

УДК 534.014.5, 534.242, 621.316.544.1

## УПРАВЛЕНИЕ БИФУРКАЦИЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ СУПЕРГАРМОНИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

А. М. Элнаггар, К. М. Халил

Университет г. Бенха, 13518 Бенха, Египет  
E-mail: khalil\_m\_kh@yahoo.com

Слабонелинейный осциллятор моделируется дифференциальным уравнением. Супергармоническая резонансная система может иметь седлообразную бифуркацию, в результате чего она скачком переходит из одного состояния в другое. Для управления скачком и областью неустойчивости нелинейного осциллятора разработана комбинация контроллеров обратной связи. С помощью метода мультимасштабирования получены уравнения для управления бифуркацией. В результате численного моделирования и сравнения характера движения неуправляемой и управляемой систем установлено, что эффективный контроллер можно получить, изменяя коэффициент усиления обратной связи. Обнаружено, что наличие линейной обратной связи может привести к задержке появления седлообразной бифуркации, в то время как наличие нелинейной обратной связи может ее исключить. Предложены возможные направления дальнейшего исследования седлообразной бифуркации. Показано, что при соответствующем выборе коэффициента нелинейной обратной связи амплитуду установившегося сигнала можно подавить.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, седлообразная бифуркация, контроллер обратной связи, супергармонический резонанс, мультимасштабирование.

**Введение.** Движение нелинейных систем имеет сложный характер. В частности, нелинейность может привести к изменению области устойчивости инженерных систем. Этим объясняется интерес к исследованию динамики и способов управления поведением нелинейных систем в последние два десятилетия [1, 2].

Большое внимание уделяется управлению бифуркацией неконтролируемых нелинейных систем с помощью конструируемых входных сигналов [3–5]. Явление бифуркации существенно зависит от собственных значений линеаризованной модели. Следовательно, управляя этими собственными значениями, можно управлять бифуркацией. Основные задачи в области управления бифуркацией — задержка начала бифуркации, стабилизация ответвленных решений, изменение параметров точки бифуркации, изменение формы или типа бифуркации, изменение амплитуды и оптимизация поведения системы вблизи точки бифуркации. В [3] приведен обзор работ по данной тематике и намечены новые перспективные направления исследований в области управления бифуркацией. Как известно, в некоторых нелинейных системах седлообразная бифуркация существует как при первичном, так и при вторичном резонансе [6–9]. При постепенном изменении контролирующего параметра нелинейная система движется вдоль одной ветви кривой до точки, в которой происходит седлообразная бифуркация, и скачком переходит на другую резонансную ветвь. Такое поведение динамических систем нежелательно. Поэтому важно изучить явление скачка и уметь управлять областью неустойчивости [10]. В [11–13] изучен только первичный резонанс нелинейной системы с одной степенью свободы.

В последнее время управление нелинейными системами исследовалось во многих работах при изучении различных явлений, возникающих в физических системах. В [14] исследовались устойчивость и бифуркация в магнитной системе подшипников с задержкой времени. В [15] изучались основной и субгармонический резонансы гармонического осциллятора с задержкой появления обратной связи, в [16] — способы управления вибрацией консольной балки с задержкой появления обратной связи. В [17] исследовалось влияние многократных задержек на бифуркацию и хаос в неавтономных системах. Устойчивость и колебания решений двух связанных уравнений Дуффинга с задержкой обратной связи изучались в [18].

В работе [13] рассмотрена седлообразная бифуркация при внешнем воздействии на линейный осциллятор в случае первичного резонанса. В данной работе изучаются способы управления седлообразной бифуркацией в случае супергармонического резонанса пятого порядка. Разработан контроллер обратной связи и методом множественных масштабов в теории возмущения получены уравнения управления бифуркацией [19–22]. Установлена зависимость появления седлообразной бифуркации от коэффициентов в уравнении обратной связи.

