Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2008, том 44, № 3

УДК 621.865

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ОБЪЕКТОВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ *

В. В. Трушков, В. М. Хачумов

Институт программных систем РАН, г. Переславль-Залесский Ярославской обл.
E-mail: vmh48@mail.ru

Рассмотрен метод определения ориентации тела по заданным положениям отдельных его точек, расположенных на гранях трехмерной модели или на поверхности. Разработан алгоритм, основанный на проведении специальных ортогональных линий положения, что позволяет измерять углы ориентации и выполнять нормализацию объекта для последующих управляющих воздействий. Приведен пример определения ориентации трехмерного тела, представленного набором точек, расположенных на поверхности конуса.

Введение. Задача определения ориентации тела в трехмерном пространстве встречается в различных приложениях, например при расчете траекторий и управлении космическими аппаратами, когда необходимо оперировать трехмерными поворотами. Известно, что три вектора однозначно задают положение и ориентацию несимметричного трехмерного объекта в пространстве. Первый вектор (ось тела) определяет линию положения объекта, второй – направление, в котором обращен объект, третий вектор – поворот на угол вокруг главной оси. Чтобы полностью задать ориентацию объекта, необходимо дополнительно найти направление вдоль главной оси. Наибольший интерес представляет проблема определения ориентации, когда наблюдаемое тело представлено заданным числом характерных наблюдаемых (реперных) точек, каждая из которых может иметь свой «вес» или яркость. Ранее подобная задача рассматривалась для плоского полутонового изображения [1]. В работе [2] задача ориентации была поставлена для трехмерного случая и решалась численным методом. В представленной работе предлагается аналитическое решение задачи определения ориентации объектов в трехмерном пространстве.

Постановка задачи. Рассмотрим процесс построения линии положения тела в пространстве. Пусть трехмерное тело задано набором N точек с координатами (x_k, y_k, z_k), $k = 1, \dots, N$, которым приписаны веса q_k, имеющие смысл, например, яркости или веса. Веса точек влияют на центр масс тела,

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-07-89083, № 07-07-12029-офи).

поэтому их изменение может привести к неординарной форме траектории движения центра масс и изменению ориентации самого тела. В этом смысле очень важно в начале задачи обеспечить правильное задание реперных точек объекта (твердого тела) на его поверхности.

Необходимо провести прямую пространственную линию так, чтобы сумма S квадратов расстояний от всех точек набора до данной линии, умноженных на веса точек, была минимальной:

$$S = \sum_{i}^{N} d_i^2 q_i \to \min, \qquad (1)$$

где d_k – расстояние от k-й точки объекта до линии.

Пусть линия положения проходит через «центр тяжести» системы точек объекта

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\sum_{i=1}^{N} q_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} q_i,\ \sum_{i=1}^{N} q_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} q_i,\ \sum_{i=1}^{N} q_i z_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} q_i \right),$$

где $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ – координаты его центра тяжести.

Линия положения образует углы α, β, γ с осями координат OX, OY, OZ, и ее уравнение можно записать в виде

$$(x - \bar{x})/l = (y - \bar{y})/m = (z - \bar{z})/n,$$

где l, m, n – угловые коэффициенты прямой в пространстве, которые должны быть определены в результате решения задачи; x, y, z – координаты произвольной точки объекта.

Расстояние от k-й точки объекта до искомой линии вычисляется по формуле [3]

$$d_k^2 = \frac{[(x_k - \bar{x})m - (y_k - \bar{y})l]^2 + [(y_k - \bar{y})n - (z_k - \bar{z})m]^2 + [(z_k - \bar{z})l - (x_k - \bar{x})n]^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Для удобства записи введем следующие обозначения:

$$A = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 q_i, \quad B = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 q_i, \quad C = \sum_{i=1}^{N} (z_i - \bar{z})^2 q_i,$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) q_i,\ E = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) q_i,\ F = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) q_i.$$

Величины $A, \ldots, F$ назовем моментами инерции и в дальнейшем используем как постоянные коэффициенты.

Для решения задачи (1) следует найти частные производные по переменным l, m, n и приравнять их к нулю.

Условия

$$\frac{\partial S}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0$$

после необходимых преобразований приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} g_1 = (l^2+m^2+n^2)((B+C)l - Dm - En) - l((B+C)l^2 + (C+A)m^2 + \\ +(A+B)n^2 - 2Dlm - 2Eln - 2Fmn) = 0, \\ g_2 = (l^2+m^2+n^2)((C+A)m - Dl - Fn) - m((B+C)l^2 + (C+A)m^2 + \\ +(A+B)n^2 - 2Dlm - 2Eln - 2Fmn) = 0, \\ g_3 = (l^2+m^2+n^2)((A+B)n - El - Fm) - n((B+C)l^2 + (C+A)m^2 + \\ +(A+B)n^2 - 2Dlm - 2Eln - 2Fmn) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

которая эквивалентна системе уравнений, полученной в работе [2]. Представим более эффективный метод ее решения.

