

УДК 539.3

## ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ В ПОЛЕ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

А. О. Ватульян, В. О. Юров

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону, Россия

E-mails: vatulyan@math.rsu.ru, vitja.jurov@yandex.ru

Исследованы волновые процессы в изотропном полом цилиндре, находящемся в поле неоднородных предварительных напряжений. Изучено дисперсионное уравнение задачи, выявлены некоторые особенности структуры дисперсионных кривых в зависимости от вида предварительного напряженного состояния. С использованием метода возмущений получены формулы, описывающие поведение дисперсионных кривых в окрестности радиальных резонансов.

Ключевые слова: предварительные напряжения, волновые процессы, цилиндр, дисперсионное уравнение, численный эксперимент.

DOI: 10.15372/PMTF20160418

**Постановка задачи.** Рассмотрим распространение волн в полом упругом неоднородном цилиндре со свободными границами при наличии поля предварительных напряжений (ПН) различного вида. Волновые процессы в однородных упругих цилиндрических волноводах со свободными граничными поверхностями исследованы достаточно подробно [1, 2]. Наличие поля ПН оказывает влияние на характер распространения волн в теле; задачи при наличии постоянных полей ПН исследованы в [3, 4], однако эти исследования не позволяют оценить влияние поля ПН даже для простейшего предварительного напряженного состояния, соответствующего задаче Ламе [5].

Некоторые способы контроля уровня ПН для элементов конструкций представлены в [6]. В настоящее время существует достаточно большое количество линейризованных моделей, учитывающих ПН [3, 4, 7], однако наиболее широко используется модель, представленная в работе [8] и развитая в [9, 10]. В настоящей работе данная модель используется для описания волновых процессов в цилиндре.

В соответствии с моделью [4] уравнения осесимметричных колебаний запишем в виде

$$\frac{\partial t_r}{\partial r} + \frac{\partial t_{zr}}{\partial z} + \frac{t_r - t_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial t_z}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (1)$$

определяющие соотношения — в виде

$$t_r = \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_r^0 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad t_\varphi = \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u_r}{r} + \sigma_\varphi^0 \frac{u_r}{r},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00196) и в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ на выполнение научно-исследовательской работы (проект № 9.665.2014/К).

$$\begin{aligned}
 t_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \sigma_r^0 \frac{\partial u_z}{\partial r}, & t_{zr} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \sigma_z^0 \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\
 t_z &= \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma_z^0 \frac{\partial u_z}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе, которые могут зависеть от радиальной координаты;  $\sigma_r^0, \sigma_\varphi^0, \sigma_z^0$  — компоненты тензора ПН; границы цилиндра  $r = a, r = b$  полагаются свободными от напряжений.

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде бегущих волн:

$$u_r = V \cos(kz - \omega t), \quad u_z = W \sin(kz - \omega t), \quad t_r = Y \cos(kz - \omega t), \quad t_{rz} = Z \sin(kz - \omega t).$$

Введем следующие безразмерные параметры и переменные:

$$V = bU_1, \quad W = bU_2, \quad Y = \mu_0 T_2, \quad Z = \mu_0 T_1, \quad \varkappa^2 = \frac{\rho \omega^2 b^2}{\mu_0}, \quad bk = \gamma,$$

$$\sigma_r^0 = \mu_0 S_1, \quad \sigma_\varphi^0 = \mu_0 S_2, \quad \sigma_z^0 = \mu_0 S_3, \quad \lambda = \mu_0 g_1, \quad \mu = \mu_0 g_2,$$

$$g_1 + 2g_2 + S_1 = G_1, \quad g_2 + S_1 = G_2, \quad \mu_0 = \max \mu(x), \quad x \in [\xi_0, 1], \quad \xi_0 = \frac{a}{b}.$$

Соответствующую спектральную задачу представим в виде матричного дифференциального уравнения первого порядка

$$X' = AX \tag{3}$$

с граничными условиями

$$T_1(\xi_0) = T_1(1) = T_2(\xi_0) = T_2(1) = 0, \tag{4}$$

где  $X = (U_1, U_2, T_1, T_2)^T$ .

