УДК 532.135

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Рассматриваются неустановившиеся плоскопараллельные движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла с постоянным временем релаксации. Система уравнений движения среды и реологическое соотношение допускают расширенную группу Галилея. Изучается класс частично инвариантных решений этой системы относительно подгруппы указанной группы, порожденной переносом и галилеевым переносом вдоль одной из осей координат. Инвариантные решения системы отсутствуют, а множество частично инвариантных решений оказывается весьма узким. Предложен способ расширения множества точных решений, позволяющий найти решения с нетривиальной зависимостью элементов тензора напряжений от пространственных координат. Среди полученных таким путем решений с точки зрения физики особый интерес представляют решения, описывающие деформацию вязкоупругой полосы со свободными границами.

Ключевые слова: вязкоупругая среда, несжимаемость, соотношение Максвелла, группа Галилея, частично инвариантное решение, движение со свободной границей.

Введение. Стимулом для написания данной работы послужили работы [1–3], в которых показано, что обычные жидкости, подобные воде, обнаруживают вязкоупругие свойства в условиях, когда определяющими факторами являются вязкость и сдвиговая упругость, а сжимаемостью среды и температурными неоднородностями можно пренебречь. В качестве модели такой среды в [3] предложена математическая модель несжимаемой среды Максвелла с постоянным временем релаксации. Насколько известно автору данной работы, систематическое изучение свойств такой модели до сих пор не проводилось, в то время как теория сжимаемой вязкоупругой среды Максвелла достаточно хорошо развита [4, 5].

Как известно, предельный переход от слабосжимаемой среды к несжимаемой является нетривиальным даже в линейной теории упругости. В случае тела Максвелла ситуация осложняется тем, что система уравнений движения содержит большее число искомых функций. Кроме того, предельная система, соответствующая несжимаемому телу, утрачивает такое важное свойство, как гиперболичность, и вообще не имеет определенного типа. В такой ситуации особую важность приобретает получение точных решений, зависящих как минимум от двух переменных. Решению этой задачи посвящена данная работа.

1. Математическая модель. Ниже t обозначает время; u, v — проекции вектора скорости $\boldsymbol{v}$ на оси x, y декартовой системы координат; p — давление; $P_{xx} = A$, $P_{xy} = P_{yx} = B$, $P_{yy} = C$ — элементы тензора напряжений P; D — тензор скоростей деформаций;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00168) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2260-2008.1).

I — единичный тензор; τ — время релаксации; μ — динамическая вязкость; ρ — плотность среды.

Рассматриваемая математическая модель состоит из реологического соотношения Максвелла [6]

$$\tau\Big(\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla P - W\cdot P + P\cdot W\Big) + P = -pI + 2\mu D, \tag{1}$$

уравнения импульса

$$\rho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\Big) = \operatorname{div} P \tag{2}$$

и уравнения неразрывности

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{3}$$

Здесь символы ∇ и div обозначают градиент и дивергенцию по переменным x, y; тензор W — антисимметричная часть тензора $\nabla\boldsymbol{v}$. Выражение в скобках в соотношении (1) представляет собой вращательную производную Яуманна [6]. Наличие в (1) членов с тензором W обеспечивает инвариантность этого уравнения относительно группы вращений.

Областью применимости модели (1)–(3) являются конечные, но сравнительно небольшие деформации и умеренные скорости движения, что позволяет в уравнении переноса тепла пренебречь членом, ответственным за диссипацию кинетической энергии. Если при этом отсутствует приток тепла с границ области течения, то движение можно считать изотермическим, а величины τ, μ, ρ — положительными постоянными. Тогда система (1)–(3), состоящая из шести скалярных уравнений и содержащая шесть искомых функций u, v, p, A, B, C, становится замкнутой.

Как отмечено выше, система (1)–(3) не имеет определенного типа и эволюционна относительно всех искомых функций, кроме давления. В этом смысле она подобна системе уравнений Навье — Стокса в случае несжимаемой жидкости. Однако в отличие от последней, которая близка к параболической, система (1)–(3) обладает рядом свойств, характерных для гиперболических систем. Исследование общих начально-краевых задач для указанной системы выходит за рамки настоящей работы. Вместе с тем некоторые характерные свойства этой системы можно выявить на основе изучения достаточно содержательных точных решений. Универсальным инструментом для регулярного построения точных решений является групповой анализ дифференциальных уравнений [7]. Хотя группа преобразований, допускаемая системой (1)–(3), пока не вычислена, априори известно, что она достаточно широка.

