambda_1)^4)$.

Введем полином $Q_{01}(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)$ формулой

$$Q^0_1(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)=\frac{1}{8}(\omega_0(\lambda)\psi(\lambda)-\omega_0(\lambda_s)\psi(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)+$$
$$+\frac{1}{4}(\omega_0(\lambda)\psi(\lambda)+\omega_0(\lambda_s)\psi(\lambda_s))(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s))-$$
$$-\frac{1}{2}((\omega_0(\lambda)\psi(\lambda)-\omega_0(\lambda_s)\psi(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-1})(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s))^2-$$
$$-((\omega_0(\lambda)\psi(\lambda)+\omega_0(\lambda_s)\psi(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-2})(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s))^3,$$

где функция $\omega_0(\lambda)=u_{0\nu}(\lambda)/h_0(\lambda)$.

Введем функционалы $\delta(\lambda)$, $\delta'(\lambda)$, $P^0_{10}(\lambda)$ ($\lambda\in(0,\lambda_2)$), $P^0_{11}(\lambda)$ ($\lambda\in(0,\lambda_2)$), $P^0_0(\lambda)$ ($\lambda\in(\lambda_2,1)$), $P^0_1(\lambda)$ ($\lambda\in(\lambda_2,1)$), действующие на гладкую пробную функцию ψ по следующим правилам:

$$(\delta(\lambda),\psi)=\psi(\lambda),\ (\delta'(\lambda),\psi)=-\psi_\nu(\lambda),$$

$$(P^0_{10}(\lambda),\psi)=\int\limits_0^1\frac{h_0(\nu)(\psi(\nu)-\psi(\lambda))\,d\nu}{(u_0(\nu)-u_0(\lambda))^2},\quad \lambda\in(0,\lambda_2),$$

$$(P^0_{11}(\lambda),\psi)=\int\limits_0^1\frac{\psi(\nu)\,d\nu}{u_0(\nu)-u_0(\lambda)},\quad \lambda\in(0,\lambda_2),$$

$$(P^0_0(\lambda),\psi)=\int\limits_0^{\lambda_2}\frac{h_0(\nu)(\psi(\nu)-\psi(\lambda))\,d\nu}{(u_0(\nu)-u_0(\lambda))^2}+$$
$$+\int\limits_{\lambda_2}^1 h_0(\nu)\frac{(\psi(\nu)-Q(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi))\,d\nu}{(u_0(\nu)-u_0(\lambda))^2},\quad \lambda\in(\lambda_2,1),$$

$$(P_1(\lambda),\psi)=\int\limits_0^{\lambda_2}\frac{\psi(\nu)\,d\nu}{u_0(\nu)-u_0(\lambda)}+$$
$$+\int\limits_{\lambda_2}^1\frac{(\psi(\nu)(u_0(\nu)-u_0(\lambda))-h_0(\nu)Q^0_1(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi))\,d\nu}{(u_0(\nu)-u_0(\lambda))^2},\quad \lambda\in(\lambda_2,1).$$

2. Приведение системы уравнений (1.3) к характеристическому виду. Согласно [2], для приведения системы (1.3) к характеристическому виду нужно найти собственные функционалы φ и собственные числа k, удовлетворяющие уравнению

$$(\varphi,A\mathbf{f})=k(\varphi,\mathbf{f}),$$

где оператор A определен равенством

$$A(f_1,f_2)^{\mathrm{T}}(\lambda)=(u_0(\lambda)f_1(\lambda)+g\int\limits_0^1 f_2(\nu)\,d\nu\ ,\ h_0(\lambda)f_1(\lambda)+u_0(\lambda)f_2(\lambda))^{\mathrm{T}}.$$

Здесь $(\varphi, \mathbf{f})$ обозначает действие функционала φ на пробную функцию $\mathbf{f}$; $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^{\mathsf{T}}$ — достаточно гладкая вектор-функция.

