УДК 532.511+517.9

О НОВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ И АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Е. Ю. Мещерякова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматриваются точные стационарные и автомодельные решения уравнений Эйлера, обладающие свойством частичной инвариантности относительно некоторой шестипараметрической группы Ли. Приведены новые примеры вихревого движения жидкости с закруткой в криволинейных каналах. Проведена классификация автомодельных решений редуцированной системы с двумя независимыми переменными, которая допускает трехпараметрическую группу растяжений, в то время как исходная система уравнений Эйлера обладает двухпараметрической группой.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, частично инвариантные решения, линии тока, источники, стоки.

1. Теоретико-групповая природа решения. Рассматривается частично инвариантное решение уравнений Эйлера, описывающих вращательно-симметричное движение идеальной несжимаемой жидкости [1]. Для построения частично инвариантного решения система уравнений Эйлера записывается в цилиндрических координатах r, θ, z. Проекции вектора скорости $\boldsymbol{v}$ на соответствующие оси обозначены u, v, w. Согласно универсальному алгоритму построения частично инвариантных решений [2] вертикальная компонента скорости w является функцией двух переменных — вертикальной координаты z и времени t, в то время как две другие компоненты скорости u, v и давление p не зависят от полярного угла θ:

$$w = w(z,t), \qquad u = u(r,z,t), \qquad v = v(r,z,t), \qquad p = p(r,z,t).$$

Подставляя данное представление решений в систему уравнений Эйлера, записанную в цилиндрических координатах, получим систему

$$\begin{gathered} u_t + uu_r + wu_z - r^{-1}v^2 + p_r = 0, \qquad v_t + uv_r + wv_z + r^{-1}uv = 0, \\ w_t + ww_z + p_z = 0, \qquad u_r + r^{-1}u + w_z = 0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

которая была исследована в [3, 4]. Из последнего уравнения (1.1) путем интегрирования ($w_r = 0$) легко получить функцию

$$u = -rw_z/2 + q/r, \tag{1.2}$$

где $q(z,t)$ — новая неизвестная функция. Из полученной переопределенной системы можно найти также компоненту скорости v [1]

$$v = r^{-1}[r^4(a+s) + r^2 b - q^2]^{1/2},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00782) и Молодежного проекта № 18 СО РАН.

где $a = -w_{zt}/2 - ww_{zz}/2 + w_z^2/4$; $b = q_t + wq_z$; функция $s(r,t)$ определяется из решения уравнения

$$r^2(a_t + wa_z - 2w_z a) + r^2 s_t - r^2 w_z(rs_r + 4s)/2 + b_t + wb_z - w_z b + 4qa + q(rs_r + 4s) = 0.$$

При анализе (1.1) следует рассматривать несколько случаев, каждый из которых приводит к определенному классу решений, описывающих движения с закруткой. В случае $w_{zz} \neq 0$ переопределенная система принимает вид

$$\begin{gathered} f_t + wf_z + f^2 - a = 0, \qquad a_t + wa_z + 4(a+\chi)f + \dot\chi = 0, \\ q_t + wq_z - b = 0, \qquad b_t + wb_z + 2fb + 4(a+\chi)q = 0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $f = -w_z/2$.

Записав систему (1.3) в лагранжевых координатах, можно заметить, что она допускает точную линеаризацию. Класс решений для данного нестационарного случая и примеры возможных вихревых течений описаны в [3, 4]. В настоящей работе исследованы стационарные и автомодельные решения, соответствующие системе (1.3).

2. Стационарные решения. Рассмотрим стационарные решения системы уравнений (1.3), полагая $w = w(z)$, $a = a(z)$, $q = q(z)$, $b = b(z)$ и $\chi = \mathrm{const}$. В результате приходим к системе уравнений относительно w и q

$$\begin{gathered} 2ww'' - w'^2 + 4a = 0, \qquad wa' - 2(a+\chi)w' = 0, \\ wq' - b = 0, \qquad wb' - w'b + 4(a+\chi)q = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Отметим, что во втором уравнении переменные разделяются, и после интегрирования имеем

$$a = Cw^2/4 - \chi, \tag{2.2}$$

где C — произвольная константа интегрирования.