Матрицу коэффициентов  $A$  представим в виде квадратичного пучка  $A = A_0 + \gamma A_1 + \gamma^2 A_2$ , где

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{pmatrix} -g_1/(xG_1) & 0 & 0 & 1/G_1 \\ 0 & 0 & 1/G_2 & 0 \\ 0 & -\varkappa^2 & -1/x & 0 \\ -\varkappa^2 + (g_1 + 2g_2 + S_2)/x^2 - g_1^2/(x^2 G_1) & 0 & 0 & -(2g_2 + S_1)/(xG_1) \end{pmatrix}, \\
 A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -g_1/G_1 & 0 & 0 \\ g_2/G_2 & 0 & 0 & 0 \\ g_1(2g_2 + S_1)/(xG_1) & 0 & 0 & g_1/G_1 \\ 0 & g_1(2g_2 + S_1)/(xG_1) & -g_2/G_2 & 0 \end{pmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 + 2g_2 + S_3 - g_1^2/G_1 & 0 & 0 \\ S_3 + g_2 S_1/G_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что при некоторых видах предварительного напряженного состояния, например соответствующих задаче Ламе, имеет место краевая задача для матричного дифференциального оператора с переменными коэффициентами. Также следует отметить, что всегда существует нулевое решение матричного дифференциального уравнения первого порядка (3) с граничными условиями (4). Наряду с этим известно, что существуют такие пары спектральных параметров  $\gamma$  и  $\varkappa$ , при которых задача имеет ненулевое решение.

Множество таких пар, при которых существует нетривиальное решение, образует дисперсионное множество задачи. Некоторые общие закономерности строения этого множества для полуограниченных тел представлены в [11]. В случае однородного изотропного цилиндра дисперсионное уравнение, известное как уравнение Похгаммера — Кри, записывается через функции Бесселя и достаточно подробно исследовано в [12]: в случае если величины  $S_1, S_2, S_3$  являются постоянными, также возможно получение дисперсионных уравнений в явном виде [3].

Для переменных  $S_1, S_2, S_3$  задачу исследования соответствующего дисперсионного множества можно решить лишь численно, а некоторые особенности его строения определить с помощью асимптотического подхода.

Решение (3), (4) находилось численно с использованием метода пристрелки путем сведения к решению набора задач Коши и решения линейной алгебраической системы. Данная схема позволяет анализировать любые законы изменения компонент тензора ПН, в частности при использовании соответствующих ПН, порожденных решением задачи Ламе [5]. При этом

$$S_1 = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \quad S_2 = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \quad S_3 = \varepsilon \frac{g_1}{g_1 + g_2},$$

где  $\varepsilon = (P/\mu_0)\xi_0^2/(\xi_0^2 - 1)$  — интенсивность внутреннего давления.

**Асимптотический анализ дисперсионных соотношений для случая длинных волн.** Полагая  $\varkappa = t\gamma$ , в области малых значений параметров  $\varkappa$  и  $\gamma$  решение задачи будем искать в виде разложения по малому параметру  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{10} + \gamma U_{11} + \gamma^2 U_{12}, & T_1 &= T_{10} + \gamma T_{11} + \gamma^2 T_{12}, \\ U_2 &= U_{20} + \gamma U_{21} + \gamma^2 U_{22}, & T_2 &= T_{20} + \gamma T_{21} + \gamma^2 T_{22}. \end{aligned}$$

Сформулируем краевые задачи при различных показателях степени  $\gamma$ .

При  $\gamma^0$  задача имеет вид

$$\begin{aligned} U'_{10} &= -\frac{g_1}{xG_1} U_{10} + \frac{1}{G_1} T_{20}, & U'_{20} &= \frac{1}{G_2} T_{10}, \\ T'_{10} &= -\frac{1}{x} T_{10}, & T'_{20} &= \left(\frac{g_1 + 2g_2 + S_2}{x^2} - \frac{g_1^2}{x^2 G_1}\right) U_{10} - \frac{2g_2 + S_1}{xG_1} T_{20}, \\ T_{10}(\xi_0) &= T_{10}(1) = 0, & T_{20}(\xi_0) &= T_{20}(1) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача (5) распадается на две независимые задачи: относительно пары функций  $U_{10}, T_{20}$  и относительно пары функций  $U_{20}, T_{10}$ . Последовательное интегрирование приводит к нетривиальному решению  $U_{10} = T_{10} = T_{20} = 0, U_{20} = 1$ .

