

3. Условия устойчивости стержней с током. При некоторых значениях тока I частота ω^2 , связанная с током и длиной волны уравнением (2.21) для круглых стержней и уравнением (2.64) для стержней эллиптического сечения, становится отрицательной. Это значит, что имеется решение для ω , приводящее к экспоненциальному нарастанию случайных возмущений. Отсюда следует, что, начиная с этих значений тока, прямой проводник с током будет неустойчив.

а) Для сплошного круглого проводника из дисперсионного уравнения (1.5) или из (2.21), положив в нем момент инерции круга $J = 1/4 \pi a^4$, получим следующее выражение для значения тока, при котором проводник теряет устойчивость:

$$I_* > \frac{10a^2k \sqrt{\pi E}}{2 \sqrt{\ln(2/ka) - C - 1/2}} \quad (3.1)$$

б) Для проводника эллиптического сечения из дисперсионного уравнения (2.64) получим следующее выражение для значения тока, при котором проводник теряет устойчивость:

$$I_* > \frac{10k \sqrt{a+b} \sqrt{EJ}}{\sqrt{2b} \sqrt{\ln[4/k(a+b)] - 1/2 a/b - 1/2 C(a+b)/b}} \quad (3.2)$$

При колебаниях сплошного проводника эллиптического сечения вокруг большой оси эллипса $J = 1/4 \pi a b^3$, при колебаниях вокруг малой оси $J = 1/4 \pi a^3 b$.

Пример. Рассмотрим круглый проводник радиуса $a = 0.1$ см. Пусть по нему распространяется изгибное возмущение с длиной волны $L = 10$ см. В другом случае пусть $a = 1$ см и $L = 100$ см. Пусть $E = 10^8$ кг/см². Тогда для первого случая из (3.1) получим, что $I_* > 39$ ка, для второго случая $I_* > 386$ ка.

Поступила 22 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Долбин Н. И. Распространение упругих волн в токопроводящем стержне. ПМТФ, 1962, № 2, стр. 104.
2. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. Изд. иностр. лит., 1955.
3. Леонтович М. А., Шафранов В. Д. Об устойчивости гибкого провода в продольном магнитном поле. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», Изд-во АН СССР, 1958, т. 1.
4. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложения функций Матье. Изд. иностр. лит., 1953.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 2, Физматгиз, 1963.

К ОПИСАНИЮ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ЯДЕР

С. И. Мешков, Г. Н. Пачевская, Т. Д. Шермергор

(Воронеж)

Учет наследственных свойств твердых тел при сдвиговых деформациях может быть проведен при помощи одной из следующих эквивалентных записей интегрального оператора модуля сдвига

$$\mu^* \varepsilon = \mu_0 \varepsilon + \Delta \mu \int_{-\infty}^t \varphi(t-t') \varepsilon'(t') dt', \quad \mu^* \varepsilon = \mu_\infty \varepsilon - \Delta \mu \int_{-\infty}^t f(t-t') \varepsilon(t') dt' \quad (1)$$

$$(\Delta \mu = \mu_\infty - \mu_0) \quad (2)$$

Здесь ε — деформация сдвига, μ_0 — релаксированное, μ_∞ — нерелаксированное значение модуля сдвига, φ и f — функции памяти. Выбор явного вида этих функций, являющихся ядрами интегральных операторов, определяет поведение линейной вязко-упругой среды. Функция φ обладает следующими асимптотическими свойствами: $\varphi(\infty) = 0$ и $\varphi(0) = 1$, первое из которых отражает требование конечности времен релаксаций. В справедливости второго условия легко убедиться, приняв скорость деформации импульсной: $\varepsilon'(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$. Относительно функции $f(t)$ необходимо потребовать $f(\infty) = 0$, однако непосредственно уравнение (2) не накладывает условия конечности $f(t)$ при $t \rightarrow 0$. Многочисленные исследования релаксации напряжений и

упругого последствия в твердых телах показали, что для удовлетворительного описания механической релаксации необходимо рассматривать [1] функции памяти $f(t)$, обладающие особенностями при $t \rightarrow 0$. Наиболее удобными для практических расчетов являются функции памяти, предложенные Ю. Н. Работновым [2]

$$f(t) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (0 < \gamma < 1) \quad (3)$$

Здесь, по сравнению с обычной записью, сделана замена $\beta \rightarrow -\tau^{-\gamma}$ и $\alpha \rightarrow \gamma - 1$.

