УДК 539.3

ЭФФЕКТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

В. В. Калашников, М. И. Карякин

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону
E-mails: kalashnikovv@inbox.ru, karyakin@math.rsu.ru

Проведено сравнение решения задачи о кручении кругового нелинейно-упругого стержня торцевыми моментами методом последовательных приближений при учете эффектов второго порядка с решением той же задачи полуобратным методом. Показано, что предположение о “мертвом” характере нагрузки приводит к нарушению симметричности тензора напряжений Коши в некоторой области. Предложена более точная формулировка принципа Сен-Венана в задаче определения интегральных деформационных характеристик.

Ключевые слова: эффект Пойнтинга, полуобратный метод, эффекты второго порядка, принцип Сен-Венана.

Введение. При разработке многих современных высокопрецизионных устройств необходимо с достаточно большой степенью точности учитывать эффекты физической и геометрической нелинейности. (Например, при проектировании и калибровке стержневого динамометра требуется учитывать эффект Пойнтинга — удлинение стержня в процессе кручения.)

Исследование данной проблемы сводится к нахождению эффектов второго порядка в задаче о кручении нелинейно-упругого кругового стержня торцевыми моментами. Решению этой классической задачи посвящено большое количество работ, из которых в первую очередь следует выделить работы А. И. Лурье. В его монографии [1] для учета эффектов второго порядка в задачах о деформации тел различной формы предложен метод последовательных приближений. В работе [2] показано, что величина осевого удлинения цилиндра, вычисляемая методом последовательных приближений [1], и величина, полученная полуобратным методом, различаются. В данной работе показана причина различия: несмотря на то что интегральные характеристики (осевая сила и крутящий момент) внешней нагрузки в этих задачах совпадают, построенные решения соответствуют различным ее распределениям по торцевым поверхностям цилиндра. Кроме того, проанализировано влияние этого различия на величину интегральной деформационной характеристики — удлинение цилиндра.

Метод последовательных приближений. Описанный в [1] метод заключается в замене решения задачи о равновесии нелинейно-упругого тела вида

$$\overset{0}{\nabla}\cdot D + \rho_0 \boldsymbol{k} = 0; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot D\, do = \boldsymbol{f}\, dO, \tag{2}$$

где $\overset{0}{\nabla}$ — оператор градиента в отсчетной конфигурации; ρ_0 — плотность тела в отсчетной конфигурации; $\boldsymbol{k}$ — вектор массовых сил; $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности; do, dO — элементарные площадки поверхности в отсчетной и текущей конфигурации соответственно; D — тензор напряжений Пиолы; $\boldsymbol{f}$ — отнесенная к деформированной поверхности внешняя нагрузка, которая предполагается “мертвой”:

$$\boldsymbol{f}\,dO = \boldsymbol{f}^0\,do, \tag{3}$$

последовательностью двух задач:

— линейной задачи

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\sigma(\boldsymbol{v}) + \rho_0\boldsymbol{k} = 0, \qquad \boldsymbol{n}\cdot\sigma(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}^0; \tag{4}$$

— задачи об эффектах второго порядка

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\sigma(\boldsymbol{w}) + \rho_0\boldsymbol{k}_* = 0, \qquad \boldsymbol{n}\cdot\sigma(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}_*, \tag{5}$$

основанной на решении предыдущей задачи. Здесь $\boldsymbol{v}$ — линейный вектор перемещений в решении линейной задачи; $\boldsymbol{w}$ — квадратичный вектор перемещений в решении задачи об эффектах второго порядка; $\boldsymbol{k}_*$, $\boldsymbol{f}_*$ — векторы массовых и поверхностных сил соответственно в задаче об эффектах второго порядка; σ — тензор напряжений Коши.

В (4), (5) зависимость тензора σ от вектора перемещений соответствует классическому закону линейной теории упругости:

$$\sigma(\boldsymbol{u}) = \lambda\overset{0}{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}E + \mu(\overset{0}{\nabla}\boldsymbol{u} + \overset{0}{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}),$$

а роль массовых и поверхностных сил играют векторы

$$\rho_0\boldsymbol{k}_* = \overset{0}{\nabla}\cdot\big(\overset{0}{\nabla}\boldsymbol{v}\cdot\sigma(\boldsymbol{v}) + \sigma'(\boldsymbol{v})\big), \qquad \boldsymbol{f}_* = -\boldsymbol{n}\cdot\big(\overset{0}{\nabla}\boldsymbol{v}\cdot\sigma(\boldsymbol{v}) + \sigma'(\boldsymbol{v})\big).$$