**1. Управление супергармоническим резонансом.** Рассматривается модель вынужденной слабонелинейной системы с одной степенью свободы с третьей и пятой степенями нелинейности и управляемой обратной связью. Дифференциальное уравнение такой модели записывается в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon(2\mu\dot{x} + \alpha x^3 + \delta x^5) = P \cos(\Omega t) + u(x, \dot{x}), \quad (1)$$

где  $\omega_0$  — собственная частота в линейном уравнении;  $\varepsilon$  — положительный малый параметр;  $\mu > 0$  — коэффициент демпфирования;  $\alpha, \delta$  — коэффициенты при нелинейных членах;  $P, \Omega$  — амплитуда и частота внешней нагрузки соответственно;  $u(x, \dot{x})$  — подлежащий конструированию сигнал обратной связи. Уравнение (1) моделирует поведение кабеля висячего моста газовой турбины [9]. При  $u(x, \dot{x}) = 0$  уравнение (1) моделирует движение неуправляемой системы.

Кривая установившегося движения неуправляемой системы может содержать точки седлообразной бифуркации, что обычно приводит к нежелательному скачку и появлению гистерезиса. Ниже предлагается формула обратной связи с линейным и нелинейными членами, предназначенная для устранения или задержки появления седлообразной бифуркации в случае супергармонического резонанса. В общем случае уравнение контроллера обратной связи можно записать в виде

$$u(x, \dot{x}) = 2k_{11}x + k_{31}x^3 + k_{33}x\dot{x}^2 + k_{51}x^5 + k_{53}x^3\dot{x}^2 + k_{55}x\dot{x}^4,$$

где  $2k_{11}$  — коэффициент линейной обратной связи;  $k_{3i}$  ( $i = 1, 3$ ),  $k_{5j}$  ( $j = 1, 3, 5$ ) — коэффициенты нелинейной обратной связи.

Для того чтобы управлять бифуркацией неуправляемой системы, необходимо в первую очередь определить порядок обратной связи. В проведенных ранее исследованиях поведения вынужденной системы с одной степенью свободы (см., например, [22]) показано, что бифуркацию можно моделировать уравнениями, описывающими эволюцию амплитуды и фазы отклика. С помощью модифицированного уравнения, используя комбинацию линейного и нелинейных членов обратной связи, можно управлять бифуркацией неуправляемой системы. Уравнение модуляции неуправляемой системы выводится из условия отсутствия в решении секулярных членов порядка  $O(\varepsilon)$ . Поэтому в уравнении обратной связи выбираются члены порядка  $O(\varepsilon)$ . В соответствии с этим запишем уравнение обратной связи в виде

$$u(x, \dot{x}) = \varepsilon(2k_{11}x + k_{31}x^3 + k_{33}x\dot{x}^2 + k_{51}x^5 + k_{53}x^3\dot{x}^2 + k_{55}x\dot{x}^4).$$

Следовательно, уравнение управляемой системы принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon(2\mu\dot{x} + \alpha x^3 + \delta x^5) = \\ = P \cos(\Omega t) + \varepsilon(2k_{11}x + k_{31}x^3 + k_{33}x\dot{x}^2 + k_{51}x^5 + k_{53}x^3\dot{x}^2 + k_{55}x\dot{x}^4). \end{aligned} \quad (2)$$

1.1. *Уравнение модуляции.* В случае супергармонического резонанса выражения для амплитуды и частоты вынуждающей (внешней) силы представим в виде

$$P = 2f, \quad 5\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma, \quad (3)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ ;  $\sigma$  — параметр расстройки. Для получения приближенного решения уравнения (2) используем метод множественных масштабов [22]. Сначала найдем приближенное решение в виде

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2), \quad T_r = \varepsilon^r t, \quad r = 0, 1, \quad (4)$$

где  $T_0 = t$  — первый масштаб, ассоциированный с изменением частот  $\omega_0$ ,  $\Omega$ ;  $T_1 = \varepsilon t$  — медленный масштаб, ассоциированный с модуляцией амплитуды.