В случае периодической деформации $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp i\omega t$ ядро Ю. Н. Работнова приводит к следующему выражению для комплексного модуля упругости:

$$\mu(\omega) = \mu_{\infty} - \frac{\mu_{\infty} - \mu_0}{1 + (i\omega\tau)^{\gamma}} \quad (4)$$

Учитывая, что функция памяти $\phi(t)$, определяющая интегральный оператор (1), связана с функцией распределения Φ частот релаксаций $s = 1/\tau$ соотношением $\phi = L\Phi$, где L — оператор одностороннего интегрального преобразования Лапласа, можно показать, что комплексному модулю (4) соответствует следующая функция распределения [3]:

$$F(y) = \frac{\sin 2\psi}{\pi (\operatorname{ch} 2\gamma y + \cos 2\psi)}, \quad y = i\omega \frac{\tau}{\tau_0}, \quad F(y) dy = -\Phi(s) ds, \quad \psi = \frac{1}{2} \pi \gamma \quad (5)$$

где τ_0 — время релаксации, соответствующее максимуму функции распределения логарифмов времен релаксаций $F(y)$.

Соотношения вида (4) и (5) широко используются для приближенного описания диэлектрических потерь [4]. Фазовая диаграмма комплексного модуля упругости $\mu'' = \mu''(\mu')$, описываемая выражением (4), есть дуга окружности, центральный угол которой равен $\pi\gamma$. При $\gamma = 1$ функция памяти Ю. Н. Работнова вырождается в экспоненту, и реологические свойства системы описываются моделью стандартного линейного тела.

Рассмотрим диссипативные характеристики системы, описываемой дробно-экспоненциальной функцией памяти. Для этого подставим в уравнение движения одномерного осциллятора

$$x'' + \omega_{\infty}^2 x - (\omega_{\infty}^2 - \omega_0^2) \int_{-\infty}^t f(t-t') x(t') dt' = P e^{i\omega t} \quad (6)$$

значение $f(t)$ согласно (3). Тогда, принимая $x = A \exp i\omega t$, для комплексной амплитуды получим

$$A = P \left[\omega_{\infty}^2 - \omega^2 - \frac{\omega_{\infty}^2 - \omega_0^2}{1 + (i\omega\tau)^{\gamma}} \right]^{-1} \quad (7)$$

Отсюда, полагая $A/P = a \exp(-i\varphi)$, находим амплитуду стационарного режима и сдвиг фаз

$$a = \left[\frac{\kappa^{\gamma} + \kappa^{-\gamma} + 2 \cos \psi}{R_{\infty}^2 \kappa^{\gamma} + R_0^2 \kappa^{-\gamma} + 2 R_{\infty} R_0 \cos \psi} \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta R \sin \psi}{R_{\infty} \kappa^{\gamma} + R_0 \kappa^{-\gamma} + \Delta R \cos \psi} \quad (8)$$

$$R_0 = \omega_0^2 - \omega^2, \quad R_{\infty} = \omega_{\infty}^2 - \omega^2, \quad \Delta R = R_{\infty} - R_0, \quad \kappa = \omega\tau$$

Можно показать, что выражения (8) эквивалентны соответствующим формулам, полученным в работе [5] иным методом.

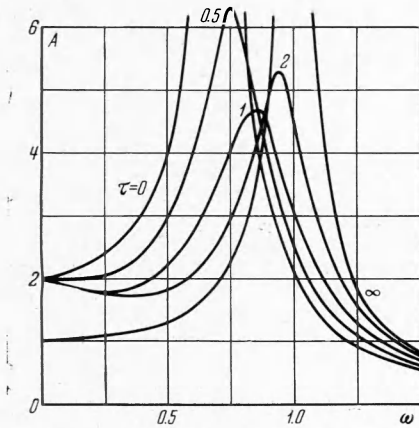
На фиг. 1 представлены резонансные амплитуды для $\mu_0/\mu_{\infty} = 0.5$ и $\gamma = 0.9$, а на фиг. 2 при $\gamma = 1$ (стандартное линейное тело). Цифрами на кривых указаны значения τ . Таким образом, кривая $\tau = \infty$ в обоих случаях описывает колебания без диссипации энергии с нерелаксированной собственной частотой $\omega_{\infty} = 1$, тогда как предельная кривая $\tau = 0$ соответствует релаксированной частоте ω_0 . Эти кривые пересекаются в точке

$$\omega_* = (\omega_{\infty} / \sqrt{2}) (1 + \mu_0 / \mu_{\infty})^{1/2} \quad (9)$$