Как показано в [3] , собственные числа k_i дискретного спектра определяются уравнением

$$g\int\limits_0^1 h_0(u_0(\nu) - k_i)^{-2} d\nu = 1, \tag{2.1}$$

которое всегда имеет два действительных корня вне отрезка $[\min_\lambda u_0(\lambda), \max_\lambda u_0(\lambda)]$ и отрезок непрерывного спектра $k^\lambda = u_0(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Собственным числам k_1, k_2, удовлетворяющим уравнению (2.1), соответствуют собственные функционалы φ^i. Действие φ^i на произвольную гладкую функцию $\mathbf{f}$ $(\mathbf{f} = (f_1, f_2)^{\mathsf{T}})$ определяется формулами

$$(\varphi^i, \mathbf{f}) = \int\limits_0^1 f_1(\nu) h_0(\nu)(u_0(\nu) - k_i)^{-2} d\nu - \int\limits_0^1 f_2(\nu)(u_0(\nu) - k_i)^{-1} d\nu \quad (i = 1, 2).$$

Каждому из характеристических чисел $k^\lambda = u_0(\lambda)$ $(\lambda \in (0, \lambda_2))$ отвечают два собственных функционала: $\varphi^{11\lambda}$, $\varphi^{21\lambda}$, задаваемых формулами

$$\varphi^{11\lambda} = (\delta'(\lambda), \omega_0(\lambda)\delta(\lambda)), \quad \varphi^{21\lambda} = (gP_{10}^0(\lambda) + \delta(\lambda), -gP_{11}^0(\lambda)).$$

Каждому из характеристических чисел $k^\lambda = u_0(\lambda)$ $(\lambda \in (\lambda_2, 1))$ соответствуют четыре собственных функционала: $\varphi^{1\lambda}$, $\varphi^{2\lambda}$, $\varphi^{3\lambda}$, $\varphi^{4\lambda}$, задаваемых формулами

$$\varphi^{1\lambda} = (\delta'(\lambda) + \delta'(\lambda_s) + 6(\delta(\lambda) - \delta(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-1}, \omega_0(\lambda)\delta(\lambda) + \omega_0(\lambda_s)\delta(\lambda_s)),$$

$$\varphi^{2\lambda} = ((\delta'(\lambda) - \delta'(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-1}, (\omega_0(\lambda)\delta(\lambda) - \omega_0(\lambda_s)\delta(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-1}),$$

$$\varphi^{3\lambda} = ((\delta'(\lambda) - \delta'(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-2} + 2(\delta(\lambda) - \delta(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-3},$$
$$(\omega_0(\lambda)\delta(\lambda) + \omega_0(\lambda_s)\delta(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-2},$$

$$\varphi^{4\lambda} = (gP_0^0(\lambda) + \delta(\lambda), -gP_1^0(\lambda)).$$

3. Инварианты Римана. Введем новые искомые функции:

$$R_i = \int\limits_0^1 \frac{h_0(\nu)u(\nu)\, d\nu}{(u_0(\nu) - k_i)^2} - \int\limits_0^1 \frac{h(\nu)\, d\nu}{u_0(\nu) - k_i} \quad (i = 1, 2),$$

для $\lambda \in (0, \lambda_2)$

$$R_{11\lambda} = -u_\nu(\lambda) + \omega_0(\lambda)h(\lambda),$$

$$R_{21\lambda} = g\int\limits_0^1 \frac{h_0(\nu)(u(\nu) - u(\lambda))\, d\nu}{(u_0(\nu) - u_0(\lambda))^2} + u(\lambda) - g\int\limits_0^1 \frac{h(\nu)\, d\nu}{u_0(\nu) - u_0(\lambda)},$$

для $\lambda \in (\lambda_2, 1)$

$$R_{1\lambda} = -(u_\nu(\lambda) + u_\nu(\lambda_s)) + 6(u(\lambda) - u(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-1} +$$
$$+ \omega_0(\lambda)h(\lambda) + \omega_0(\lambda_s)h(\lambda_s),$$

$$R_{2\lambda} = (u_\nu(\lambda) - u_\nu(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-1} - (\omega_0(\lambda)h(\lambda) -$$
$$- \omega_0(\lambda_s)h(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-1},$$

$$R_{3\lambda} = (u_\nu(\lambda) + u_\nu(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-2} - 2(u(\lambda) - u(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-3} -$$
$$-(\omega_0(\lambda)h(\lambda) + \omega_0(\lambda_s)h(\lambda_s))(\lambda - \lambda_s)^{-2},$$

$$R_{4\lambda} = \int_0^{\lambda_2} \frac{h_0(\nu)(u(\nu) - u(\lambda))\,d\nu}{(u_0(\nu) - u_0(\lambda))^2} + \int_{\lambda_2}^1 \frac{h_0(\nu)(u(\nu) - Q(\nu,\lambda,\lambda_s,u))\,d\nu}{(u_0(\nu) - u_0(\lambda))^2} +$$
$$+ \int_0^{\lambda_2} \frac{h(\nu)\,d\nu}{u_0(\nu) - u_0(\lambda)} + \int_{\lambda_2}^1 \frac{(h(\nu)(u_0(\nu) - u_0(\lambda)) - h_0(\nu)Q_1^0(\nu,\lambda,\lambda_s,h))\,d\nu}{(u_0(\nu) - u_0(\lambda))^2}.$$