Подставляя представления (3), (4) в уравнение (2) и приравнявая члены одного и того же порядка по  $\varepsilon$  в обеих частях полученного уравнения, имеем систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} O(1): \quad D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 2f \cos(\Omega T_0), \\ O(\varepsilon): \quad D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\mu D_0 x_0 - \alpha x_0^3 - \delta x_0^5 + 2k_{11}x_0 + k_{31}x_0^3 + \\ + k_{33}x_0(D_0 x_0)^2 + k_{51}x_0^5 + k_{53}x_0^3(D_0 x_0)^2 + k_{55}x_0(D_0 x_0)^4, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $D_n = \partial/\partial T_n$ . Решая первое уравнение в (5) относительно  $x_0(T_0, T_1)$ , находим

$$x_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (6)$$

Подставим (6) во второе уравнение (5). С учетом того, что в полученном уравнении не должны содержаться секулярные члены, имеем уравнение

$$\begin{aligned} -2i\omega_0 \dot{A} - 2i\mu\omega_0 A + 2k_{11}A - 3\alpha_1 A^2 \bar{A} - 6\alpha_1 \Lambda^2 A - 10\delta_1 A^3 \bar{A}^2 - \delta_1 \Lambda^5 e^{i\sigma T_1} - \\ - 30\delta_1 \Lambda^4 A - 60\delta_1 \Lambda^2 A^2 \bar{A} + k_{33}(2\Omega^2 \Lambda^2 A + \omega_0^2 A^2 \bar{A}) + \\ + k_{53}(6\omega_0^2 \Lambda^2 A^2 \bar{A} + 2\omega_0^2 A^3 \bar{A}^2 + 6\Omega^2 \Lambda^2 A^2 \bar{A} + 6\Omega^2 \Lambda^4 A - \Omega^2 \Lambda^5 e^{i\sigma T_1}) + \\ + k_{55}(12\omega_0^2 \Omega^2 \Lambda^2 A^2 \bar{A} + 2\omega_0^4 A^3 \bar{A}^2 + 6\Omega^4 \Lambda^4 A + \Omega^4 \Lambda^5 e^{i\sigma T_1}) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Lambda = f(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1}$ ;  $\alpha_1 = \alpha - k_{31}$ ;  $\delta_1 = \delta - k_{51}$ .

Предположим, что

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и отделяя действительную и мнимую части, получаем систему автономных дифференциальных уравнений, управляющих амплитудой  $a$  и фазой  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \dot{a} = -\mu a - \frac{\delta_1 \Lambda^5}{\omega_0} \sin(\gamma) - \frac{k_{53}}{\omega_0} \Omega^2 \Lambda^5 \sin(\gamma) + \frac{k_{55}}{\omega_0} \Omega^4 \Lambda^5 \sin(\gamma); \\ a\dot{\gamma} = \left(\sigma + \frac{k_{11}}{\omega_0}\right) a - \frac{3\alpha_1 \Lambda^2}{\omega_0} a - \frac{3\alpha_1}{8\omega_0} a^3 - \frac{\delta_1 \Lambda^5}{\omega_0} \cos(\gamma) + \frac{k_{33} \Omega^2 \Lambda^2}{\omega_0} a + \frac{k_{33} \omega_0}{8} a^3 - \\ - \frac{15\delta_1 \Lambda^4}{\omega_0} a - \frac{15\delta_1 \Lambda^2}{2\omega_0} a^3 - \frac{5\delta_1}{16\omega_0} a^5 - \frac{k_{53} \Omega^2 \Lambda^5}{\omega_0} \cos(\gamma) + \frac{3k_{53} \Omega^2 \Lambda^4}{\omega_0} a + \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3k_{53}}{4\omega_0} (\Omega^2 + \omega_0^2) \Lambda^2 a^3 + \frac{k_{53}\omega_0}{16} a^5 + \frac{k_{55}\Omega^4 \Lambda^5}{\omega_0} \cos(\gamma) + \frac{3k_{55}\Omega^4 \Lambda^4}{\omega_0} a + \\
 & + \frac{3k_{55}\omega_0 \Omega^2 \Lambda^2}{2} a^3 + \frac{k_{55}\omega_0^3}{16} a^5. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Аппроксимацию первого порядка решения уравнения (2) можно записать в следующем виде:

$$x = a \cos(5\Omega t - \gamma) + 2f(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon).$$