2. Пример частично инвариантного решения системы (1)–(3). Непосредственная проверка системы (1)–(3) показывает, что она допускает расширенную группу Галилея на плоскости (необходимость расширения группы обусловлена присутствием в этой системе дополнительных искомых функций A, B, C). Расширенная группа Галилея состоит из переносов по осям t, x, y, галилеевых переносов по осям x, y и согласованных вращений в плоскостях (x, y) и (u, v), при которых тензор P преобразуется естественным образом.

Рассмотрим подгруппу расширенной группы Галилея, порожденную операторами переноса ∂_x и галилеева переноса $t\,\partial_x + \partial_u$ по оси x. Данная подгруппа имеет следующий полный набор инвариантов: t, y, v, p, A, B, C. Так как ранг соответствующей матрицы Якоби (см. [7]) здесь меньше числа искомых функций в системе (1)–(3), то инвариантного решения относительно указанной подгруппы эта система не имеет. Однако можно найти ее частично инвариантное решение, следуя алгоритму, изложенному в [7]. Для этого следует положить

$$v = v(y, t), \quad p = p(y, t), \quad A = A(y, t), \quad B = B(y, t), \quad C = C(y, t) \tag{4}$$

и найти функцию $u(x,y,t)$ из условия совместности переопределенной системы, получающейся путем присоединения к (1)–(3) дополнительных равенств

$$v_x = 0, \quad p_x = 0, \quad A_x = 0, \quad B_x = 0, \quad C_x = 0.$$

Подстановка выражения для v из (4) в уравнение неразрывности (3) показывает, что функция u может быть лишь линейной функцией x. Предположим для простоты, что эта функция однородна. Тогда из (3) следует равенство

$$u = -xv_y. \tag{5}$$

Равенство (5) фактически является результатом интегрирования автоморфной системы [7], в данном случае состоящей из одного уравнения. Подставляя выражение (5) в уравнения (1), (2), с учетом (4) получаем соотношения

$$\begin{gathered}
\tau(A_t + vA_y - xv_{yy}B) + A = -p - 2\mu v_y,\\
\tau[B_t + vB_y + xv_{yy}(A - C)/2] + B = -\mu x v_{yy},\\
\tau(C_t + vC_y + xv_{yy}B) + C = -p + 2\mu v_y,\\
\rho x(-v_{yt} + v_y^2 - vv_{yy}) = B_y, \qquad \rho(v_t + vv_y) = C_y.
\end{gathered} \tag{6}$$

Система (6) допускает частичное разделение переменных, что позволяет записать уравнения разрешающей системы и проинтегрировать их в явном виде. Опуская промежуточные вычисления, приведем общее решение этой системы

$$v = -\frac{\alpha y}{1+\alpha t} + l(t), \quad C = \frac{\rho\alpha^2 y^2}{(1+\alpha t)^2} + \rho\Big(\dot l - \frac{\alpha l}{1+\alpha t}\Big)y + m(t), \quad B = \beta\,\mathrm{e}^{-t/\tau},$$

$$p = \rho y^2\Big(\frac{4\tau\alpha^3}{(1+\alpha t)^3} - \frac{\alpha^2}{(1+\alpha t)^2}\Big) + \rho y\Big[-\tau\Big(\ddot l - \frac{\alpha\dot l}{1+\alpha t} + \frac{5\alpha^2 l}{(1+\alpha t)^2}\Big) - \dot l + \frac{\alpha l}{1+\alpha t}\Big] - \\ - \tau\dot m - m - \frac{2\alpha\mu}{1+\alpha t}, \tag{7}$$

где α, β — произвольные постоянные; l, m — произвольные функции t; точка над функцией, зависящей лишь от времени, обозначает ее производную. При известных функциях v, p функция $A(y,t)$ находится из решения линейного уравнения переноса