При  $\gamma^1$  задача имеет вид

$$\begin{aligned} U'_{11} &= -\frac{g_1}{xG_1} U_{11} + \frac{1}{G_1} T_{21} - \frac{g_1}{G_1}, & U'_{21} &= \frac{1}{G_2} T_{11}, \\ T'_{11} &= -\frac{1}{x} T_{11}, & T'_{21} &= \left(\frac{g_1 + 2g_2 + S_2}{x^2} - \frac{g_1^2}{x^2 G_1}\right) U_{11} - \frac{2g_2 + S_1}{xG_1} T_{21} + \frac{g_1(2g_2 + S_1)}{xG_1}, \\ T_{11}(\xi_0) &= T_{11}(1) = 0, & T_{21}(\xi_0) &= T_{21}(1) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Как и задача для нулевого приближения, задача для первого приближения (6) распадается на две независимые задачи, одна из которых также имеет нетривиальное решение  $T_{11} = 0, U_{21} = 1$ , а решение системы относительно  $U_{11}, T_{21}$  строится численно.

В случае если ПН заданы законами  $S_1 = \varepsilon(1 - 1/x^2)$ ,  $S_2 = \varepsilon(1 + 1/x^2)$  (согласно (5) компонента  $S_3$  не влияет на решение), а параметр  $\varepsilon$  мал, решение данной системы можно также искать в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$U_{11} = U_{110} + \varepsilon U_{111}, \quad T_{21} = T_{210} + \varepsilon T_{211}.$$

Тогда нетрудно получить следующее представление соответствующих решений:

$$U_{11} = -x \frac{g_1}{2(g_1 + g_2)} + \varepsilon \frac{(g_1 + x^2 g_2 + g_2)g_1}{4xg_2(g_1 + g_2)^2} + o(\varepsilon^2), \quad T_{21} = o(\varepsilon^2).$$

Используя решения задач нулевого и первого приближений (5), (6), запишем задачу при  $\gamma^2$ :

$$\begin{aligned} U'_{12} &= -\frac{g_1}{xG_1} U_{12} + \frac{1}{G_1} T_{22} - \frac{g_1}{G_1}, & U'_{22} &= \frac{g_2}{G_2} U_{11} + \frac{1}{G_2} T_{12}, \\ T'_{12} &= \frac{g_1(2g_2 + S_1)}{xG_1} U_{11} - \frac{1}{x} T_{12} + \frac{g_1}{G_1} T_{21} - t^2 + g_1 + 2g_2 + S_3 - \frac{g_1^2}{G_1}, \\ T'_{22} &= \left( \frac{g_1 + 2g_2 + S_2}{x^2} - \frac{g_1^2}{x^2 G_1} \right) U_{12} - \frac{2g_2 + S_1}{xG_1} T_{22} + \frac{g_1(2g_2 + S_1)}{xG_1}, \\ T_{12}(\xi_0) &= T_{12}(1) = 0, & T_{22}(\xi_0) &= T_{22}(1) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Умножая третье уравнение системы (7) на  $x$ , интегрируя его по отрезку  $[\xi_0, 1]$  и учитывая граничные условия, получаем

$$t = \left[ \frac{2}{1 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 x \left( \frac{g_1(2g_2 + S_1)}{xG_1} U_{11} + \frac{g_1}{G_1} T_{21} + g_1 + 2g_2 + S_3 - \frac{g_1^2}{G_1} \right) dx \right]^{1/2}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что первая дисперсионная кривая в окрестности начала координат имеет участок, незначительно отличающийся от прямой.

Применим формулу (8) для трех видов напряженного состояния:

— предварительные напряжения отсутствуют:  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$ ,  $S_3 = 0$ ,  $g_1/(g_1 + g_2) = \text{const}$ , тогда

$$t = \left( \frac{g_2(3g_1 + 2g_2)}{g_1 + g_2} \right)^{1/2}; \tag{9}$$

— продольное растяжение:  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$ ,  $S_3 = \sigma$ ,  $g_1/(g_1 + g_2) = \text{const}$ , тогда

$$t = \left( \frac{g_2(3g_1 + 2g_2)}{g_1 + g_2} + \sigma \right)^{1/2}; \tag{10}$$

— действие внутреннего давления:  $S_1 = \varepsilon(1 - 1/x^2)$ ,  $S_2 = \varepsilon(1 + 1/x^2)$ ,  $S_3 = \varepsilon g_1/(g_1 + g_2)$ ,  $g_1, g_2 = \text{const}$ , тогда

$$t = \left[ \frac{g_2(3g_1 + 2g_2)}{g_1 + g_2} + \left( \frac{g_1^2}{2(g_1 + g_2)^2} + \frac{g_1}{g_1 + g_2} \right) \varepsilon + o(\varepsilon^2) \right]^{1/2}. \tag{11}$$

Из (10), (11) следует, что при наличии ПН любого вида параметр  $t$ , характеризующий стержневую моду колебаний, увеличивается.