Задачи (4), (5) получаются из (1), (2) в результате разложения вектора перемещений $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{v}$ — предполагаемое известным решение линейной задачи; $\boldsymbol{w}$ компенсирует слагаемые второго порядка) и соответствующего ему разложения тензора напряжений Пиолы:

$$D(\boldsymbol{u}) = \sigma(\boldsymbol{v}) + \sigma(\boldsymbol{w}) + \overset{0}{\nabla}\boldsymbol{v}\cdot\sigma(\boldsymbol{v}) + \sigma'(\boldsymbol{v})$$

($\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений в нелинейной задаче; σ' — квадратичная составляющая разложения тензора напряжений Пиолы).

Выражение для тензора σ' зависит от вида нелинейно-упругого потенциала W:

$$\sigma' = E\big[\lambda\big(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + (1/2)\mathrm{tr}\,(\varepsilon^2)\big) + \big((\overset{0}{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})^2 - \mathrm{tr}\,(\varepsilon^2)\big)a + b(\overset{0}{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})^2\big] + {} \\ + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^2\,\overset{0}{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} + \mu\,\overset{0}{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{0}{\nabla}\boldsymbol{u},$$

где

$$a = 4\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3}\Big)F\Big]^0; \qquad b = 4\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial I_1} + 2\,\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3}\Big)^2F\Big]^0;$$

$$F = \frac{\partial W}{\partial I_1} + (I_1 - 1)\,\frac{\partial W}{\partial I_2} + I_3\,\frac{\partial W}{\partial I_3}; \qquad c = 8\,\frac{\partial W^0}{\partial I_3};$$

$$d = -8\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial I_1\,\partial I_2} + \frac{\partial W}{\partial I_3} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1\,\partial I_3} + 3\frac{\partial^2 W}{\partial I_2\,\partial I_3} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2} + 2\,\frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}\Big)^0;$$

$\boldsymbol{\omega} = (1/2)\,\overset{0}{\nabla}\times\boldsymbol{u}$ — вектор поворота; $I_k(G)$ — главные инварианты меры деформации Коши; $\varepsilon = (1/2)(\overset{0}{\nabla}\boldsymbol{u} + \overset{0}{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})$ — линейный тензор деформации; λ, μ — константы Ламе;

верхний индекс 0 означает, что значение берется в отсчетной конфигурации, т. е. после дифференцирования полагается $I_1 = I_2 = 3$, $I_3 = 1$.

В случае материала Мурнагана, энергия деформации которого задается функцией

$$W = (1/2)(\lambda + 2\mu)j_1^2 - 2\mu j_2 + (1/3)(l + 2m)j_1^3 - 2mj_1j_2 + nj_3$$

($j_1 = \operatorname{tr} K$; $j_2 = (1/2)(\operatorname{tr}^2 K - \operatorname{tr} K^2)$; $j_3 = \det K$; $K = (1/2)(G - E)$ — тензор деформаций Коши), константы, входящие в тензор σ', принимают вид

$$a = -m + n/2, \qquad b = l, \qquad c = n, \qquad d = -n + 2m.$$

В ряде случаев постановка (5) позволяет найти некоторые характеристики деформации без определения вектора $\boldsymbol{w}$, т. е. без решения краевой задачи. В случае кручения такой характеристикой является осевое удлинение цилиндра. (Осевое удлинение цилиндра при отсутствии осевой силы известно как эффект Пойнтинга.) Для его нахождения в [1] использован следующий подход. В общем случае упругого изотропного тела вычисляется силовой тензор для задачи (5):