Подставляя полученный результат в первое уравнение системы (2.1), приходим к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$2ww'' - w'^2 + Cw^2 - 4\chi = 0. \tag{2.3}$$

Понизим порядок данного уравнения, полагая $w' = g(w)$. Тогда в силу $w'' = w'\dot g = g\dot g$ уравнение (2.3) принимает вид

$$2wg\dot g - g^2 + Cw^2 - 4\chi = 0.$$

Полагая далее $g^2 = h$, перепишем это уравнение:

$$w\dot h - h - 4\chi + Cw^2 = 0.$$

Данное уравнение имеет общее решение

$$h = C_1 w - Cw^2 - 4\chi$$

или (с учетом определения h)

$$w'^2 = C_1 w - Cw^2 - 4\chi. \tag{2.4}$$

Решая уравнение (2.4), находим

$$w = \begin{cases} (C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 16\chi C}\,\sin(\sqrt{C}\,z - C_2\sqrt{C}\,))/(2C), & C > 0,\ C_1^2 - 16\chi C \geqslant 0, \\ (C_1 \pm \sqrt{16\chi C - C_1^2}\,\operatorname{sh}(\sqrt{|C|}\,z - C_2\sqrt{|C|}\,))/(2C), & C < 0,\ C_1^2 - 16\chi C < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

В силу третьего уравнения (2.1) и выражения (2.2) четвертое уравнение (2.1) сводится к простому уравнению

$$q'' + Cq = 0,$$

решение которого имеет вид

$$q = \begin{cases} A_1 \sin(\sqrt{C}\, z) + B_1 \cos(\sqrt{C}\, z), & C > 0, \\ A_2 \operatorname{ch}(\sqrt{|C|}\, z) + B_2 \operatorname{sh}(\sqrt{|C|}\, z), & C < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Получим линии тока исходя из определения $dr/u = r\,d\theta/v = dz/w$ или в данном случае $dr/u = dz/w$, откуда следует $w\,dr - u\,dz = 0$. С учетом (1.2) получим $r^2 w_z\,dz + 2rw\,dr - 2q\,dz = 0$ или $d(r^2 w) - 2\,d\left(\int\limits_0^z q\,dz'\right) = 0$. Тогда имеем уравнение поверхности, образованной линиями тока:

$$r^2 w - 2\int\limits_0^z q\,dz' = \mathrm{const}\,. \tag{2.7}$$

Левую часть (2.7) обозначим через $\psi(r,z)$. Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.7), находим зависимость r от z:

$$r^2\bigl(C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 16\chi C}\,\sin(\sqrt{C}\,z - C_2\sqrt{C}\,)\bigr)/(2C) + {} \\ {} + A_1\cos(z\sqrt{C}\,)/\sqrt{C} - B_1\sin(z\sqrt{C}\,)/\sqrt{C} = \mathrm{const}; \tag{2.8а}$$

$$r^2\bigl(C_1 \pm \sqrt{16\chi C - C_1^2}\,\operatorname{sh}(\sqrt{|C|}z - C_2\sqrt{|C|}\,)\bigr)/(2C) - {} \\ {} - 2A_2\operatorname{sh}(z\sqrt{|C|})/\sqrt{|C|} - 2B_2\operatorname{ch}(z\sqrt{|C|}\,)/\sqrt{|C|} = \mathrm{const}\,. \tag{2.8б}$$

Формула (2.8а) соответствует случаю $C > 0$, $C_1^2 - 16\chi C \geqslant 0$, формула (2.8б) — случаю $C < 0$, $C_1^2 - 16\chi C < 0$. Следует отметить, что если далее упоминаются константы A_1, B_1, то речь идет о формуле (2.8а), а если A_2, B_2 — о формуле (2.8б).