**Асимптотический анализ задачи в окрестности радиальных резонансов.**

В случае  $\gamma = 0$  общая задача делится на следующие задачи:

— задача 1:

$$\begin{aligned} T_1' &= -\varkappa^2 U_2 - \frac{T_1}{x}, & U_2' &= \frac{1}{G_2} T_1, \\ T_1(\xi_0) &= T_1(1) = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

— задача 2:

$$\begin{aligned} U_1' &= -\frac{g_1}{xG_1} U_1 + \frac{1}{G_1} T_2, \\ T_2' &= \left( -\varkappa^2 + \frac{g_1 + 2g_2 + S_2}{x^2} - \frac{g_1^2}{x^2 G_1} \right) U_1 - \frac{2g_2 + S_1}{xG_1} T_2, \\ T_2(\xi_0) &= T_2(1) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Системы (12), (13) являются системами с переменными коэффициентами. Коэффициенты, входящие в первую систему, зависят только от компоненты  $S_1$ , коэффициенты второй системы — от  $S_1$  и  $S_2$ . Каждая задача (12), (13) имеет вещественный спектр, и собственным значениям соответствуют начальные точки дисперсионных кривых. Таким образом, в силу аналитичности компонентов дисперсионных множеств [11] получаем два семейства решений. В то время как одна задача имеет нетривиальное решение, другая имеет только нулевое решение. При появлении ПН точки изменяют свое положение. Получим формулы, характеризующие это изменение.

В силу малости параметра  $\varepsilon$ , характеризующего интенсивность ПН, спектральный параметр  $\varkappa$  и решения задач представим в виде разложения

$$\begin{aligned} \varkappa &= \varkappa_0 + \varepsilon \varkappa_1 + o(\varepsilon^2), \\ U_1 &= U_{10} + \varepsilon U_{11} + o(\varepsilon^2), & U_2 &= U_{20} + \varepsilon U_{21} + o(\varepsilon^2), \\ T_1 &= T_{10} + \varepsilon T_{11} + o(\varepsilon^2), & T_2 &= T_{20} + \varepsilon T_{21} + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Из задачи 1, где  $S_1 = \varepsilon S_1^*$ ,  $S_2 = \varepsilon S_2^*$ , имеем:

— при  $\varepsilon^0$

$$\begin{aligned} T_{10}' + \frac{T_{10}}{x} &= -\varkappa_0^2 U_{20}, & U_{20}' &= \frac{1}{g_2} T_{10}, \\ T_{10}(\xi_0) &= T_{10}(1) = 0; \end{aligned}$$

— при  $\varepsilon^1$

$$\begin{aligned} T_{11}' + \frac{T_{11}}{x} &= -2\varkappa_0 \varkappa_1 U_{20} - \varkappa_0^2 U_{21}, & U_{21}' &= \frac{1}{g_2} T_{11} - \frac{S_1^*}{g_2^2} T_{10}, \\ T_{11}(\xi_0) &= T_{11}(1) = 0. \end{aligned}$$

При  $\varepsilon^0$  краевая задача является однородной и из нее определяется счетное множество  $\varkappa_0$ . При  $\varepsilon^1$  задача является неоднородной и из условия ее разрешимости следует некоторое условие, называемое условием ортогональности [13]. С помощью этого условия, не решая соответствующую краевую задачу, можно получить формулу для поправки  $\varkappa_1$

$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa_0}{2} \int_{\xi_0}^1 \frac{S_1^* x T_{10}^2}{g_2^2} dx \left( \int_{\xi_0}^1 \frac{x T_{10}^2}{g_2} dx \right)^{-1}. \quad (14)$$

Пусть  $S_1^* = 1 - 1/x^2$ ,  $g_2 = \text{const}$ , тогда формула (14) принимает вид

$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa_0}{2g_2} \left( 1 - \int_{\xi_0}^1 \frac{T_{10}^2}{x} dx \left( \int_{\xi_0}^1 x T_{10}^2 dx \right)^{-1} \right). \quad (15)$$

Нетрудно показать, что для любой функции  $T_{10}$   $\varkappa_1 \leq 0$ . Это означает, что при наличии ПН уменьшается частота, при которой возникает радиальный резонанс, соответствующий данному семейству решений.