$$\begin{aligned}
B &= \iiint\limits_V \rho_0 \boldsymbol{k}_* \boldsymbol{R}\, dV + \iint\limits_S \boldsymbol{f}_* \boldsymbol{R}\, dS = \\
&= \iiint\limits_V \rho_0 \boldsymbol{k}_* \boldsymbol{R}\, dV - \iint\limits_S \boldsymbol{n} \cdot \big(\overset{0}{\nabla} \boldsymbol{v} \cdot \sigma(\boldsymbol{v}) + \sigma'(\boldsymbol{v}) \big) \boldsymbol{R}\, dS = \\
&= \iiint\limits_V \overset{0}{\nabla} \cdot \big(\overset{0}{\nabla} \boldsymbol{v} \cdot \sigma(\boldsymbol{v}) + \sigma'(\boldsymbol{v}) \big) \boldsymbol{R}\, dV - \iiint\limits_V \overset{0}{\nabla} \cdot \big(\overset{0}{\nabla} \boldsymbol{v} \cdot \sigma(\boldsymbol{v}) + \sigma'(\boldsymbol{v}) \big) \boldsymbol{R}\, dV - \\
&\qquad - \iiint\limits_V \big(\overset{0}{\nabla} \boldsymbol{v} \cdot \sigma(\boldsymbol{v}) + \sigma'(\boldsymbol{v}) \big)^{\mathrm{T}} \cdot \overset{0}{\nabla} \boldsymbol{R}\, dV
\end{aligned}$$

(S, V — площадь и объем тела в текущей конфигурации; $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор точки в текущей конфигурации). После некоторых преобразований соотношение для силового тензора принимает вид

$$B = -\iiint\limits_V \big(\sigma(\boldsymbol{v}) \cdot \overset{0}{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \sigma'(\boldsymbol{v}) \big)\, dV.$$

Среднее значение тензора напряжений $\sigma(\boldsymbol{w})$ имеет вид

$$\sigma_m(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{V} \iiint\limits_V \sigma(\boldsymbol{w})\, dV = \frac{1}{V} B = -\frac{1}{V} \iiint\limits_V \big(\sigma(\boldsymbol{v}) \cdot \overset{0}{\nabla} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \sigma'(\boldsymbol{v}) \big)\, dV,$$

среднее значение линейного тензора деформации —

$$2\mu\varepsilon_m(\boldsymbol{w}) = \sigma_m(\boldsymbol{w}) - E\, \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\, I_1(\sigma_m(\boldsymbol{w})).$$

Относительное удлинение упругого кругового стержня находится из выражения

$$\Delta L / L = \boldsymbol{e}_z \cdot \varepsilon_m(\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{e}_z$$

($\boldsymbol{e}_z$ — единичный координатный вектор в отсчетной конфигурации) и для материала Мурнагана вычисляется по формуле

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\psi^2 r_1^2}{4} \Big(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} \Big(\lambda - \frac{n\lambda}{4\mu} - m \Big) - 1 \Big), \tag{6}$$

где ψ — погонный угол закручивания; r_1 — радиус цилиндра; n, m — константы материала Мурнагана.

Решение задачи полуобратным методом. Анализ задачи (1), (2) о кручении кругового стержня полуобратным методом основывается на преобразовании отсчетной (недеформированной) конфигурации в текущую (деформированную) конфигурацию вида

$$R = R(r), \qquad \Phi = \varphi + \psi z, \qquad Z = \alpha z,$$

где α — параметр, выражающий удлинение стержня; r, φ, z — цилиндрические координаты отсчетной конфигурации. При этом уравнения равновесия и граничные условия отсутствия напряжений на боковой поверхности выполняются точно, а граничные условия на торцах — в интегральном смысле, обеспечивая отсутствие осевой растягивающей силы и равенство суммарного момента действующих на торце напряжений заданному крутящему моменту. При этом, в частности, определяются параметры ψ, α, а следовательно, осевое удлинение $\alpha - 1$.

В случае материала Мурнагана уравнение для определения $R(r)$ получается очень громоздким и здесь не приводится. Однако если учесть в нем слагаемые не выше второго порядка, т. е. представить неизвестную функцию $R(r)$ в виде

$$R(r) = r + \psi^2 f(r) + \ldots,$$

то линейное уравнение для определения $f(r)$ может быть решено в явном виде. Вычисленное с его использованием относительное удлинение с точностью до квадратичных слагаемых имеет вид

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\psi^2 r_1^2}{4}\Big(\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\Big(2\lambda - \frac{n\lambda}{4\mu} - m\Big) - 1\Big)$$

и отличается от (6) множителем перед параметром λ в скобках. Различие между полученным удлинением и (6) существенно, поэтому определение причин различия результатов имеет большое значение.