Линии $\psi(r,z) = \mathrm{const}$ являются линиями тока в меридиональном сечении. Следуя [5, 6], объединение множества уровней функции тока будем называть портретом течения. В силу большого параметрического произвола (C, C_i, A_i, B_i, χ; $i = 1, 2$) имеет место достаточно широкий класс портретов течений, представленный различными каналами с разветвлением. На рис. 1 приведены некоторые характерные портреты течения, при этом различаются случаи, когда в выражениях (2.8а), (2.8б) выбран знак “плюс” или “минус”.

Определим расход жидкости через сечение $r = 0{,}6$ для выделенного криволинейного канала (рис. 1,a). Внутренняя и внешняя стенки канала задаются уравнениями $\psi(r,z) = 11{,}355$ и $\psi(r,z) = 11{,}155$ соответственно, где функция ψ определяется из формул (2.8). В данном случае расход равен произведению разности значений функции тока на π. Решая уравнения $\psi(0{,}6, z) = 11{,}355$ и $\psi(0{,}6, z) = 11{,}155$, находим, что для верхней ветви канала $z_1 = 0{,}660\,097$ и $z_2 = 0{,}692\,672$, для нижней $z_1 = 0{,}384\,397$ и $z_2 = 0{,}417\,106$. Обозначим Q_1, Q_2 расход через верхнюю и нижнюю ветви канала соответственно. Окончательно получим $Q_1 = -0{,}628\,319$, $Q_2 = 0{,}628\,319$, т. е. жидкость втекает через верхний канал и вытекает через нижний, в целом обеспечивая равенство нулю расхода через заданное сечение.

Как известно, установившиеся вращательно-симметричные движения (с закруткой) идеальной жидкости можно описать с помощью уравнения Грэда — Шафранова [5–7]