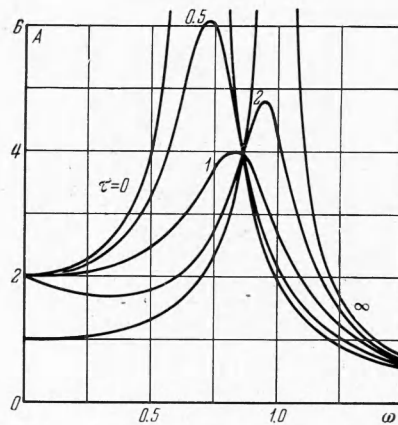
Значения амплитуд в этой точке при произвольных τ определяются выражением

$$a_*^2 = R_{\infty}^{-2} \frac{\kappa_*^{\gamma} + \kappa_*^{-\gamma} + 2 \cos \psi}{\kappa_*^{\gamma} + \kappa_*^{-\gamma} - 2 \cos \psi}$$

Отсюда видно, что для стандартного линейного тела существует оптимальная амплитуда $a_* = R_{\infty}^{-1}$, не зависящая от τ , тогда как при произвольном γ такой оптимальной амплитуды нет.



Фиг. 1



Фиг. 2

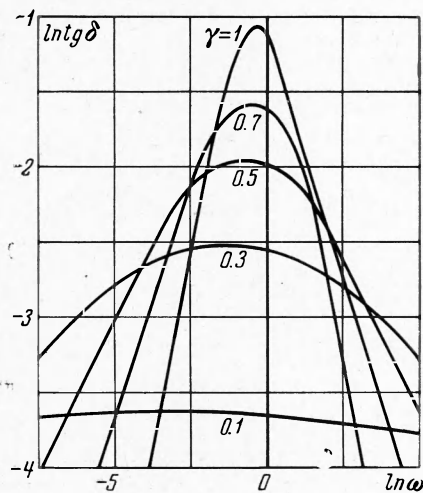
Внутреннее трение среды с функцией памяти [2] Ю. Н. Работнова определим через тангенс угла механических потерь $\operatorname{tg} \delta$. Действительная и мнимая части комплексного модуля упругости равны

$$\mu' = \mu_{\infty} - \frac{\Delta\mu (\kappa^{-\gamma} + \cos \psi)}{\kappa^{\gamma} + \kappa^{-\gamma} + 2 \cos \psi}, \quad \mu'' = \frac{\Delta\mu \sin \psi}{\kappa^{\gamma} + \kappa^{-\gamma} + 2 \cos \psi} \quad (10)$$

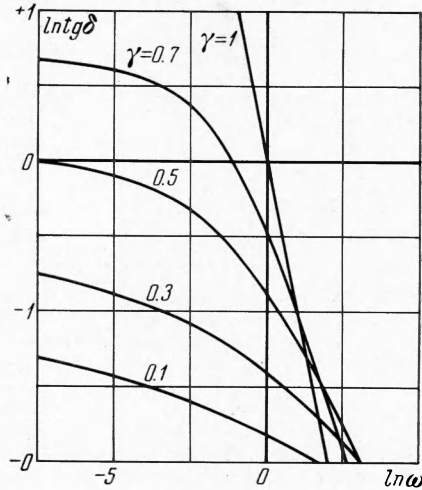
Отсюда

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta\mu \sin \psi}{\mu_{\infty} \kappa^{\gamma} + \mu_0 \kappa^{-\gamma} + (\mu_{\infty} + \mu_0) \cos \psi} \quad (11)$$

Таким образом, тангенс угла механических потерь определяется дефектом модуля, параметром размытия релаксационного спектра γ , а также безразмерной частотой κ .



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 приведены кривые частотной зависимости $\operatorname{tg} \delta$ для $\mu_0 / \mu_{\infty} = 0.5$, а на фиг. 4 — для $\mu_0 / \mu_{\infty} = 0$, причем цифры у кривых указывают значение параметра γ , а $\tau = 1$. При $\gamma = 1$ и $\mu_0 \neq 0$ формула (12) описывает внутреннее трение стандартного линейного тела, а при $\gamma = 1$ и $\mu_0 = 0$ — модели Максвелла. Положение пика внутреннего

трения на оси частот зависит от дефекта модуля и параметра γ . Эта зависимость определяется формулой

$$\Omega\tau = (\mu_0 / \mu_\infty)^{1/2\gamma} \quad (12)$$

из которой следует, что при малых γ (широкий релаксационный спектр) имеет место сильная зависимость частоты Ω от γ . Высота пика внутреннего трения среды равна

$$\operatorname{tg} \delta_m = \frac{\Delta_\mu \sin \psi}{2 + \Delta_\mu \cos \psi}, \quad \Delta_\mu \equiv \frac{\mu_\infty - \mu_0}{\sqrt{\mu_\infty \mu_0}} \quad (13)$$

Отсюда видно, что отношение высот пиков внутреннего трения для двух заданных значений дефектов модуля слабо зависит от параметра размытия релаксационного спектра γ , если $1/2 \Delta_\mu \cos \psi \ll 1$. В случае стандартного линейного тела из формулы (13) следует известное выражение $\operatorname{tg} \delta_m = 1/2 \Delta_\mu$.