Перейдем к анализу задачи 2. Пусть  $G_{10} = G_1|_{S_1=0}$ . Тогда получаем последовательность задач:

— при  $\varepsilon^0$

$$U'_{10} = -\frac{g_1}{xG_{10}} U_{10} + \frac{1}{G_{10}} T_{20}, \quad T'_{20} = \left( -\varkappa_0^2 + \frac{4g_2(g_1 + g_2)}{x^2 G_{10}} \right) U_{10} - \frac{2g_2}{xG_{10}} T_{20},$$

$$T_{20}(\xi_0) = T_{20}(1) = 0;$$

— при  $\varepsilon^1$

$$U'_{11} = -\frac{g_1}{xG_{10}} U_{11} + \frac{1}{G_{10}} T_{21} + \frac{g_1 S_1^*}{xG_{10}^2} U_{10} - \frac{S_1^*}{G_{10}^2} T_{20},$$

$$T'_{21} = \left( -\varkappa_0^2 + \frac{4g_2(g_1 + g_2)}{x^2 G_{10}} \right) U_{11} - \frac{2g_2}{xG_{10}} T_{21} - 2k_0 k_1 U_{10} + \left( \frac{g_1^2 S_1^*}{x^2 G_{10}^2} + \frac{S_2^*}{x^2} \right) U_{10} - \frac{g_1 S_1^*}{xG_{10}^2} T_{20},$$

$$T_{21}(\xi_0) = T_{21}(1) = 0.$$

Аналогичным образом, используя соотношение ортогональности [13], получаем

$$\varkappa_1 = \int_{\xi_0}^1 \left( \frac{S_1^*}{G_{10}^2} T_{20}^2 + \left( \frac{g_1^2 S_1^*}{x^2 G_{10}^2} + \frac{S_2^*}{x^2} \right) U_{10}^2 - \frac{2g_1 S_1^*}{xG_{10}^2} T_{20} U_{10} \right) x dx \left( 2\varkappa_0 \int_{\xi_0}^1 U_{10}^2 x dx \right)^{-1}. \quad (16)$$

При  $S_1^* > 0$ ,  $S_2^* > 0$   $\varkappa_1 \geq 0$ , при  $S_1^* < 0$ ,  $S_2^* < 0$   $\varkappa_1 \leq 0$ , при  $S_1^* = 1 - 1/x^2$ ,  $S_2^* = 1 + 1/x^2$  знак  $\varkappa_1$  зависит от функций  $T_{20}$ ,  $U_{10}$ , так как под интегралом находится квадратичная форма, не являющаяся знакоопределенной.

**Численный анализ дисперсионных соотношений.** Выполнен ряд вычислительных экспериментов для различных видов ПН, в частности проведено сравнение значения  $t$ , найденного по формулам (9)–(11), со значением, вычисленным с помощью решения краевой задачи (3), (4) методом пристрелки. В расчетах принимались значения  $g_1 = 1,5$ ,  $g_2 = 1,0$ ,  $\xi_0 = 0,76$ , относительная погрешность значений  $t$  обозначена через  $\delta$  (табл. 1–3). Из табл. 1–3 следует, что относительная погрешность  $\delta$  увеличивается с увеличением параметров  $\varkappa$  и  $\gamma$ , а в области  $\gamma \leq 0,1$  она не превышает 0,037 %; таким образом, в указанной области для оценки скорости распространения стержневой моды можно использовать формулы (10), (11).

Проведен численный эксперимент для оценки точности формул (14), (16) при  $\xi_0 = 0,76$ ,  $\varepsilon = 0,001$ ,  $S_1^* = 1 - 1/x^2$ ,  $S_2^* = 1 + 1/x^2$  для различных семейств и мод (табл. 4). Из табл. 4 следует, что у второй моды второго семейства и у четвертой моды первого семейства наблюдается участок аномальной дисперсии, однако это не оказывает существенного влияния на величину  $\varkappa_1$ .

На рис. 1 показано характерное дисперсионное множество задачи при  $g_1 = 1,5$ ,  $g_2 = 1$ ,  $\xi_0 = 0,76$ ,  $S_1 = \varepsilon(1 - 1/x^2)$ ,  $S_2 = \varepsilon(1 + 1/x^2)$ ,  $S_3 = \varepsilon g_1 / (g_1 + g_2)$ ,  $\varepsilon = 0,001$ .