$$\psi_{zz} + \psi_{rr} - \psi_r/r = r^2 G(\psi) + F(\psi), \tag{2.9}$$

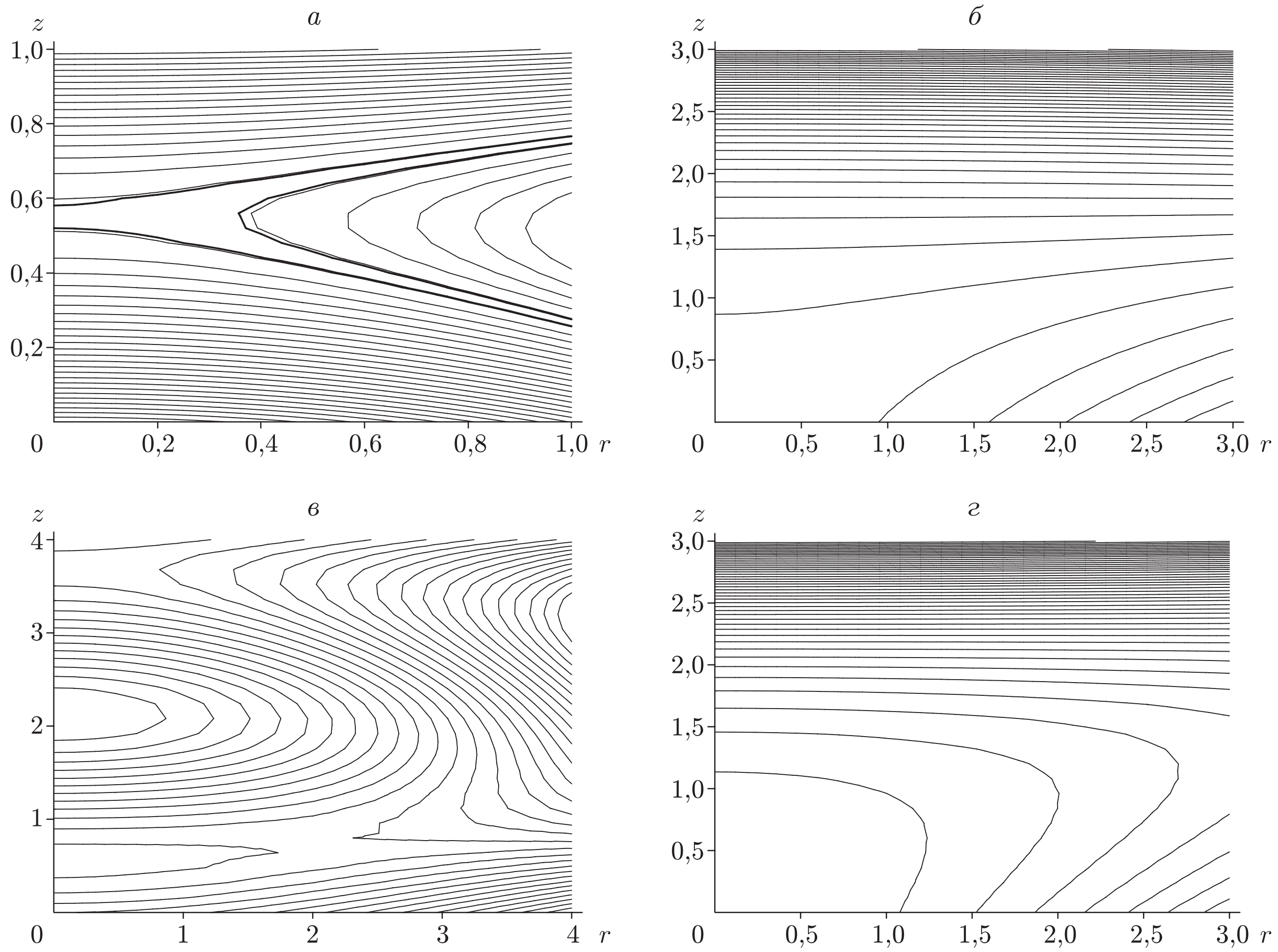

Рис. 1. Линии тока, вычисленные по формулам:
а — (2.8а), знак "–", *б* — (2.8б), знак "+", *в* — (2.8а), знак "+", *г* — (2.8б), знак "–";
а, в — $C = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $A_1 = 5$, $B_1 = -10$, $\chi = -1$; *б, г* — $C = -1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $A_2 = 1$, $B_2 = 1$, $\chi = -1$

где G, F — произвольные функции ψ. Случаи интегрируемости уравнения (2.9) и характерные портреты течения приведены в [5–7]. Можно показать, что построенное в данной работе решение не входит ни в один из известных классов. В силу явного вида функции тока (2.8) можно ввести краткое обозначение $\psi = r^2 a(z) + b(z)$, подставляя которое в (2.9), получим

$$r^2 a_{zz} + b_{zz} = r^2 G(\psi) + F(\psi). \tag{2.10}$$

Обозначая $s = r^2$ и дифференцируя (2.10) по s, приходим к уравнению

$$G(\psi) + aF_\psi(\psi) + asG_\psi(\psi) = a_{zz}.$$

Подставляя выражение для s, получаем

$$G(\psi) + aF_\psi(\psi) + aG_\psi(\psi)(b_{zz} - F(\psi))/(G(\psi) - a_{zz}) = a_{zz}. \tag{2.11}$$

Дифференцируя (2.11) по ψ, находим

$$2GG_\psi + a(F_\psi G - FG_\psi)_\psi - 2a_{zz}G_\psi - aa_{zz}F_{\psi\psi} + ab_{zz}G_{\psi\psi} = 0.$$

Далее дифференцируем по z:

$$a_z(F_\psi G - FG_\psi)_\psi - 2a_{zzz}G_\psi - (aa_{zz})_z F_{\psi\psi} + (ab_{zz})_z G_{\psi\psi} = 0.$$

Выполняя деление на G_ψ (полагая $G_\psi \neq 0$) и дифференцируя по ψ, получим

$$a_z((F_\psi G - FG_\psi)/G_\psi)_\psi - (aa_{zz})_z(F_{\psi\psi}/G_\psi)_\psi + (ab_{zz})_z(G_{\psi\psi}/G_\psi)_\psi = 0.$$