Оценивая возможность использования дробно-экспоненциальных функций памяти для описания внутреннего трения твердых тел, следует отметить достаточную эффективность этого метода, если частотная зависимость мнимой части модуля упругости имеет симметричный колоколообразный вид. Для существенно асимметричной функции распределения логарифмов времен релаксаций $F(y)$, что имеет место, например, для полимеров в переходной зоне из высокоэластического в стеклообразное состояние [6], дробно-экспоненциальные функции памяти могут быть полезны для описания низкочастотной асимптотики. При $\mu_0 = 0$ из выражения (12) следует

$$\operatorname{tg} \delta = (\cos \psi + \kappa^\gamma)^{-1} \sin \psi \quad (14)$$

В случае $\gamma = 1$ отсюда получается известное выражение $\operatorname{tg} \delta = 1 / \omega\tau$ внутреннего трения максвелловской среды, широко используемое для описания высокотемпературного фона внутреннего трения металлов [7,8]. Существенное различие внутреннего трения, описываемого моделью Максвелла и выражением (14) при $\gamma \neq 1$, состоит в том, что при $\omega \rightarrow 0$ в первом случае $\operatorname{tg} \delta \rightarrow \infty$, тогда как во втором $\operatorname{tg} \delta \rightarrow \operatorname{tg} \psi$. Это различие иллюстрируется фиг. 4.

Высокочастотная асимптотика выражения (14) дает $\operatorname{tg} \delta = (\omega\tau)^{-\gamma} \sin \psi$, что с точностью до константы совпадает с предложенной в работе [9] эмпирической формулой $\operatorname{tg} \delta = (\omega\tau)^{-\gamma}$ для описания дислокационного фона внутреннего трения металлов. Более сложным является вопрос о возможности использования выражения (14) во всей области частот (температур). Экспериментально обычно измеряется не тангенс угла механических потерь, а логарифмический декремент Δ . При малом затухании $\operatorname{tg} \delta = \Delta / \pi$, однако, если затухание велико, то $\Delta / \pi > \operatorname{tg} \delta$. Поэтому отсутствие участка насыщения на экспериментальных кривых Δ / π в функции температуры вплоть до $\Delta / \pi \sim 1$ не может являться основанием для утверждения о непригодности формулы (14) в области низких частот (высоких температур). Интересно отметить, что в некоторых случаях внутреннее трение, измеренное по обратной амплитуде вынужденных колебаний в резонансе, дает заметное убывание скорости роста $\operatorname{tg} \delta$ вблизи температуры плавления металла [10].

Авторы благодарят Ю. Н. Работнова за обсуждение результатов.

Поступила 18 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Р ж а н и ц ы н А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949.
2. Р а б о т н о в Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
3. Ш е р м е р г о р Т. Д. Расчет функции распределения констант релаксаций по дисперсии действительной части комплексной упругости для упруго-вязких тел. Изв. высш. учебн. завед., Физика, 1961, № 1.
4. Б р а у н В. Диелектрики. Изд. иностр. лит., 1961.
5. Р о з о в с к и й М. И., Р р у ш И. И. Вынужденные колебания упруго-наследственных систем. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 1.
6. Ф е р р и Дж. Вязко-упругие свойства полимеров. Изд. иностр. лит., 1963.
7. М е ш к о в С. И., Ш е р м е р г о р Т. Д. О температурной зависимости внутреннего трения при вынужденных колебаниях максвелловского крутильного маятника. ПМТФ, 1964, № 1.
8. П о с т н и к о в В. С. Температурная зависимость внутреннего трения чистых металлов и сплавов. Усп. физ. наук, 1958, т. 66, № 1.
9. S c h o e s c k G., B i s o g n i E., S h y n e S. The activation Energy of High Temperature Internal Friction. Acta metallurg., 1964, vol. 12, p. 1466.
10. Ш а п о в а л Б. И. О внутреннем трении металлов при высоких температурах. Физ. металлов и металловедение, 1964, т. 18, № 2.