Лемма. *Величины R_1, R_2 сохраняют свое значение вдоль характеристик $dx/dt = k_i$ $(i = 1,2)$. Вдоль характеристик $dx_\lambda/dt = u_0(\lambda)$ $(\lambda \in (0,\lambda_2))$ сохраняют постоянное значение величины $R_{i1\lambda}$ $(i = 1,2)$. Вдоль характеристик $dx_\lambda/dt = u_0(\lambda)$ $(\lambda \in (\lambda_2,1))$ сохраняют постоянное значение величины $R_{i\lambda}$ $(i = 1,\dots,4)$.*

4. Решение линейной задачи. В начальный момент времени инварианты Римана R являются известными функциями от начальных данных. Так как эти величины сохраняются вдоль соответствующих характеристик, то получаем явное представление решения в терминах инвариантов Римана:

$$\begin{aligned}
&R_i(x,t) = R_{0i}(x - k_i t) \quad (i = 1,2),\\
&R_{i\lambda}(x,t,\lambda) = R_{0i\lambda}(x - u_0(\lambda)t,\lambda) \quad \text{для } \lambda \in (\lambda_2,1) \ \ (i = 1,\dots,4), \qquad (4.1)\\
&R_{i1\lambda}(x,t,\lambda) = R_{0i1\lambda}(x - u_0(\lambda)t,\lambda) \quad \text{для } \lambda \in (0,\lambda_2) \ \ (i = 1,2).
\end{aligned}$$

Разрешив систему (4.1) относительно u, h, находим решение исходной линейной задачи.

Сведем систему соотношений (4.1) к уравнению для функции $f(x,t,\lambda) = u(x,t,\lambda) - u_2(x - u_0(\lambda)t,\lambda)$. Уравнение для функции f примет вид (аргументы x, t опущены для краткости записи)

$$f(\lambda) - g\int_0^1 \frac{1}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{f(\nu) - f(\lambda)}{u_0(\nu) - u_0(\lambda)}\right) d\nu = g_1(\lambda), \qquad (4.2)$$

где $g_1(\lambda) = g_1(x,t,\lambda)$ — известная функция, выраженная в терминах начальных данных:

$$g_1(\lambda) = g\int_0^1 \frac{(h_2(x - u_0(\nu)t,\nu) - h_2(x - u_0(\lambda)t,\nu))\,d\nu}{u_0(\nu) - u_0(\lambda)} -$$
$$-g\int_0^1 \frac{(h_0(\nu)u_{2x}(x - u_0(\nu)t,\nu)t)\,d\nu}{u_0(\nu) - u_0(\lambda)} -$$
$$-g\int_0^1 \frac{h_0(\nu)(u_2(x - u_0(\nu)t,\nu) - u_2(x - u_0(\lambda)t,\nu))\,d\nu}{(u_0(\nu) - u_0(\lambda))^2}. \qquad (4.3)$$

Легко проверить, что уравнение (4.2) имеет решение вида $f_{11} = \alpha_1(u_0 - k_1)^{-1} + \alpha_2(u_0 - k_2)^{-1}$ (α_1, α_2 — произвольные величины, не зависящие от λ).

Будем искать общее решение уравнения (4.2) в виде $f = f_1 + f_{11}$, где f_1 удовлетворяет условиям $f_1(0) = f_1(\lambda_1)$, $f_1(1) = f_1(\lambda_1)$. Выполнение этих условий можно обеспечить выбором α_1, α_2. Функция f_1 обладает свойством симметрии $f_1(\lambda) = f_1(\lambda_s)$ ($\lambda \in (\lambda_2, 1)$). Это следует из равенств (4.1). Если функция f_1 известна, то коэффициенты α_1, α_2 можно определить из соотношений $R_i(x,t) = R_{0i}(x - k_i t)$ ($i = 1, 2$):

$$\alpha_i = \left(2\int\limits_0^1 \frac{h_0\,d\nu}{(u_0(\nu) - k_i)^3}\right)^{-1} g s_i \qquad (i = 1, 2). \tag{4.4}$$