Таблица 1

Значения параметра  $t$ , полученные по формуле (9) и численно, и относительной погрешности  $\delta$  при  $g_1 = 1,5$ ,  $g_2 = 1,0$ ,  $\xi_0 = 0,76$

$\varkappa$	$\gamma$	$t$		$\delta, \%$
		Численный эксперимент	Расчет по формуле (9)	
0,016 12	0,01	1,612 445	1,612 451	0,000 41
0,032 25	0,02	1,612 428		0,001 43
0,048 37	0,03	1,612 400		0,003 20
0,064 49	0,04	1,612 360		0,005 69
0,080 62	0,05	1,612 308		0,008 89
0,161 20	0,10	1,611 870		0,036 10
0,322 00	0,20	1,610 100		0,145 80
0,482 10	0,30	1,606 990		0,338 70
0,640 90	0,40	1,602 270		0,631 40

Таблица 2

Значения параметра  $t$ , полученные по формуле (10) и численно, и относительной погрешности  $\delta$  при  $g_1 = 1,5$ ,  $g_2 = 1,0$ ,  $\xi_0 = 0,76$

$\varkappa$	$\gamma$	$t$		$\delta, \%$
		Численный эксперимент	Расчет по формуле (10)	
0,016 127	0,01	1,612 755	1,612 762	0,000 40
0,032 255	0,02	1,612 738		0,001 43
0,048 381	0,03	1,612 710		0,003 22
0,161 219	0,10	1,612 190		0,035 72

Таблица 3

Значения параметра  $t$ , полученные по формуле (11) и численно, и относительной погрешности  $\delta$  при  $g_1 = 1,5$ ,  $g_2 = 1,0$ ,  $\xi_0 = 0,76$

$\varkappa$	$\gamma$	$t$		$\delta, \%$
		Численный эксперимент	Расчет по формуле (11)	
0,016 128	0,01	1,612 767	1,612 773	0,000 37
0,032 255	0,02	1,612 750		0,001 43
0,048 382	0,03	1,612 720		0,003 21
0,161 220	0,10	1,612 200		0,035 66

Таблица 4

Значения поправок  $\varkappa_1$ , полученные по формулам (15), (16) и численно, и относительной погрешности  $\delta_{\varkappa}$  при  $\xi_0 = 0,76$ ,  $\varepsilon = 0,001$ ,  $S_1^* = 1 - 1/x^2$ ,  $S_2^* = 1 + 1/x^2$

Номер семейства	$\varkappa$		$\varkappa_1$		$\delta_{\varkappa}, \%$
	Без учета ПН	С учетом ПН	Численный эксперимент	Расчет по формулам (15), (16)	
2	1,937 031 7	1,937 806 1	0,7744	0,7746	0,026
1	13,127 181 6	13,125 207 1	-1,9745	-1,9752	0,034
2	24,573 777 9	24,572 757 8	-1,0201	-1,0200	0,001
1	26,198 724 3	26,194 637 1	-4,0872	-4,0884	0,029
1	39,282 454 8	39,276 284 7	-6,1701	-6,1718	0,027
2	49,020 251 7	49,018 084 0	-2,1677	-2,1676	0,005

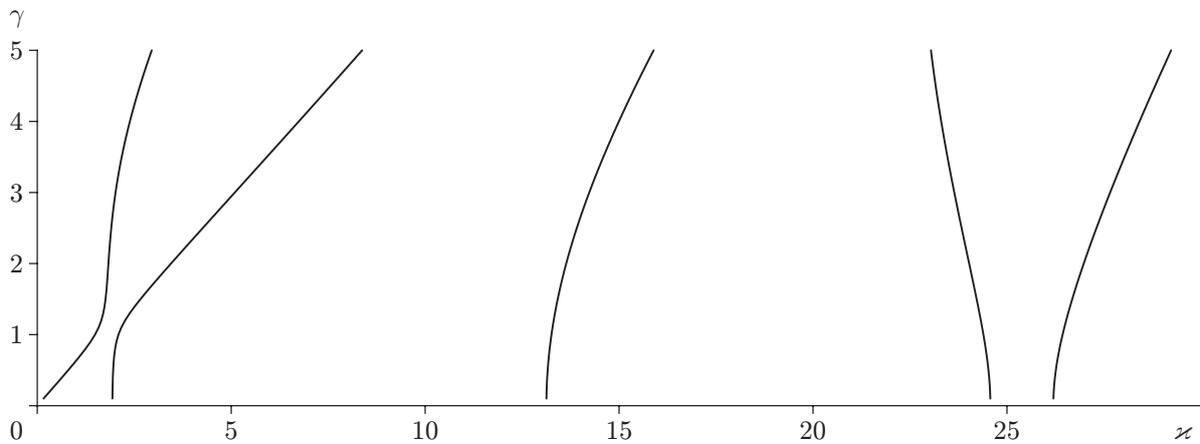


Рис. 1. Характерное дисперсионное множество задачи при  $g_1 = 1,5$ ,  $g_2 = 1,0$ ,  $\xi_0 = 0,76$ ,  $S_1 = \varepsilon(1 - 1/x^2)$ ,  $S_2 = \varepsilon(1 + 1/x^2)$ ,  $S_3 = \varepsilon g_1/(g_1 + g_2)$ ,  $\varepsilon = 0,001$