$$\tau(A_t + vA_y) + A = -p - 2\mu v_y.$$

Располагая произволом в решении (7), можно удовлетворить условиям на свободных границах $\pm y = s(t) \equiv s_0(1+\alpha t)^{-1}$, где $s_0 = \mathrm{const}$. Действительно, если $l = 0$, то на этих линиях выполняется кинематическое условие $\dot s = v(s,t)$. Полагая $\beta = 0$, устанавливаем, что на них выполнено также условие отсутствия касательных напряжений $P_{xy} = 0$. Если принять $m(t) = -\rho\alpha^2 s_0^2(1+\alpha t)^{-4}$, то на линиях $y = \pm s(t)$ будет выполнено и условие отсутствия нормальных напряжений $P_{yy} = 0$. Это позволяет дать простую физическую интерпретацию решения (7) с $l = 0$, $\beta = 0$ и указанной выше функцией $m(t)$. В начальный момент среда занимает полосу $|y| < s_0$ и имеет поля скоростей $u = \alpha x$, $v = -\alpha y$ и поля напряжений $P_{xx} = P_0(y)$, $P_{xy} = 0$, $P_{yy} = \rho\alpha^2(y^2 - s_0^2)$, где P_0 — четная функция y класса $C^1[-s_0, s_0]$. Далее движение происходит по инерции, при этом линии $y = \pm s(t)$ остаются свободными границами. При $\alpha > 0$ решение определено при всех $t > 0$, ширина полосы уменьшается со временем как t^{-1}. При $\alpha < 0$ в момент $t^* = -\alpha^{-1}$ возникает коллапс: расширяющаяся полоса заполняет всю плоскость. Причиной такого поведения среды является неограниченный рост продольной компоненты скорости при $|x| \to \infty$.

Если в построенном решении положить $\tau = 0$, то оно преобразуется в решение задачи о симметричной деформации полосы вязкой несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей [8]. Полагая в последнем решении $\mu = 0$, получаем известное решение Овсянникова для идеальной жидкости (“брус под штампом”) [9].

3. Расширение семейства точных решений. Построенное в п. **2** решение системы (1)–(3) характеризуется тем, что скорости в нем линейно зависят от пространственных координат, а поле напряжений не зависит от переменной x. Это не позволяет, например, рассмотреть на основе этого решения задачу о деформации полосы растягивающими или сжимающими усилиями в направлении оси x. Однако множество точных решений можно существенно расширить, ослабив требование инвариантности части искомых функций относительно переносов и галилеевых переносов по оси x. Положим

$$v = v(y,t), \quad P_{xx} = D(x,y,t), \quad P_{xy} = E(x,y,t), \quad P_{yy} = C(y,t), \quad p = p(y,t). \tag{8}$$

Таким образом, функции v, P_{yy}, p по-прежнему являются инвариантами указанной двухпараметрической подгруппы расширенной группы Галилея, в то время как P_{xx} и P_{xy} ими не являются.

Ограничиваясь, как и ранее, однородной зависимостью функции u от переменной x и подставляя соотношения (5), (9) в уравнения (1), (2), имеем

$$\begin{gathered}\tau(D_t - xv_yD_x + vD_y - xv_{yy}E) + D = -p - 2\mu v_y,\\ \tau[E_t - xv_yE_x + vE_y + xv_{yy}(D-C)/2] + E = -\mu x v_{yy},\\ \tau(C_t + vC_y + xv_{yy}E) + C = -p + 2\mu v_y,\\ \rho x(-v_{yt} + v_y^2 - vv_{yy}) = D_x + E_y, \qquad \rho(v_t + vv_y) = E_x + C_y.\end{gathered} \tag{9}$$

Полученные равенства следует дополнить соотношениями

$$v_x = 0, \qquad p_x = 0, \qquad C_x = 0. \tag{10}$$

Система (9), (10), очевидно, является переопределенной, поэтому возникает вопрос о ее совместности. Из третьего уравнения в (9) и соотношений (10) следует, что $v_{yy}E = 0$. Рассмотрим обе возможности: $E = 0$ и $v_{yy} = 0$. В первом случае из второго уравнения в (9) следует равенство $D_x = 0$, препятствующее расширению множества точных решений. Во втором случае v является линейной функцией y. Предположим для простоты, что эта функция однородна по y:

$$v = -yk(t). \tag{11}$$

Из (10) и двух последних уравнений системы (9) следует, что функции E и D являются соответственно линейной и квадратичной функциями x. Далее функцию E будем считать нечетной по переменной x, а функцию D — четной, так что

$$D = x^2a(y,t) + d(y,t), \qquad E = xb(y,t), \qquad C = c(y,t), \qquad p = p(y,t). \tag{12}$$

