чтобы при $\mathrm{Re} \to 0$ $r \to \infty$, а следовательно, при ползущем течении возмущение распространится на большое расстояние от обтекаемого тела, т. е. математически подтверждается хорошо известный факт в теории вязких течений.

При $\mathrm{Re} \gg 1$ течение быстро переходит в потенциальное везде, кроме области вблизи поверхности, так как при $r \to 1$ один из множителей в показателе экспоненты $\left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{r^2}\right)$ стремится к нулю. В результате, как бы велико не было значение Re, всегда найдется такая окрестность вблизи поверхности, где показатель экспоненты $\frac{\mathrm{Re}}{2}\left(r - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{r^2}\right) \times$ $\times(\cos\theta - 1)$ будет мал, и в этой области сосредоточится все вязкостное возмущение, что соответствует физической модели течения в теории пограничного слоя.

На основе анализа можно сделать вывод, что рассмотренный метод принципиально позволяет получить приближенные решения полных уравнений Навье — Стокса для достаточно большого диапазона течений, распространяя полученное равнопригодное решение на область более высоких Re методом последовательных приближений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
2. **Whitehead A. N.** Second approximations to viscous fluid motion // Quart. J. Math.— 1889.— V. 23.— P. 143.
3. **Proudman I., Pearson J. R. A.** Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder // J. Fluid Mech.— 1957.— V. 2.— P. 237.
4. **Швец М. Е.** О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // ПММ.— 1949.— Т. 13, вып. 3.
5. **Jenson V. G.** Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers (Re ~ 40) // Proc. Roy. Soc. Ser. A.— 1959.— N 249.— P. 346.
6. **Taneda S.** Studies on wake vortices. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers // Rep./Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ.— 1956.— N 4.— P. 99.


*Поступила 4/VII 1986 г.*

---

УДК 532.65; 532.543

# СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ РУЧЕЙКА ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УСКОРЕНИЯ

*А. Ф. Тальдрик, О. П. Черняев*

(*Москва*)

Рассматривается зависимость решения для стационарного течения ручейка вязкой несжимаемой жидкости вдоль твердой плоской стенки от следующих независимых первичных параметров: плотности $\rho$ (кг/м$^3$), кинематической вязкости $\nu$ (м$^2$/с) и поверхностного натяжения $\sigma$ (кг/с$^2$) жидкости, краевого угла смачивания $\alpha$ на границе трех сред, ширины основания ручейка $H$ (м) (или расхода в ручеек $Q$ (м$^3$/с)), ускорения поля $a$ (м/с$^2$), направленного вдоль стенки. Сделаны следующие предположения: не равна нулю только составляющая скорости $v$ (м/с), направленная по $a$.

Поперечное сечение ручейка представляет собой область Г, ограниченную отрезком длины $H$ со стороны стенки и дугой окружности на свободной поверхности ручейка. Дуга окружности и отрезок пересекаются под углом, равным $\alpha$. Внешнее давление $p_0$ постоянно, касательными напряжениями на свободной поверхности со стороны внешней среды пренебрегаем [1, 2].

В области Г ищем распределение скоростей $v$, в частности максимальную скорость, расход $Q$, потоки импульса $I$ и кинетической энергии $G$

в зависимости от перечисленных выше аргументов. Уравнения баланса импульса и неразрывности для несжимаемой ньютоновской жидкости имеют вид

$$(1)\qquad (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p/\rho + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{a},\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0,\ \nu = \mu/\rho.$$

При сделанных выше предположениях в системе координат, где ось $OZ$ направлена по $\mathbf{a}$, (1) приводится к виду $-\nabla_z p/\rho + \nu\Delta v + a = 0$, так как $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = 0$ в силу предположения, что $v_x = v_y = 0$, а $\partial v/\partial z = 0$ в силу $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$.