Дальнейший анализ основан на точном решении нелинейной задачи о кручении стержня, которое может быть получено для упрощенной модели материала Блейтца и Ко, являющейся одной из моделей сжимаемых нелинейно-упругих сред. В этом случае упругий потенциал W принимает вид

$$W = (1/2)\mu(I_2/I_3 + 2\sqrt{I_3} - 5).$$

Тензор напряжений Пиолы для материала Блейтца и Ко записывается следующим образом:

$$D = (\mu/I_3)(I_1 E - G + (I_3^{3/2} - I_2)G^{-1}) \cdot C,$$

а краевая задача для определения неизвестной функции изменения радиуса $R(r)$ записывается в виде

$$\begin{gathered} R''(r) = \frac{R'(r)R(r)^3 - r^3(R'(r))^4}{3R(r)^3 r}, \\ R(0) = 0, \qquad -(R'(r_1))^3 R(r_1)\alpha + r_1 = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где r_1 — внешний радиус стержня.

Краевая задача (7) имеет аналитическое решение

$$R(r) = \alpha^{-1/4} r.$$

Зависимость $\alpha(\psi)$ находится из условия отсутствия продольной силы

$$Q = \iint\limits_S \sigma_{zz}\, ds = 2\pi \int\limits_0^{r_1} \sigma_z R R'(r)\, dr = 2\pi \Big(-\frac{1}{4}\,\frac{\mu\psi^2 r_1^4}{\alpha^3} + \frac{1}{2}\, r_1^2 \mu\, \frac{1-\alpha^{5/2}}{\alpha^3} \Big)$$

(σ_{zz} — нормальные напряжения на торце стержня). Таким образом,

$$\alpha(\psi) = (1/4)(16\psi^2 r_1^2 + 32)^{2/5} \approx 1 + (1/5)\psi^2 r_1^2.$$

Следовательно, относительное удлинение вычисляется по формуле

$$(\alpha L - L)/L = \alpha - 1 = (1/5)\psi^2 r_1^2.$$

Установив соответствие между константами материалов Мурнагана и Блейтца и Ко с точностью до эффектов второго порядка в виде

$$n = -8\mu, \qquad m = -5\mu, \qquad l = -(1/2)\mu,$$

в случае материала Блейтца и Ко формулу (6) можно записать в виде $\Delta L/L = (3/20)\psi^2 r_1^2$, тогда как вычисленное полуобратным методом удлинение выражается формулой $\Delta L/L = (1/5)\psi^2 r_1^2$. Таким образом, при использовании описанных выше подходов различие значений относительного удлинения составляет 25 %.

Приведенное точное решение нелинейной задачи позволяет установить причину различия при использовании двух подходов.

Уравнения и краевые условия (5) для задачи кручения принимают вид

$$\begin{gathered} \overset{0}{\nabla} \cdot \sigma(\boldsymbol{w}_1) + \rho_0 \boldsymbol{k}_* = 0, \\ \boldsymbol{e}_r \cdot \sigma(\boldsymbol{w}_1) = -2z^2\mu\psi^2 \boldsymbol{e}_r - zr\mu\psi^2 \boldsymbol{e}_z \quad \text{при} \quad r = r_1, \\ \boldsymbol{e}_z \cdot \sigma(\boldsymbol{w}_1) = \mu\psi^2 (r^2 - z^2)\boldsymbol{e}_z \quad \text{при} \quad z = \pm L/2 \end{gathered} \tag{8}$$

(L — длина цилиндра). Используя найденное полуобратным методом выражение для добавочного вектора $\boldsymbol{w}_2$, запишем эту задачу в виде

$$\begin{gathered} \overset{0}{\nabla} \cdot \sigma(\boldsymbol{w}_2) + \rho_0 \boldsymbol{k}_* = 0, \\ \boldsymbol{e}_r \cdot \sigma(\boldsymbol{w}_2) = -2z^2\mu\psi^2 \boldsymbol{e}_r - zr\mu\psi^2 \boldsymbol{e}_z \quad \text{при} \quad r = r_1, \\ \boldsymbol{e}_z \cdot \sigma(\boldsymbol{w}_2) = -zr\mu\psi^2 \boldsymbol{e}_r - \mu\psi^2 (z^2 - 1/2 r_1^2)\boldsymbol{e}_z \quad \text{при} \quad z = \pm L/2. \end{gathered} \tag{9}$$

Из (8), (9) следует, что имеет место несовпадение полей напряжений на торцах, которое и является причиной различия результатов.

Отметим, что задачи (8), (9) записаны в координатах отсчетной конфигурации, принятой в [1].