Метод решения. Рассмотрим эквивалентную систему

$$\begin{cases} mg_1 - lg_2 = 0, \\ ng_1 - lg_3 = 0, \\ ng_2 - mg_3 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Приведем подобные в системе (3) и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{cases} ((B+C)l - Dm - En)m = ((C+A)m - Dl - Fn)l, \\ ((C+A)m - Dl - Fn)n = ((A+B)n - El - Fm)m, \\ ((A+B)n - El - Fm)l = ((B+C)l - Dm - Cn)n. \end{cases}$$

Заметим, что теперь эти равенства можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \\ Al+Dm+En & Dl+Bm+Fn & El+Fm+Cn \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь «×, ·» – знаки векторного и скалярного произведений соответственно.

Таким образом, систему (3) можно переписать в виде

$$w \times Iw = 0, \quad |w| = 1, \quad w = (l \quad m \quad n)^T, \quad I = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Лемма 1. Система (4) имеет решение тогда и только тогда, когда $Iw = \lambda w$, где λ – некоторое число.

Действительно, площадь параллелограмма, «натянутого» на векторы w и Iw, равна нулю тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

Уравнение $Iw = \lambda w$ имеет неотрицательное решение, тогда и только тогда, когда λ – собственное значение матрицы I.

i	x_i	y_i	z_i	i	x_i	y_i	z_i
1	2,014	0,3278	20,410	14	–2,832	1,9930	34,630
2	–2,120	3,9380	44,730	15	0,562	0,9030	10,640
3	0,515	–0,1550	5,373	16	0,029	–1,4900	14,910
4	–0,010	–0,7949	7,950	17	0,644	4,7720	48,150
5	–2,024	–1,1100	23,080	18	–2,840	–2,5600	38,200
6	0,690	–0,2440	7,320	19	0,568	1,3920	15,030
7	1,294	0,4052	13,560	20	–0,686	3,0180	30,950
8	–1,597	3,8280	41,480	21	–2,472	–1,9300	31,340
9	0,124	0,2372	2,676	22	2,735	–0,2700	27,480
10	2,580	–1,8500	31,790	23	–0,068	0,8384	8,411
11	3,136	3,1030	44,120	24	0,041	2,3280	23,290
12	–0,811	–1,8200	19,920	25	1,220	–4,5100	46,760
13	1,600	–1,5400	22,180				

Матрица оператора симметрическая и положительно-определенная, следовательно, ее собственные значения вещественны [4]. Собственные векторы являются ортогональными и соответствуют направляющим векторам эллипсоида, определяющего положение тела в пространстве. Длины осей эллипсоида соответствуют собственным числам. Причем максимальное собственное (характеристическое) число соответствует искомому направлению линии положения. Вектор, соответствующий второму по величине собственному значению, задает направление, в котором обращен объект. Третий собственный вектор определяет поворот на угол вокруг главной оси.

Пример определения ориентации. Рассмотрим 25 точек бинарного изображения, расположенных на конусе $x^2 + y^2 = z^2/100$ в случайном порядке (см. таблицу). Центр масс находится в точке (0,992, 0,352, 24,570). Собственные значения равны (4792,49, 121,27, 69,82). Они соответствуют собственным векторам (0,018, –0,069, –0,998), (0,043, –0,998, 0,040), (1,167, 0, 0).

Полученные собственные значения и векторы позволяют проводить нормализацию объекта, т. е. приводить объекты к стандартному положению для последующего сравнения трехмерных объектов [2].

Заключение. Предложенный в данной работе подход определения ориентации тела основан на построении линий положения. В отличие от ранее рассмотренного подхода [2] он обходится без применения численного метода решения системы нелинейных уравнений. Найденные линии положения позволяют проводить нормализацию и корректное совмещение трехмерных моделей объектов, что может быть использовано для выполнения операции сравнения полутоновых изображений в задачах распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лагиева М. М., Хачумов В. М., Шабалов Д. В.** Метод построения линий положения для идентификации полутоновых изображений // Автометрия. 1991. № 6. С. 7.
2. **Алибеков А. Г., Лагиева М. М., Хачумов В. М.** Определение ориентации трехмерных графических объектов // Изв. вузов. Сер. Приборостроение. 1995. **38**, № 3–4. С. 35.
3. **Александров П. С.** Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
4. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 15 марта 2007 г.