На стенке выполняется условие $v = 0$, а на свободной поверхности ручейка — условие баланса импульса [3]

$$(2)\qquad [-p\delta_{ij} + \mu(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)]_1^2 n_j = -\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)n_i,$$

где нормаль $n_i$ направлена из ручейка; скобка $[\ ]_1^2$ обозначает разность величин во внешней среде и в ручейке. В цилиндрической системе координат, которая выбирается так, чтобы одна из координатных поверхностей совпадала со свободной поверхностью ручейка, отличны от нуля только компоненты тензора вязких напряжений $\tau_{13} = \tau_{31} = \mu\partial v/\partial r$ и $\tau_{23} = \tau_{32} = (\mu/r)\partial v/\partial\varphi$. Проекция уравнения (2) на нормаль $n_i$ дает $-p + p_0 = -\sigma/R$, так как $\tau_{ij}n_j n_i = 0$ ($R$ — радиус кривизны свободной поверхности ручейка). Проекция уравнения (2) на ось $OZ$ дает $\mu\partial v/\partial r = 0$.

Таким образом, в области $\Gamma$ $p = p_0 + \sigma/R$ и $\nabla p = 0$, т. е. $\nu\Delta v + a = 0$. На стенке $v = 0$, на свободной поверхности $\partial v/\partial n = 0$.

Возьмем в качестве масштабов $H$ и $a/\nu$, тогда

$$(3)\qquad v = (a/\nu)H^2 UH(\alpha),\ Q = (a/\nu)H^4 QH(\alpha),$$

$$I = \rho\frac{a^2}{\nu^2}H^6 IH(\alpha),\quad G = \rho\frac{a^3}{2\nu^3}H^8 GH(\alpha),$$

где $UH(\alpha)$, $QH(\alpha)$, $IH(\alpha)$, $GH(\alpha)$ — безразмерные скорость, расход, потоки импульса и кинетической энергии в ручейке с единичным основанием.

Увеличим безразмерную область $\Gamma$ с единичным основанием в 2 раза и расположим ее в комплексной плоскости $z = (x, y)$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ так, чтобы угловые точки ее находились в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, а середина отрезка — в начале координат. Введем новую переменную $u = 4UH$, тогда $\Delta u = -1$ в области $\Gamma$.

Представим решение $u$ как сумму частного решения $-y^2/2$ и общего решения $v$: $u = -y^2/2 + v$. Тогда в области $\Gamma$ $\Delta v = 0$, причем $v = 0$ на отрезке $[-1, 1]$ действительной оси. На дуге

$$(4)\qquad \partial v/\partial n = [-\operatorname{grad}(-y^2/2)]\mathbf{n} = y(y\sin\alpha + \cos\alpha),$$

так как $\mathbf{n} = (x\sin\alpha,\ y\sin\alpha + \cos\alpha)$.

Чтобы найти гармоническую функцию $v$ в области $\Gamma$ со смешанными граничными условиями (4), продолжим $v$ аналитически на область $\Gamma'$, симметричную области $\Gamma$ относительно отрезка $[-1, 1]$ действительной оси с условием $v(x, -y) = -v(x, y)$. Это можно сделать [4], так как $v(x, y) = 0$ при $y = 0$, а производные непрерывны на отрезке $[-1, 1]$. В областях $\Gamma'$ и $\Gamma$ граничные условия связаны соотношением

$$(5)\qquad \partial v(x, -y)/\partial n = -\partial v(x, y)/\partial n = y(y\sin\alpha + \cos\alpha),\ y \geqslant 0.$$

Нахождение гармонической функции в области $\Gamma + \Gamma'$ с условиями (5) эквивалентно нахождению конформного отображения области $\Gamma + \Gamma'$ на какую-либо каноническую область, для которой метод решения известен, если заданы нормальные производные гармонической функции на границе канонической области [4].

Будем искать конформное преобразование единичного круга из комплексной области $w$ на область $\Gamma + \Gamma'$ в комплексной плоскости $z$. Преобразование $z_1 = (1 + w)/(1 - w)$ переводит область внутри единичного круга из плоскости $w$ в правую полуплоскость в $z_1$. Преобразование $z_2 = z_1^c$, где $c = 2\alpha/\pi$, переводит полуплоскость из $z_1$ в область, ограниченную выходящими из начала координат лучами с углами $-\alpha$ и $\alpha$, в плоскости $z_2$. Преобразование $z_3 = (z_2 - 1)/(z_2 + 1)$ переводит угол, образованный лучами, из плоскости $z_2$ на область $\Gamma + \Gamma'$ в плоскости $z$. Наконец, преобразование

$$z(w) = z_3\{z_2[z_1(w)]\} = \frac{(1+w)^c - (1-w)^c}{(1+w)^c + (1-w)^c} \tag{6}$$

переводит единичный круг из плоскости $w$ на область $\Gamma + \Gamma'$ в плоскости $z$. Точки действительной оси $-1$, 0, 1 остаются на месте. Отрезок мнимой оси от 0 до $i$ переходит в высоту ручейка. Преобразование (6), за исключением угловых точек, конформно, значит, $\Delta v = 0$ также и в круге $|w| < 1$.