Влияние различий напряжений на торцах на решение. Для оценки влияния граничных условий на величину относительного удлинения рассмотрена задача, представляющая собой разность полученных с использованием описанных выше подходов линейных задач (8), (9) об эффектах второго порядка:

$$\begin{gathered} \overset{0}{\nabla} \cdot \sigma(\boldsymbol{\varsigma}) = 0, \\ \boldsymbol{e}_r \cdot \sigma(\boldsymbol{\varsigma}) = 0, \qquad \boldsymbol{e}_z \cdot \sigma(\boldsymbol{\varsigma}) = -zr\mu\psi^2 \boldsymbol{e}_r - \mu\psi^2 (r^2 - (1/2) r_1^2)\boldsymbol{e}_z \quad \text{при} \quad z = \pm L/2. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $\boldsymbol{\varsigma} = \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1$.

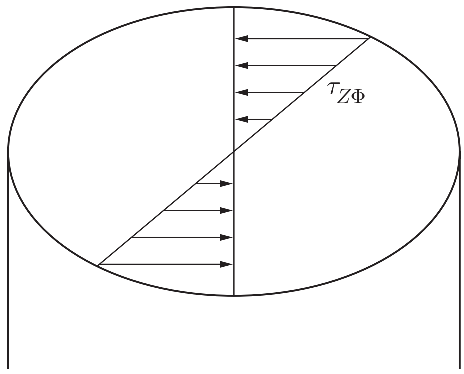

Рис. 1. Распределение касательных напряжений для естественного граничного условия на торце цилиндра

Задача (10) имеет существенный недостаток: граничные условия противоречат условию симметричности тензора напряжений на окружностях, ограничивающих торцы цилиндра, и, следовательно, приводят к несимметричности тензора в некоторой области, охватывающей эти окружности.

Действительно, из (8) следует, что вдоль граничной окружности в силу граничных условий на торце касательные напряжения вычисляются по формуле

$$\tau_{zr} = -\mu\, r_1 \psi^2 L,$$

а в силу граничных условий на боковой поверхности

$$\tau_{rz} \equiv 0.$$

Таким образом, в задаче (8) имеется нарушение симметричности тензора напряжений, причиной которого является допущение о "мертвом" характере нагрузки (3).

Действительно, если в исходной нелинейной постановке при выводе краевой задачи об эффектах второго порядка вместо граничного условия типа (2), (3), означающего "мертвый" характер внешней нагрузки, взять достаточно естественное граничное условие

$$\boldsymbol{f} = \mu r \psi \boldsymbol{e}_\Phi \tag{11}$$

(рис. 1), то после перехода от координат текущей конфигурации к принятым в задаче координатам отсчетной конфигурации эта задача становится симметричной и ее решение совпадает с решением полуобратным методом.

Заметим, что в задаче о растяжении стержня равномерно распределенной нагрузкой подход Лурье и полуобратный метод приводят к одинаковым результатам. Естественное для задачи растяжения предположение о "мертвом" характере нагрузки не является физически оправданным для задачи кручения. Пример нагрузки (11) показывает и математическую несостоятельность такого предположения, приводящего к нарушению симметричности тензора напряжений. Действительно, в этом случае соотношение (3) приводит к граничному условию

$$\boldsymbol{n} \cdot \sigma(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}^0,$$

или в явном виде

$$\boldsymbol{n} \cdot \sigma(\boldsymbol{v}) = \mu r \psi \boldsymbol{e}_\varphi.$$

Однако квадратичные слагаемые в выражении $\boldsymbol{f}\, dO/do$ имеют вид $-\mu r \psi^2 z \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{f}^0$, а граничные условия на торце —

$$\boldsymbol{n} \cdot \sigma(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}_* - \mu\, r \psi^2 z \boldsymbol{e}_r.$$