Подставляя выражения (11) в уравнения (10), получаем равенства

$$\tau(a_t - kya_y + 2ka) + a = 0, \qquad \tau(b_t - kyb_y + kb) + b = 0; \tag{13}$$

$$\rho(\dot{k} + k^2) = 2a + b_y; \tag{14}$$

$$\rho y(-\dot{k} + k^2) = b + c_y; \tag{15}$$

$$\tau(c_t - kyc_y) + c = -p - 2\mu k, \qquad \tau(d_t - kyd_y) = -p + 2\mu k. \tag{16}$$

Уравнения (13), (14) образуют замкнутую подсистему для определения функций $a(y,t)$, $b(y,t)$ и $k(t)$. Если решение этой подсистемы известно, то функция $c(y,t)$ восстанавливается квадратурой из уравнения (15), после чего функция $p(y,t)$ легко находится из первого уравнения в (16). Остается найти функцию $d(y,t)$ как решение линейного уравнения переноса — второго уравнения в (16).

Рассмотрим систему (13), (14), содержащую три уравнения для трех искомых функций и формально являющуюся замкнутой. Фактически же эта система оказывается переопределенной, поскольку функция k не зависит от y. Тем не менее система (13), (14) совместна. Заметим сначала, что данная система допускает решения, в которых функция a четна по переменной y, а функция b нечетна. Несложный анализ показывает, что все такие решения описываются формулами

$$b = \rho q y \exp{(-t/\tau)}, \qquad a = a(t), \tag{17}$$

где $q = \text{const}$; функции $a(t)$ и $k(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\tau(\dot{a} + 2ka) + a = 0, \qquad \rho(\dot{k} + k^2) = 2a + \rho q \exp{(-t/\tau)}. \tag{18}$$

Найденное расширение семейства точных решений системы (1)–(3) на основе ее частично инвариантного решения (4), (5) можно трактовать как новый эффект в групповом анализе дифференциальных уравнений. Другой способ подобного расширения предложен в работе [10]. Групповая природа решения (5), (8), (11), (12) системы (1)–(3) неясна. Можно ожидать, что оно является дифференциально-инвариантным решением указанной системы. Следует отметить, что теория дифференциально-инвариантных решений начала развиваться недавно (см. работу [11] и библиографию к ней).

К системе (18) присоединим начальные условия

$$a(0) = a_0, \qquad k(0) = k_0. \tag{19}$$

Задача Коши (18), (19) требует более подробного исследования. В данной работе рассмотрены частные случаи этой задачи. Первый случай соответствует значению $q = 0$. При этом система (18) преобразуется в динамическую систему на плоскости. Зная решение задачи Коши (19) для названной системы

$$\tau(\dot{a} + 2ka) + a = 0, \qquad \rho(\dot{k} + k^2) = 2a, \tag{20}$$

можно описать движение в направлении оси x вязкоупругой полосы со свободными границами под действием растягивающих или сжимающих усилий, распределенных по квадратичному закону. Функции $s(t)$ и $c(y,t)$ определим равенствами

$$s = s_0 \exp\Big(-\int\limits_0^t k(z)\,dz\Big), \qquad c = \frac{\rho}{2}\,(\dot{k} - k^2)(s^2 - y^2), \tag{21}$$

где s_0 — положительная постоянная. Тогда уравнение (15) с $b = 0$ будет удовлетворено. Следует отметить, что в формулы, задающие в построенном решении поле скоростей и распределение напряжений $P_{yy} = c(y,t)$, не входит вязкость μ, хотя компоненты P_{xx} и p решения системы (1)–(3) зависят от вязкости.

Определим область течения $S_T = \{x, y, t\colon x \in \mathbb{R},\ |y| < s(t),\ 0 < t < T\}$. В силу равенств (21) и $b = 0$ на границах полосы $y = \pm s(t)$ выполняются условия отсутствия напряжений $P_{xy} = P_{yy} = 0$. Из (11), (21) также следует, что на этих линиях выполняется кинематическое условие $\dot{s} = v(s,t)$. Это означает, что линии $y = \pm s(t)$ могут быть приняты в качестве свободных границ. Из (11), (5), (17), (21) следует, что функция v является нечетной функцией y, а функции u, a, c — четными. Это гарантирует четность функции p, определяемой из первого уравнения в (16). Четность функции d, определяемой путем решения второго уравнения в (16), обеспечивается, если ее начальное значение $d(y,0)$ обладает свойством четности. Сказанное выше позволяет интерпретировать обсуждаемое решение как движение вязкоупругой среды в полосе с линией симметрии $y = 0$ и свободными границами $y = \pm s(t)$. В данном случае, в отличие от примера, рассмотренного в п. **2**, источником движения является не только начальное поле скоростей, но и распределенные в начальный момент напряжения вдоль оси x.