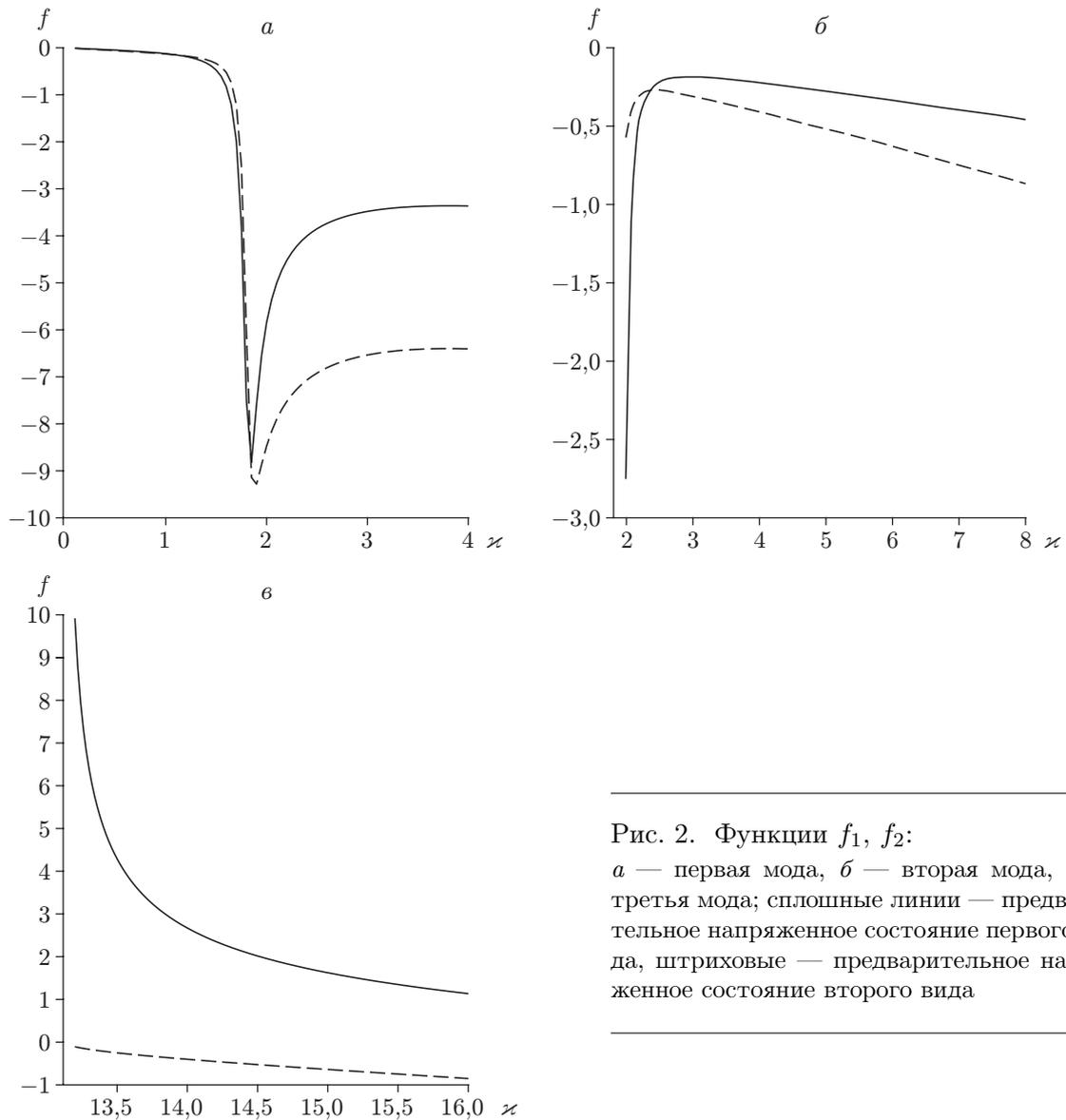


Рис. 2. Функции  $f_1, f_2$ :  
*a* — первая мода, *б* — вторая мода, *в* — третья мода; сплошные линии — предварительное напряженное состояние первого вида, штриховые — предварительное напряженное состояние второго вида

Выполним численный анализ дисперсионных соотношений при наличии ПН. Обозначим зависимость для некоторой моды без ПН через  $\gamma_1(\varkappa)$ , зависимость для той же моды при наличии ПН — через  $\gamma_2(\varkappa)$ . Проанализируем функции  $\gamma_1, \gamma_2$  для каждой моды. Рассмотрим два вида предварительного напряженного состояния: 1)  $S_1 = \varepsilon(1 - 1/x^2)$ ,  $S_2 = \varepsilon(1 + 1/x^2)$ ,  $S_3 = \varepsilon g_1/(g_1 + g_2)$ ; 2)  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$ ,  $S_3 = \varepsilon$ .