Данное уравнение делим на a_z (заметим, что a_z не равно тождественно нулю, однако следует полагать $z \neq (2C_2\sqrt{C}+\pi)/(2\sqrt{C}\,))$ и дифференцируем по z. Приходим к следующему уравнению (здесь также полагаем, что величина $((aa_{zz})_z/a_z)_z$ рассматривается в точках, в которых она не обращается в нуль):

$$\Big(\frac{F_{\psi\psi}}{G_\psi}\Big)_\psi - \frac{((ab_{zz})_z/a_z)_z}{((aa_{zz})_z/a_z)_z}\Big(\frac{G_{\psi\psi}}{G_\psi}\Big)_\psi = 0.$$

После дифференцирования по ψ данное уравнение сводится к простым дифференциальным уравнениям

$$(G_{\psi\psi}/G_\psi)_{\psi\psi} = 0, \qquad (F_{\psi\psi}/G_\psi)_{\psi\psi} = 0,$$

которые, однако, не имеют решения в элементарных функциях:

$$G = \int \exp\,(k\psi^2 + l\psi + n)\,d\psi, \qquad F = \int\Big(\int (k_1\psi + l_1)\exp\,(k\psi^2 + l\psi + n)\,d\psi\Big)\,d\psi,$$

где k, k_1, l, l_1, n — произвольные константы интегрирования.

Таким образом, получен новый класс стационарных частично инвариантных решений уравнений Эйлера, описывающий движения с закруткой в криволинейных каналах.

3. Автомодельные решения. Поскольку при построении решений из [1, 3, 4] группа растяжений не использовалась, приведем двухпараметрическую группу растяжений для (1.1)

$$X_1 = r\,\partial_r + z\,\partial_z + u\,\partial_u + v\,\partial_v + w\,\partial_w + 2p\,\partial_p, \quad X_2 = t\,\partial_t - u\,\partial_u - v\,\partial_v - w\,\partial_w - 2p\,\partial_p.$$

Для редуцированной системы (1.3) совместно с уравнением $f = -w_z/2$ возникает задача групповой классификации по элементу $\chi(t)$, которая здесь не рассматривается. Возьмем функцию χ в виде $\chi = c/t^n$, где c, n — константы. Следует отметить, что при произвольном $n \neq 2$ система (1.3) допускает лишь тривиальное преобразование растяжения $q \to kq$, $b \to kb$ ($k = \mathrm{const}$). Если $n = 2$, то допускаемая уравнениями (1.3) группа растяжений становится трехпараметрической, а ее генераторы имеют вид

$$Y_1 = t\,\partial_t - w\,\partial_w - f\,\partial_f - 2a\,\partial_a + q\,\partial_q, \quad Y_2 = z\,\partial_z + w\,\partial_w, \quad Y_3 = b\,\partial_b + q\,\partial_q. \tag{3.1}$$

Рассмотрим три оператора, которые являются линейной комбинацией операторов (3.1): $Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3$, $Y_2 + \delta Y_3$ и Y_3. Заметим, что невозможно построить инвариантное решение относительно оператора Y_3, поскольку не выполнены необходимые условия его существования. В случае оператора $Y_2 + \delta Y_3$ представление решений имеет вид ($\delta = \mathrm{const}$)

$$w = -2z\varphi(t), \qquad b = z^\delta\psi(t), \qquad q = z^\delta\omega(t).$$

В этом случае, обозначив $a + ct^{-2} = \pm g^2$, перепишем систему (1.3) в виде

$$\begin{gathered} \varphi' + \varphi^2 - a = 0, \qquad (\pm g^2)' + 4(\pm g^2)\varphi = 0, \\ \omega' - 2\delta\varphi\omega - \psi = 0, \qquad \psi' - 2\delta\varphi\psi + 2\varphi\psi + 4(\pm g^2)\omega = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Как следует из вида системы (3.2), первые два уравнения отщепляются и интегрируются отдельно. Например, выбирая знак “минус” при g^2, находим

$$\varphi' + \varphi^2 + g^2 + c/t^2 = 0, \qquad g' + 2\varphi g = 0.$$

Обозначая $\varphi + g = \lambda$, $\varphi - g = \mu$, приходим к уравнениям Риккати на функции λ и μ