Введем на границе единичного круга параметр $w = e^{i\tau}$. Преобразование (6) определяет на границе области $\Gamma + \Gamma'$ зависимость $z$, $y$ и $\partial v/\partial n$ от параметра $\tau$:

$$z(\tau) = \left[e^{i\alpha} - \left(\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)^c\right] \Big/ \left[e^{i\alpha} + \left(\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)^c\right]; \tag{7}$$

$$y(\tau) = 2\sin\alpha\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right)^c + 2 + \left(\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)^c\right]^{-1}, \quad \partial v/\partial n = y(y\sin\alpha + \cos\alpha). \tag{8}$$

Известно [4], что при конформном преобразовании $\partial v(w)/\partial n = \partial v(z)/\partial n \times |\partial z/\partial w|$, где $w = e^{i\tau}$, а $z$ определяется (7):

$$\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right| = \frac{4c(1+w)^{c-1}(1-w)^{c-1}}{[(1+w)^c + (1-w)^c]^2} = c\left\{\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)^c + 2\cos\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right)^c\right]\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2}\right\}^{-1}.$$

Решение задачи $v(w)$ на единичном круге, когда задана нормальная производная $\partial v/\partial n(e^{i\tau})$ на границе, находим по формуле Дини [4]

$$v(w) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial n}(e^{i\tau}) \ln|e^{i\tau} - w|\, d\tau$$

($|e^{i\tau} - w|$ — расстояние от точки $w$ до переменной точки на границе круга).

Общее решение для $u$ в верхней половине единичного круга в плоскости $w$ примет вид

$$u(w) = -y^2/2 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{\partial z}{\partial w}\right| \frac{\partial v(z)}{\partial n} \ln|e^{i\tau} - w|\, d\tau.$$

Расход $QH(\alpha)$, потоки импульса $IH(\alpha)$ и кинетической энергии $GH(\alpha)$ через сечение ручейка определяются выражениями

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^\pi u^k \left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2 r\,dr\,d\varphi, \quad k = 1, 2, 3 \tag{9}$$

$\left(\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2 r\,dr\,d\varphi\right.$ — площадь элемента в плоскости $\left.z\right)$.

Была составлена программа, и на ЭВМ ЕС-1040 произведен расчет $QH(\alpha)$, $IH(\alpha)$, $GH(\alpha)$ и $UHM$ в зависимости от $\alpha$ (табл. 1).

При решении поставленной задачи в безразмерном виде в качестве масштабов выбирались $a$, $\nu$ и $H$. Однако вместо $H$ можно задать $Q$, а $H$ станет неизвестной. Тогда из (3) получаем $Q = \frac{a}{\nu} H^4 QH(\alpha)$ или $H = \left(\frac{Q\nu}{a}\right)^{1/4} [QH(\alpha)]^{-1/4} = \left(\frac{Q\nu}{a}\right)^{1/4} HQ(\alpha)$, где $(Q\nu/a)^{1/4}$ — масштаб длины;

Таблица 1

| $\alpha$, град | $QH$ | $IH$ | $GH$ | $UHM$ |
|---|---|---|---|---|
| 30 | $3{,}2\cdot10^{-4}$ | $1{,}9\cdot10^{-6}$ | $1{,}3\cdot10^{-8}$ | $8{,}1\cdot10^{-3}$ |
| 60 | $3{,}9\cdot10^{-3}$ | $9{,}7\cdot10^{-5}$ | $2{,}6\cdot10^{-6}$ | $3{,}4\cdot10^{-2}$ |
| 90 | $2{,}4\cdot10^{-2}$ | $1{,}8\cdot10^{-3}$ | $1{,}5\cdot10^{-4}$ | $9{,}4\cdot10^{-2}$ |
| 120 | 0,19 | $4{,}8\cdot10^{-2}$ | $1{,}3\cdot10^{-2}$ | 0,29 |
| 150 | 5,3 | 8,6 | 14,4 | 1,55 |