Вернемся к задаче Коши (19), (20). В зависимости от значений a_0, k_0 решение этой задачи определено на всей полуоси $t > 0$ (в этом случае при $t \to \infty$ $k = O(t^{-1})$, а функция a экспоненциально убывает) либо коллапсирует в момент $t = t^*$ (природа коллапса описана в п. **2**). Система (20) имеет также стационарное решение $k = -1/(2\tau)$, $a = \rho/(8\tau^2)$, которому соответствует следующее решение задачи со свободной границей для системы (1)–(3):

$$\begin{gathered} u = -\frac{x}{2\tau}, \qquad v = \frac{y}{2\tau}, \qquad P_{xx} = \frac{\rho x^2}{8\tau^2} + d(y,t), \\ P_{xy} = 0, \qquad P_{yy} = \frac{\rho(y^2 - s^2)}{8\tau^2}, \qquad s = s_0 \exp\Big(\frac{t}{2\tau}\Big). \end{gathered} \tag{22}$$

Здесь функция d определяется как решение линейного уравнения переноса (16). Данное решение задачи о деформации полосы специфично для несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла и не имеет аналога в динамике вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим другой частный случай задачи (18), (19): $a_0 = 0$. В этом случае $a(t) \equiv 0$ и задача редуцируется к следующей:

$$t > 0\colon \quad \dot{k} + k^2 = q \exp(-t/\tau), \qquad t = 0\colon \quad k = k_0. \tag{23}$$

Вид решения задачи (23) зависит от знака постоянной q. Если $q > 0$, то

$$k = q^{1/2} \exp\Big(-\frac{t}{2\tau}\Big) \frac{[q^{1/2}K_0'(z_0) - k_0 K_0(z_0)]I_0'(z) + [k_0 I_0(z_0) - q^{1/2} I_0'(z_0)]K_0'(z)}{[q^{1/2}K_0'(z_0) - k_0 K_0(z_0)]I_0(z) + [k_0 I_0(z_0) - q^{1/2} I_0'(z_0)]K_0(z)}. \tag{24}$$

Здесь $z(t) = 2\tau q^{1/2} \exp(-t/2\tau)$; $z_0 = z(0)$; $I_0(z)$ и $K_0(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода; штрих означает производную этих функций по аргументу. В случае $q < 0$ решение задачи (23) имеет вид

$$k = |q|^{1/2} \exp\Big(-\frac{t}{2\tau}\Big) \frac{[|q|^{1/2}Y_0'(z_0) - k_0 Y_0(z_0)]J_0'(z) + [k_0 J_0(z_0) - |q|^{1/2} J_0'(z_0)]Y_0'(z)}{[|q|^{1/2}Y_0'(z_0) - k_0 Y_0(z_0)]J_0(z) + [k_0 J_0(z_0) - |q|^{1/2} J_0'(z_0)]Y_0(z)}, \tag{25}$$

где $J_0(z)$, $Y_0(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода. Как и в решении задачи Коши (19), (20), возможны два случая: 1) решение задачи (25) продолжимо на всю полуось $t > 0$; 2) существует значение $t^* > 0$, такое что $|k| \to \infty$ при $t \to t^*$. В первом случае $k = O(t^{-1})$ при $t \to \infty$. Этот результат следует из представления (24) и асимптотик функций $I_0(z)$, $K_0(z)$ при $z \to 0$ (что соответствует $t \to \infty$). Формальная причина разрушения решения при $k_0 < 0$ состоит в наличии нулей знаменателя в формуле (25), что обусловлено изменением знака функций $J_0(z)$ и $Y_0(z)$.