Найдем области, которые наиболее подвержены влиянию ПН. Для этого, например, будем искать области, для которых выполняется неравенство  $|(\gamma_2 - \gamma_1)/\varepsilon| \geq 1$ . Введем функцию  $f = (\gamma_2 - \gamma_1)/\varepsilon$ . На рис. 2 представлены функции  $f_1, f_2$  для первых трех мод.

На рис. 2,а видно, что функции  $f_1, f_2$  для первой моды на участке  $[0; 1,5]$  являются убывающими и различаются незначительно, на некоторых участках они убывают по линейному закону. Вблизи точки  $\varkappa = 1,8$  функции испытывают конечный скачок, который вызван особенностью формы дисперсионной кривой. Далее исследуемые функции различаются более существенно. Заметим, что в этом случае поведение функций  $f_1, f_2$  качественно одинаковое.

Вторая мода более чувствительна к виду предварительного напряженного состояния (см. рис. 2,б).

Поведение функций  $f_1, f_2$  для третьей моды колебаний (см. рис. 2,в) различается, причем  $|f_1| > 1$ ,  $|f_2| < 1$ . Обе функции являются убывающими,  $|f_1|$  имеет максимальное значение в начале рассматриваемого интервала,  $|f_2|$  — в конце интервала.

**Заключение.** Изучено дисперсионное соотношение задачи для цилиндрического волновода при наличии предварительных напряжений. Проведен анализ распространения стоячих волн, позволивший установить, что для любых законов изменения предварительных напряжений существует два семейства дисперсионных кривых, различающихся кинематикой движения. Найден участки аномальной дисперсии. Проведено исследование, позволившее установить степень влияния предварительных напряжений на структуру компонентов дисперсионного множества и скорости распространяющихся мод. Независимо от переменных параметров системы всегда имеется кривая, выходящая из начала координат и характеризующая в низкочастотном диапазоне стержневую моду колебаний. Остальные дисперсионные кривые пересекают ось  $\gamma = 0$  под прямым углом.

Проведенное исследование свидетельствует о том, что наиболее чувствительными к виду предварительного напряженного состояния являются вторая и третья моды; это может служить основой для их идентификации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Pochhammer L.** Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine angew. Math. 1876. Bd 81. S. 324–336.
2. **Chree C.** Longitudinal vibrations of a circular bar // J. Quart. Pure Appl. Math. 1886. V. 21. P. 287–298.
3. **Гузь А. Н.** Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. Т. 2. Закономерности распространения. Киев: Наук. думка, 1986.
4. **Гузь А. Н.** Введение в акустоупругость / А. Н. Гузь, Ф. Г. Махорт, О. И. Гуца. Киев: Наук. думка, 1977.
5. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
6. **Углов А. Л.** Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / А. Л. Углов, В. И. Ерофеев, А. Н. Смирнов. М.: Наука, 2009.
7. **Калинчук В. В.** Динамика поверхности неоднородных сред / В. В. Калинчук, Т. И. Белянкова. М.: Физматлит, 2009.

8. **Trefftz E.** Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts // *Z. angew. Math. Mech.* 1933. Bd 12, N 2. S. 160–165.
9. **Bazant Z. P.** A correlation study of formulations of incremental deformation and stability of continuous bodies // *J. Appl. Mech.* 1971. V. 38. P. 919–928.
10. **Ватульян А. О., Недин Р. Д.** Модели предварительного напряженного состояния и принципы его идентификации // *Итоги науки. Юг России: Мат. форум. Т. 8, ч. 2. Исследования по дифференциальным уравнениям, математическому моделированию и проблемам математического образования. Владикавказ: Южный мат. ин-т Владикавказ. науч. центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия — Алания, 2014. С. 32–52.*
11. **Ворович И. И.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979.
12. **Гринченко В. Т.** Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. Киев: Наук. думка, 1981.
13. **Найфе А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

*Поступила в редакцию 4/XII 2014 г.,  
в окончательном варианте — 26/III 2015 г.*

---