$HQ(\alpha) = [QH(\alpha)]^{-1/4}$ — безразмерная ширина основания ручейка. Аналогично из (3) и (9) имеем

$$U = \left(\frac{Qa}{\nu}\right)^{1/2} UQ(\alpha), \quad I = \rho\left(\frac{Q^3a}{\nu}\right)^{1/2} IQ(\alpha), \quad G = \rho\frac{Q^2a}{2\nu} GQ(\alpha).$$

Здесь $\left(\frac{Qa}{\nu}\right)^{1/2}$, $\rho\left(\frac{Q^3a}{\nu}\right)^{1/2}$, $\rho\frac{Q^2a}{2\nu}$ — масштабы скорости, потоков импульса и кинетической энергии; $UQ(\alpha)$, $IQ(\alpha)$, $GQ(\alpha)$ — соответствующие им безразмерные параметры (табл. 2).

В табл. 1 параметры при варьировании краевого угла смачивания от 30 до 150° изменяются на несколько порядков, а в табл. 2 в пределах одного порядка, отличаясь от единицы не более чем на порядок. Значит, можно считать, что $(Qa/\nu)^{1/4}$, $\rho(Q^3a/\nu)^{1/2}$, $\rho Q^2a/2\nu$ определяют масштабы скорости, потоков импульса и кинетической энергии в ручейке в широком интервале изменения $\alpha$.

В качестве примера рассчитаем параметры течения ручейков воды по вертикальной стенке и ручейков расплава никеля на быстро вращающемся горизонтальном диске. Для воды $\rho = 10^3$ кг/м³, $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $a = 9{,}8$ м/с², $Q = 10^{-6}$ м³/с, для никеля при температуре 1800 K $\nu = 6{,}4\cdot10^{-7}$ м²/с, радиус диска $10^{-1}$ м, количество оборотов 104,7 рад/с, $Q = 10^{-9}$ м³/с (табл. 3). Отношение кориолисовых ускорений к центробежным оценим из

$$\frac{2\omega v}{\omega^2 r} = \frac{2v}{\omega r} = 2\left(\frac{Qa}{\nu}\right)^{1/2}\frac{UQ(\alpha)}{\omega r} = 2\left(\frac{Q}{\nu r}\right)^{1/2} UQ(\alpha), \quad a = \omega^2 r.$$

Максимум отношения $2v/\omega r = 0{,}16$ достигается при $\alpha = 150°$. В [1, 2, 5, 6] двумерное поле скоростей ищется в форме $v = v[y/\delta(x)]$, где параболический профиль берется из решения одномерной задачи для пленки. При таком выборе поля скоростей не соблюдается граничное условие на свободной поверхности ручейка.

Таблица 2

| $\alpha$, град | $HQ$ | $IQ$ | $GQ$ | $UHM$ |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 7,4 | 0,33 | 0,12 | 0,45 |
| 60 | 4,0 | 0,39 | 0,17 | 0,53 |
| 90 | 2,5 | 0,47 | 0,25 | 0,60 |
| 120 | 1,5 | 0,57 | 0,35 | 0,66 |
| 150 | 0,66 | 0,70 | 0,51 | 0,67 |

Таблица 3

| $\alpha$, град | $H\cdot10^3$, м | $U$, м/с | $H\cdot10^5$, м | $U$, м/с |
|---|---|---|---|---|
| | *Вода* | | *Никель* | |
| 30 | 4,2 | 1,25 | 21 | 0,59 |
| 60 | 2,3 | 1,7 | 11 | 0,69 |
| 90 | 1,4 | 1,9 | 6,9 | 0,79 |
| 120 | 0,84 | 2,1 | 4,1 | 0,86 |
| 150 | 0,37 | 2,1 | 1,8 | 0,86 |

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Doniec A.** Laminar flow a liquid down a vertical solid surface. Maximum thickness of liquid rivulet // Physicochemical hydrodynamics.— 1984.— V. 5, N 2.
2. **Gulkin I. B., Davis S. H.** Meandering of water rivulets // Amer. Inst. Chem. Engng J.— 1984.— V. 30, N 2.
3. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред.— М.: Тех.-теор. лит., 1953.

4. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1965.
5. **Kern J.** Zur Hydrodynamik der Rinnsale // Verfahrenstechnik.— 1969.— N 10.
6. **Towell G. D., Rothfeld L. B.** Hydrodynamics of rivulet flow // Amer. Inst. Chem. Engng J.— 1966.— V. 12, N 5.

*Поступила 21/VIII 1986 г.*

---

УДК 551.466

# РАСЧЕТ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ МАКСИМАЛЬНЫХ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ СО СРЕДНИМИ СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

*В. А. Боровиков, Е. С. Левченко*

(*Москва*)

Распространение внутренних гравитационных волн, возбуждаемых в слое $-H < z < 0$, $-\infty < x$, $y < \infty$ стратифицированной жидкости со средними горизонтальными сдвиговыми течениями, описывается [1] уравнением

$$(1)\qquad Lu(t,\ x,\ y,\ z,\ z_0) = Q(t,\ x,\ y,\ z,\ z_0),\ u = 0(z = 0,\ -H),$$

где оператор

$$L = \frac{D^2}{Dt^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] - \frac{D}{Dt}\left[U''_{zz}\frac{\partial}{\partial x} + V''_{zz}\frac{\partial}{\partial y}\right] + N^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right];$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y};$$

$U = U(z)$, $V = V(z)$ — компоненты скорости среднего течения $\mathbf{U} = \{U,\ V,\ 0\}$ на горизонте $z$; $N(z)$ — частота Брента — Вяйсяля. Используется приближение Буссинеска и твердой крышки. Предполагается выполненным условие устойчивости Майлса $\mathrm{Ri}(z) = N^2(z)/[(U'_z)^2 + (V'_z)^2] > 1/4$, гарантирующее, что внутренние волны не могут обмениваться со средними сдвиговыми течениями энергией.

В [2] найдена функция Грина граничной задачи (1), т. е. ее решение $\Gamma(t,\ x,\ y,\ z,\ z_0)$ при $Q = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)$, тождественно обращающееся в нуль при $t < 0$, и определена асимптотика $\Gamma$ при $t \to \infty$ и фиксированных $x/t = U_x$, $y/t = U_y$. Чтобы найти $\Gamma$, использовалось преобразование Фурье по переменным $t$, $x$, $y$, сводящее задачу к определению вертикальной функции Грина $G(\omega,\ \lambda,\ \mu,\ z,\ z_0)$: $L_0\left(\omega,\ \lambda,\ \mu,\ z,\ \frac{\partial}{\partial z}\right)G = (\omega - f)^2\,\delta(z - z_0)$, $G = 0$ $(z = 0,\ -H)$. Здесь $L_0$ — оператор Тейлора — Гольдштейна: $L_0 u = (\omega - f)^2 u''_{zz} + [k^2(N^2 - (\omega - f)^2) + f''_{zz}(\omega - f)]\,u$; $f = f(z) = \lambda U(z) + \mu V(z)$; $k^2 = \lambda^2 + \mu^2$. Функция $G$ как функция $\omega$ имеет простые полюсы при вещественных $\omega = \omega_n(\lambda,\ \mu)$, являющихся собственными числами граничной задачи

$$(2)\qquad L_0\left(\omega_n,\ \lambda,\ \mu,\ z,\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_n = 0,\quad \varphi_n = 0\ (z = 0,\ -H),$$

и разрез на вещественной оси $\omega$, соединяющий точки ветвления $\omega = \min\limits_z f$ и $\omega = \max\limits_z f$.

Переход посредством обратного преобразования Фурье к функции $\Gamma$ дает выражение

$$(3)\qquad \Gamma = \sum_n \Gamma_n + \Gamma_H,$$

где $\Gamma_n$ соответствует вкладу от $n$-го полюса $\omega = \omega_n(\lambda,\ \mu)$ функции $G$, а