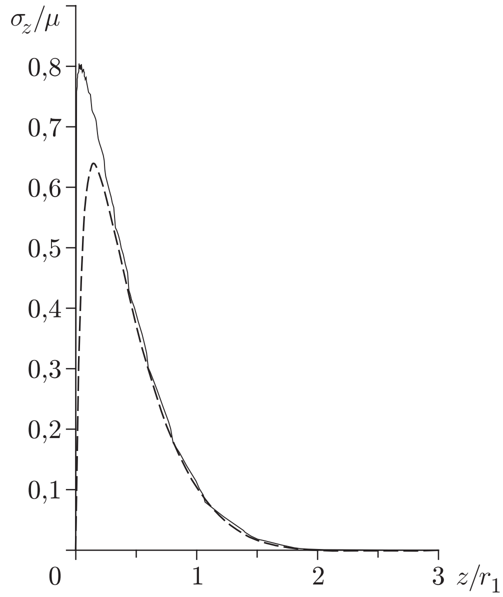

Рис. 2. Распределение нормальных напряжений σ_z по боковой поверхности стержня, построенное методом конечных элементов (сплошная линия) и методом однородных решений (штриховая линия) при $\nu = 0{,}25$, $L/r_1 = 12$, $\psi r_1 = 0{,}3$, $r_1 = 1$

Отсутствующее в граничном условии второе слагаемое является как источником несимметричности, так и причиной различия полученных значений осевого удлинения.

Задача (10) представляет интерес как пример задачи линейной теории упругости, в которой нагрузки имеют нулевые результирующие, но тем не менее вызывают осевое удлинение цилиндра, что на первый взгляд представляется нарушением принципа Сен-Венана. Ниже показано, что это неверно.

Модифицируем задачу, заменив линейное представление касательных напряжений τ_{zr} кусочно-линейным, которое согласовано с требованием симметричности σ:

$$\tau_{zr} = \begin{cases} \beta r, & r \in [0, r_1 - \varepsilon], \\ (\beta/\varepsilon)(r_1 - r)(r_1 - \varepsilon), & r \in [r_1 - \varepsilon, r_1], \end{cases} \qquad \beta = -(L/2)\psi^2\mu.$$

На рис. 2 представлено распределение нормальных напряжений σ_z по боковой поверхности стержня, построенное методом конечных элементов с применением пакета FlexPDE и методом однородных решений [3] с использованием пакета Maple.

При удалении от торца напряжения быстро убывают и практически обращаются в нуль на расстоянии, равном диаметру вала. Это подтверждается расчетами для цилиндров разной длины и означает, что принцип Сен-Венана (отсутствие напряжений в зоне, достаточно далекой от области приложения самоуравновешенной нагрузки) в данной задаче выполняется.

Рассмотрим цилиндр длиной $\tilde{L} = L - 2\delta$, расположенный на расстоянии δ от торцов стержня. На рис. 3 приведена зависимость относительного удлинения $e = \Delta\tilde{L}/\tilde{L}$ этого цилиндра от параметра δ. Используя данную зависимость, определим зону, удлинение которой пренебрежимо мало и, следовательно, относительное удлинение которой в исходной задаче кручения зависит лишь от интегральных граничных условий. Расчеты для цилиндров различной геометрии показывают, что такой зоной является область стержня, для которой $\delta/L > 1/6$. Полученные результаты означают, что принцип Сен-Венана приме-

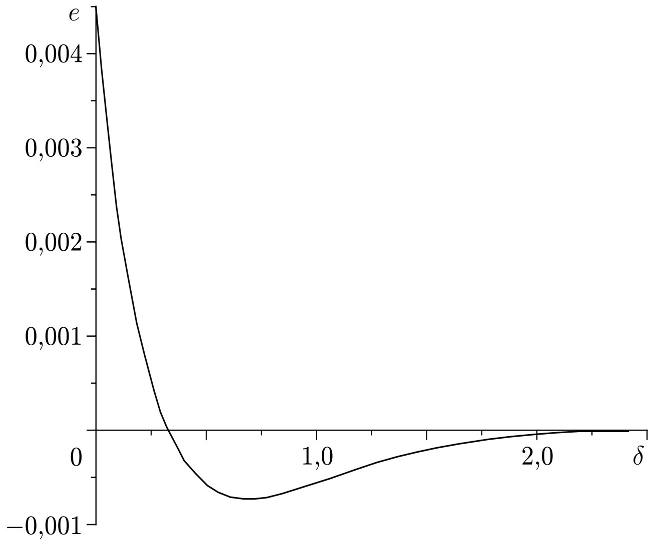

Рис. 3. Зависимость относительного удлинения e от параметра δ

ним и к интегральным деформационным характеристикам, но не для тела в целом, а для его некоторой части, достаточно удаленной от областей приложения нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
2. **Гавриляченко Т. В., Карякин М. И.** Об особенностях нелинейно-упругого поведения сжимаемых тел цилиндрической формы при кручении // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 188–193.
3. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 9/XII 2005 г.