Здесь

$$s_i = \int\limits_0^1 \frac{(h_2(x - u_0(\nu)t, \nu) - h_2(x - k_i t, \nu))\,d\nu}{u_0(\nu) - k_i} -$$

$$- \int\limits_0^1 \frac{(h_0(\nu) u_{2x}(x - u_0(\nu)t, \nu)t)\,d\nu}{u_0(\nu) - k_i} -$$

$$- \int\limits_0^1 \frac{h_0(\nu)(u_2(x - u_0(\nu)t, \nu) - u_2(x - k_i t, \nu))\,d\nu}{(u_0(\nu) - k_i)^2} -$$

$$- \int\limits_0^1 \frac{(\omega_0^{-1})_\nu f_1 d\nu}{u_0 - k_i} + f_1(\lambda_1)\left(\omega_0^{-1}(\nu)(u_0(\nu) - k_i)^{-1}\Big|_0^1\right).$$

С помощью интегрирования по частям и замены переменной уравнение (4.2) преобразуется к виду

$$\psi(\tau)\Bigg[(\tau - u_{0*}) + g(u_{01} - \tau)^{-1}\omega_{01}^{-1}(u_{01} - u_{0*}) -$$

$$-g(u_{00} - \tau)^{-1}\omega_{00}^{-1}(u_{00} - u_{0*}) - g\int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{\rho(\cdot\cdot')\,d\tau'}{\tau' - \tau}\Bigg] +$$

$$+g\int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{\rho(\tau')\psi(\tau')\,d\tau'}{\tau' - \tau} = -f_{1*} + g_1(\tau), \tag{4.5}$$

где $\psi(\tau) = (f_1(\tau) - f_{1*})(\tau - u_{0*})^{-1}$ ($\psi = 0$ при $\lambda = 0$, $\lambda = 1$); τ', τ, ω_{0s} — сокращенные обозначения $u_0(\nu)$, $u_0(\lambda)$, $\omega_0(\lambda_s)$; индексы 00, 01, 0* соответствуют значениям функций u_0, ω_0 при $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = \lambda_1$; $f_{1*} = f_1(\lambda_1)$; $\omega_0(\tau) = \tilde{\omega}_0(\tau(\lambda))$; $\omega_{0s}(\tau) = \tilde{\omega}_{0s}(\tau(\lambda))$; $\psi(\tau) = \tilde{\psi}(\tau(\lambda))$; $g_1(\tau) = \tilde{g}_1(\tau(\lambda))$.

Разрывная в точке u_{01} функция $\rho(\tau)$ задается формулами

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= (\tau - u_{0*})\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\omega_0(\tau)}\right) && \text{для } \tau \in (u_{00}, u_{01}), \\ \rho(\tau) &= (\tau - u_{0*})\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\omega_0(\tau)}\right) - \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\omega_{0s}(\tau)}\right)\right) && \text{для } \tau \in (u_{01}, u_{0*}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

В точке u_{0*} функция $\rho(\tau)$ имеет особенность $\rho = O(|\tau - u_{0*}|)^{-1/2}$, так как в силу предположений (1.4) в окрестности точки $\lambda = \lambda_1$ $(\tau - u_{0*}) =$

$O((\lambda-\lambda_1)^2)$ и соответственно $|\omega_0| = |u_{0\lambda}h_0^{-1}| = O(|\lambda-\lambda_1|) = O(|\tau-u_{0*}|^{1/2})$. Интегральное уравнение (4.5) сводится к задаче Римана

$$\psi_1^+(\tau) = G(\tau)\psi_1^-(\tau) + g_2(\tau), \quad \tau \in (u_{00}, u_{0*}) \tag{4.7}$$

для функции $\psi_1(z) = \int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{\rho(\tau)\psi(\tau)\,d\tau}{\tau - z}$ в плоскости комплексного переменного z с разрезом по отрезку $[u_{00}, u_{0*}]$. Здесь знаки $+$ и $-$ относятся к предельным значениям функций при $z \to \tau$ из верхней и нижней полуплоскости; $G(\tau) = (a(\tau) - b(\tau))/(a(\tau) + b(\tau))$; $g_2(\tau) = (\rho(\tau)(-f_{1*} + g_1(\tau)))/(a(\tau) + b(\tau))$; $g_1(\tau)$ определяется формулой (4.3);

$$a(\tau) = (\tau - u_{0*}) + g((u_{01} - u_{0*})(u_{01} - \tau)^{-1}\omega_{01}^{-1} -$$
$$-(u_{00} - u_{0*})(u_{00} - \tau)^{-1}\omega_{00}^{-1}) - g\int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{\rho(\tau')\,d\tau'}{\tau' - \tau}; \tag{4.8}$$
$$b(\tau) = \pi i g\rho(\tau).$$