$$\lambda' + \lambda^2 + c/t^2 = 0, \qquad \mu' + \mu^2 + c/t^2 = 0.$$

Решая данные уравнения и используя определения λ и μ, получаем

$$\varphi = \frac{1}{4t}\Big[2+\sqrt{4c-1}\Big(\operatorname{tg}\Big(-\frac{\sqrt{4c-1}}{2}\ln t+\frac{C_1\sqrt{4c-1}}{2}\Big)+\operatorname{tg}\Big(-\frac{\sqrt{4c-1}}{2}\ln t+\frac{C_2\sqrt{4c-1}}{2}\Big)\Big)\Big],$$

$$g = \frac{1}{4t}\Big[\sqrt{4c-1}\Big(\operatorname{tg}\Big(-\frac{\sqrt{4c-1}}{2}\ln t+\frac{C_1\sqrt{4c-1}}{2}\Big)-\operatorname{tg}\Big(-\frac{\sqrt{4c-1}}{2}\ln t+\frac{C_2\sqrt{4c-1}}{2}\Big)\Big)\Big],$$

где C_1, C_2 — произвольные константы интегрирования.

Если $a+ct^{-2}=g^2$, то система для функций φ и g сводится к комплексному уравнению Риккати, которое точно решается в элементарных функциях.

Несмотря на линейность, последние два уравнения в (3.2) не имеют простого решения, поэтому здесь не рассматриваются.

Наиболее широкий класс автомодельных решений получается на группе с оператором $Y_1+\beta Y_2+\gamma Y_3$. Обозначим автомодельную независимую переменную через $\zeta = zt^{-\beta}$, тогда искомые функции имеют вид

$$w=\lambda(\zeta)/t^2,\quad a=\mu(\zeta)/t^2,\quad \chi=c/t^2,\quad b=\eta(\zeta)/t^\gamma,\quad q=\sigma(\zeta)/t^{\gamma-1}. \tag{3.3}$$

Выбирая $\beta=-1$, т. е. автомодельную переменную $\zeta=zt$, подставим функции (3.3) в систему (1.3):

$$\begin{gathered}2(\lambda+\zeta)\lambda''-2\lambda'-\lambda'^2+4\mu=0,\qquad(\lambda+\zeta)\mu'-2(\lambda'+1)(\mu+c)=0,\\(\lambda+\zeta)\sigma'-(\gamma-1)\sigma=\eta,\qquad\eta'(\lambda+\zeta)-\eta(\lambda'+\gamma)+4(\mu+c)\sigma=0.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Из второго уравнения системы следует

$$K(\lambda+\zeta)^2=\mu+c. \tag{3.5}$$

Обозначим $\nu\equiv\lambda+\zeta$. С учетом того что $\nu''=\lambda''$, первое уравнение (3.4) перепишется следующим образом:

$$2\nu\nu''-\nu'^2+4\mu+1=0.$$

В силу (3.5) имеем $4\mu=4K\nu^2-4c$. Тогда

$$2\nu\nu''-\nu'^2+4K\nu^2+1-4c=0. \tag{3.6}$$

Для решения этого уравнения будем использовать тот же алгоритм, что и для решения (2.3). После интегрирования (3.6) получаем уравнение

$$(\nu')^2=K_1\nu-4K\nu^2+1-4c,$$

которое, в свою очередь, имеет решение (в силу определения ν)

$$\lambda(\zeta)=-(8\zeta K-K_1\pm\sqrt{K_1^2-64cK+16K}\,\sin(2\sqrt{K}\,\zeta-2K_2\sqrt{K}\,))/(8K); \tag{3.7а}$$

$$\lambda(\zeta)=-(8\zeta K-K_1\pm\sqrt{64cK-K_1^2-16K}\,\operatorname{sh}(2\sqrt{|K|}\,\zeta-2K_2\sqrt{|K|}\,))/(8K). \tag{3.7б}$$

Формула (3.7а) справедлива в случае $K>0$, $K_1^2-64cK+16K\geqslant 0$, формула (3.7б) — в случае $K<0$, $K_1^2-64cK+16K<0$ (K, K_1, K_2 — произвольные константы интегрирования).