Решению задачи Коши (23) соответствует следующее решение задачи со свободной границей для исходной системы (1)–(3): область течения есть $S_T = \{x, y, t\colon x \in \mathbb{R},\ |y| < s(t),\ 0 < t < T\}$, функция $s(t)$ определена соотношением

$$s = s_0 \exp\Big(-\int\limits_0^t k(z)\,dz\Big),$$

а поля скоростей и напряжений — формулами

$$\begin{gathered} u = xk(t), \qquad v = -yk(t), \qquad P_{xx} = d(y,t), \qquad P_{xy} = \rho q x y \exp(-t/\tau), \\ P_{yy} = (\rho/2)[\dot{k} - k^2 - q\exp(-t/\tau)](s^2 - y^2). \end{gathered} \tag{26}$$

Здесь функция $k(t)$ определяется одним из соотношений (24), (25), а функция $d(y,t)$ находится как решение второго уравнения в (16) с начальным условием $d(y,0) = d_0(y)$ ($d_0(y)$ — функция класса $C^1[-s_0, s_0]$, удовлетворяющая условию четности ($d_0'(0) = 0$), а в остальном произвольная).

Решение (26) удовлетворяет кинематическому условию и условию отсутствия нормального напряжения на границе области течения S_T, однако касательное напряжение на линиях $y = \pm s(t)$ не обращается в нуль. Это позволяет дать следующую трактовку полученного решения. В начальный момент поле скоростей имеет вид $u = k_0 x$, $v = -k_0 y$ (в частности, среда может покоиться: $k_0 = 0$), а на границах полосы $y = \pm s_0$ распределены касательные напряжения, линейно зависящие от x. В процессе движения эти напряжения релаксируют по экспоненциальному закону, и движение выходит на режим инерционного, подобного рассмотренному в п. **2**.

Заключение. На первый взгляд решение (22) задачи о деформации вязкоупругой полосы представляется парадоксальным: ширина полосы со временем увеличивается несмотря на действие растягивающих усилий. Однако эти усилия преодолеваются силами инерции, действующими в противоположном направлении в соответствии с начальным распределением скоростей, что и устраняет это противоречие.

Физическая реализация решения (7) задачи о деформации полосы и его аналогов затруднена по двум причинам. “Обрезание” полосы приводит к постановке краевых условий на ее концах, выполнение которых трудно обеспечить в эксперименте. Наличие даже малой силы тяжести искажает прямолинейные границы полосы конечной длины при практически любом способе ее фиксации в пространстве. С точки зрения реализации более приемлемым является решение задачи о растекании вязкоупругой полосы с прямолинейной свободной границей вдоль плоской стенки. Математическая постановка такой задачи отличается от рассмотренной выше тем, что в ней условия симметрии на линии $y = 0$ заменяются условиями прилипания $u = v = 0$ при $y = 0$, $0 < t < T$. В предельном случае вязкой несжимаемой жидкости эта задача исследовалась в работе [8].

В заключение обсудим вопрос о месте, которое занимает модель несжимаемой среды в теории вязкоупругого континуума. С термодинамической точки зрения несжимаемая среда ущербна (что, впрочем, не препятствует использованию уравнений вязкой несжимаемой жидкости для решения различных прикладных задач). Однако существует большое количество материалов, проявляющих как вязкие, так и упругие свойства с разными временами релаксации объемных и сдвиговых упругих напряжений (см., например, [12]). Что касается воды, то в разных работах приводятся различные значения времени релаксации τ' объемных напряжений под действием импульсных нагрузок. В этом случае уместнее говорить о диапазоне времен релаксации 10^{-8} с $< \tau' < 10^{-6}$ с. Между тем время релаксации τ сдвиговых напряжений в воде равно 29,33 мин. Это означает, что при описании эволюции такой среды на больших временах из заданного начального состояния необходимо изучать ее поведение “в несжимаемом пределе”, что является дополнительным стимулом для изучения модели несжимаемой вязкоупругой среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Апакашев Р. А., Павлов В. В.** Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 3–7.
2. **Стебновский С. В.** Термодинамическая неустойчивость дисперсных сред, изолированных от внешних воздействий // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 53–58.
3. **Коренченко А. Е., Бескачко В. П.** Определение модуля сдвига воды в экспериментах с плавающим диском // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 100–103.

4. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
5. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
6. **Астарита Дж.** Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Маруччи. М.: Мир, 1978.
7. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. **Pukhnachov V. V.** On the problem of viscous strip deformation with a free boundary // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1999. V. 328. P. 357–362.
9. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5–75.
10. **Пухначев В. В.** Точные решения уравнений гидродинамики, построенные на основе частично инвариантных // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 18–25.
11. **Golovin S. V.** Applications of the differential invariants of infinite dimensional groups in hydrodynamics // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2004. V. 9. P. 35–51.
12. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983.

Поступила в редакцию 9/I 2008 г.