Продолжим граничное условие на действительную ось, полагая функцию G равной единице на отрезках $]-\infty, u_{00}]$, $]u_{0*}, +\infty[$. Рассматриваемая задача Римана имеет коэффициенты, разрывные в точке u_{0*} ($G(u_{0*} - 0) = -1$, $G(u_{0*} + 0) = 1$). Решение задачи Римана будем искать в классе функций, исчезающих на бесконечности и не ограниченных в точке u_{0*}.

Вопрос об однозначной разрешимости задачи (4.7), согласно общей теории, решается вычислением ее индекса [4]. Отсутствие комплексных корней характеристического уравнения (2.1), а следовательно, и неограниченно растущих по времени решений (1.3) обеспечивается (по принципу аргумента) выполнением условия

$$\frac{1}{\pi}\Delta \arg G = -3, \tag{4.9}$$

где Δ — приращение на отрезке $]u_{00}, u_{01}[\cup]u_{01}, u_{0*}[$. Если условия (4.9) и $a^2 - b^2 \neq 0$ при $z \in (u_{00}, u_{0*})$ выполнены, то индекс æ задачи Римана (4.7) в указанном выше классе решений равен -1 [3]. При æ $= -1$ задача (4.7) будет иметь единственное решение в том случае, если

$$\int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{g_2(\tau)\,d\tau}{X_1(\tau)} = 0 \tag{4.10}$$

(X_1 — каноническое решение задачи (4.7)). Каноническое решение задачи Римана как функция, удовлетворяющая краевому условию, имеющая нулевой порядок всюду в конечной части плоскости и порядок ($-$æ) на бесконечности, имеет вид

$$X_1(z) = (z - u_{00})(z - u_{01})(z - k_1)^{-1}(z - k_2)^{-1}a(z) = P(z)a(z).$$

Таким образом, решение уравнения (4.5) представляется в форме

$$\psi(\tau) = a(\tau)(-f_{1*} + g_1(\tau)) -$$
$$-g(a^2(\tau) - b^2(\tau))P(\tau)\int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{(-f_{1*} + g_1(\tau'))\rho(\tau')\,d\tau'}{(a^2(\tau') - b^2(\tau'))P(\tau')(\tau' - \tau)},$$

где значение f_{1*} определяется из условия разрешимости (4.10):

$$f_{1*} = \int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{g_1(\tau)\rho(\tau)\,d\tau}{(a^2(\tau) - b^2(\tau))P(\tau)} \Bigg/ \int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{\rho(\tau)\,d\tau}{(a^2(\tau) - b^2(\tau))P(\tau)}. \qquad (4.11)$$

Итак, доказана

Теорема. *Пусть* u, u_x, u_t, $u_2(x - u_0(\nu)t, \nu) \in C^{2+\alpha}[0,1]$, h, h_t, h_x, $h_2(x - u_0(\nu)t, \nu) \in C^{1+\alpha}[0,1]$ $(0 < \alpha < 1)$ *и выполнены условия гиперболичности* $a^2 - b^2 \neq 0$ *и* (4.9) $(a, b$ *из* (4.8)). *Тогда решение задачи Коши* (1.3) *имеет вид*
$u(x,t,\nu) = f_1(x,t,\nu) + \alpha_1(u_0(\nu) - k_1)^{-1} + \alpha_2(u_0(\nu) - k_2)^{-1} + u_2(x - u_0(\nu)t, \nu)$,
$h(x,t,\nu) = \omega_0^{-1}(\nu)(u_\nu(x,t,\nu) - u_{2\nu}(x - u_0(\nu)t,\nu)) + h_2(x - u_0(\nu)t, \nu)$
$(\nu \neq \lambda_1)$, $h(x,t,\lambda_1) = h_0 u_{0\nu\nu}^{-1}(\lambda_1)(u_{\nu\nu}(x,t,\lambda_1) - u_{2\nu\nu}(x - u_0(\lambda_1)t, \lambda_1)) + h_2(x - u_0(\lambda_1)t, \lambda_1)$.