Последние два уравнения в (3.4) отщепляются от первых двух, однако имеют простое аналитическое решение только при $\gamma=1$. В этом случае уравнения упрощаются:

$$(\lambda+\zeta)\sigma'=\eta,\qquad\eta'(\lambda+\zeta)-\eta(\lambda'+1)+4(\mu+c)\sigma=0.$$

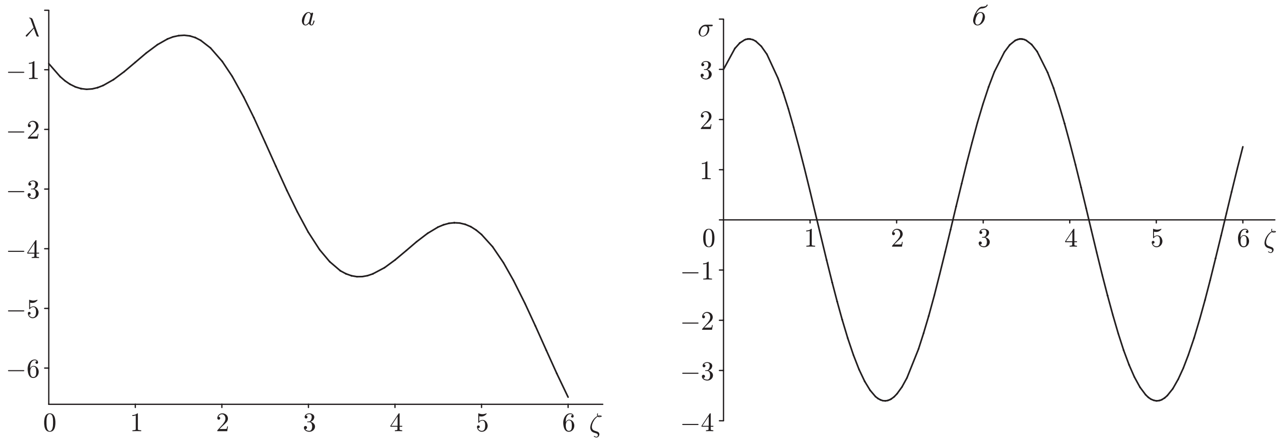

Рис. 2. Решения уравнений ($K = 1$, $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = 2$, $K_4 = 3$, $c = -1$):
а — (3.7а), знак "–"; *б* — (3.8а)

Подставляя выражения для η во второе уравнение и используя (3.5), приходим к простому уравнению относительно σ

$$\sigma'' + 4K\sigma = 0,$$

решение которого имеет вид, аналогичный (2.6):

$$\sigma = K_3 \sin(2\sqrt{K}\,\zeta) + K_4 \cos(2\sqrt{K}\,\zeta), \qquad K > 0; \tag{3.8а}$$

$$\sigma = K_5 \operatorname{ch}(2\sqrt{|K|}\,\zeta) + K_6 \operatorname{sh}(2\sqrt{|K|}\,\zeta), \qquad K < 0. \tag{3.8б}$$

На рис. 2 приведены зависимости $\lambda(\zeta)$ и $\sigma(\zeta)$ для конкретных значений параметров.

Следует отметить, что в случае $\gamma = 1$ функция q (плотность источников или стоков) совпадает с функцией σ. Поэтому полученное решение можно рассматривать как движение, индуцированное распределенными на оси z источниками и стоками, которые расположены с периодом πt^{-1}. Пространственный период стремится к нулю при $t \to \infty$, что означает концентрацию вихреисточников на оси симметрии.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за постановку задач, обсуждение и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pukhnachov V. V.** An integrable model of nonstationary rotationally symmetrical motion of ideal incompressible liquid // Nonlinear Dynamics. 2000. N 22. P. 101–109.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. **Пухначев В. В.** Новый класс точных решений уравнений Эйлера // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 777–780.
4. **Мещерякова Е. Ю.** Точные решения уравнений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 66–75.
5. **Капцов О. В.** Стационарные вихревые структуры в идеальной несжимаемой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1990. Т. 98, № 2. С. 532–541.
6. **Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1994. С. 174–186.
7. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. С. 667–679.

Поступила в редакцию 30/XII 2002 г.