Здесь α_1, α_2 находятся из формул (4.4);

$$f_1(x,t,\nu) = f_1(x,t,\lambda_1) + \psi(x,t,\nu)(u_0(\nu) - u_0(\lambda_1));$$

$$\psi(x,t,\nu) = a(u_0(\nu))(-f_1(x,t,\lambda_1) + g_1(x,t,\nu)) - g(a^2(u_0(\nu)) -$$

$$-b^2(u_0(\nu)))P(u_0(\nu)) \int\limits_{u_{00}}^{u_{0*}} \frac{(-f_1(x,t,\lambda_1) + g_1(x,t,\tau))\rho(\tau)\,d\tau}{(a^2(\tau) - b^2(\tau))P(\tau)(\tau - u_0(\nu))},$$

где $P(u_0(\nu)) = (u_0(\nu) - u_{00})(u_0(\nu) - u_{01})(u_0(\nu) - k_1)^{-1}(u_0(\nu) - k_2)^{-1}$; a, b определяются из (4.8), $g_1(x,t,\nu)$ — из (4.3), $\rho(\tau)$ — из (4.6), $f_1(x,t,\lambda_1) = f_{1*}$ — из (4.11).

Приведенные формулы дают явное представление решения задачи Коши для линеаризованной на сдвиговом течении с немонотонным профилем скорости системы уравнений (1.2).

В заключение приведем пример профиля скорости, для которого выполнены условия гиперболичности. Пусть $u_0 = u_{0*} - (\frac{1}{2}y - (u_{0*} - u_{00})^{1/2})^2$, тогда $\omega_0 = (u_{0*} - u_0)^{1/2}$ для $0 \leqslant \lambda < \lambda_1$, $\omega_0 = -(u_{0*} - u_0)^{1/2}$ для $\lambda_1 < \lambda \leqslant 1$. Функция $\chi^+(u_0) = a - b$ примет вид

$$\chi^+(u_0) = (u_0 - u_{0*}) - g(u_{0*} - u_{01})^{1/2}(u_0 - u_{01})^{-1} - g(u_{0*} - u_{00})^{1/2}(u_0 - u_{00})^{-1} +$$

$$+\frac{1}{2}(u_{0*} - u_0)^{-1/2} g(\ln((|u_{0*} - u_{00}|^{1/2} + |u_{0*} - u_0|^{1/2})|u_0 - u_{00}|^{-1}) +$$

$$+\ln((|u_{0*} - u_{01}|^{1/2} + |u_{0*} - u_0|^{1/2})|u_0 - u_{01}|^{-1})) + \pi i K g(u_{0*} - u_0)^{-1/2},$$

где $K = 1/2$ для $u_0 \in]u_{00}, u_{01}[$; $K = 1$ для $u_0 \in]u_{01}, u_{0*}[$.

Опишем поведение функции $\chi^+(u_0)$ на отрезке $]u_{00}, u_{01}[$: $(\chi^+/|\chi^+|)(u_{00} + 0) = -1$, $(\chi^+/|\chi^+|)(u_{01} - 0) = 1$, на участке $]u_{00}, u_{01}[$ $\mathrm{Im}(\chi^+) > 0$, значит, $\Delta \arg \chi^+ = -\pi$ и $\Delta \arg G = -2\pi$ $(G = ((\chi^+)^2/|\chi^+|^2))$. Далее, $(\chi^+/|\chi^+|)(u_{01} + 0) = -1$, $(\chi^+/|\chi^+|)(u_{0*} - 0) = i$. На участке $]u_{01}, u_{0*}[$ $\mathrm{Im}(\chi^+) > 0$, $\mathrm{Re}(\chi^+) < 0$, следовательно, $\Delta \arg \chi^+ = -\pi/2$ и $\Delta \arg G = -\pi$. Таким образом, общее приращение аргумента функции G на отрезке $]u_{00}, u_{01}[\cup]u_{01}, u_{0*}[$ равно (-3π), что соответствует выполнению условий (4.9).

Автор благодарит профессора В. М. Тешукова за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
2. **Teshukov V. M.** Long wave approximation for vortex free boundary flows // Numerical Methods for Free Boundary Problems. Basel: Birkhäuser Verl., 1991. (Int. Ser. Numer. Math.; V. 99).
3. **Тешуков В. М., Стерхова М. М.** Характеристические свойства системы уравнений сдвигового течения с немонотонным профилем скорости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 53–59.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 2/VIII 1994 г.