1.2. *Установившиеся решения и их устойчивость.* При  $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$  установившееся периодическое решение исходного уравнения (2) соответствует неподвижной точке связанных уравнений (9), (10). Возводя в квадрат и складывая редуцированные уравнения, получаем соотношение между амплитудой и частотой (амплитудно-частотную характеристику) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \mu^2 a^2 + a^2 \left[ \left( \sigma + \frac{k_{11}}{\omega_0} \right) - \frac{3\alpha_1 \Lambda^2}{\omega_0} - \frac{3\alpha_1}{8\omega_0} a^2 + \frac{k_{33}}{\omega_0} \left( \Omega^2 \Lambda^2 + \frac{\omega_0^2}{8} a^2 \right) - \frac{15\delta_1 \Lambda^4}{\omega_0} - \frac{15\delta_1 \Lambda^2}{2\omega_0} a^2 - \right. \\
 \left. - \frac{5\delta_1}{16\omega_0} a^4 + \frac{3k_{53}\Omega^2 \Lambda^4}{\omega_0} + \frac{3k_{53}}{4\omega_0} (\Omega^2 + \omega_0^2) \Lambda^2 a^2 + \frac{k_{53}\omega_0}{16} a^4 + \frac{3k_{55}\Omega^4 \Lambda^4}{\omega_0} + \right. \\
 \left. + \frac{3k_{55}\omega_0 \Omega^2 \Lambda^2}{2} a^2 + \frac{k_{55}\omega_0^3}{16} a^4 \right]^2 = \left( \frac{\delta_1 \Lambda^5}{\omega_0} + \frac{k_{53}\Omega^2 \Lambda^5}{\omega_0} - \frac{k_{55}\Omega^4 \Lambda^5}{\omega_0} \right)^2. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Устойчивость особой точки уравнений (9), (10) исследуется с использованием классического метода линеаризации: в установившееся решение вводится малое возмущение, и полученное уравнение линеаризуется. Затем рассматриваются собственные значения соответствующей системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Положительное значение вещественной части по крайней мере одного собственного значения соответствуют неустойчивому решению. Если вещественные части всех собственных значений отрицательны, то решение устойчиво. Если вещественная часть собственного значения равна нулю, то происходит бифуркация решения. Точки возврата (точки седлообразной бифуркации) находятся на вертикальных касательных к амплитудно-частотной кривой. Собственные значения матрицы Якоби удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \Gamma = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Gamma = \mu^2 + \left[ \left( \sigma + \frac{k_{11}}{\omega_0} \right) - \frac{3\alpha_1 \Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha_1}{8\omega_0} a^2 - \frac{15\delta_1 \Lambda^4}{\omega_0} - \frac{45\delta_1 \Lambda^2}{2\omega_0} a^2 - \frac{25\delta_1}{16\omega_0} a^4 + \right. \\
 \left. + k_{33} \left( \frac{\Omega^2 \Lambda^2}{\omega_0} + \frac{3\omega_0}{8} a^2 \right) + \frac{3k_{53}\Omega^2 \Lambda^4}{\omega_0} + \frac{9k_{53}}{4} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_0} + \omega_0 \right) \Lambda^2 a^2 + \frac{5k_{53}\omega_0}{16} a^4 + \right. \\
 \left. + \frac{3k_{55}\Omega^4 \Lambda^4}{\omega_0} + \frac{9k_{55}\Omega^2 \Lambda^2 \omega_0}{2} a^2 + \frac{5k_{55}\omega_0^3}{16} a^4 \right] \left[ \left( \sigma + \frac{k_{11}}{\omega_0} \right) - \frac{3\alpha_1 \Lambda^2}{\omega_0} - \frac{3\alpha_1}{8\omega_0} a^2 - \right. \\
 \left. - \frac{15\delta_1 \Lambda^4}{\omega_0} - \frac{15\delta_1 \Lambda^2}{2\omega_0} a^2 - \frac{5\delta_1}{16\omega_0} a^4 + k_{33} \left( \frac{\Omega^2 \Lambda^2}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{8} a^2 \right) + \frac{3k_{53}\Omega^2 \Lambda^4}{\omega_0} + \right. \\
 \left. + \frac{3k_{53}}{4} \left( \frac{\Omega^2}{\omega_0} + \omega_0 \right) \Lambda^2 a^2 + \frac{k_{53}\omega_0}{16} a^4 + \frac{3k_{55}\Omega^4 \Lambda^4}{\omega_0} + \frac{3k_{55}\Omega^2 \Lambda^2 \omega_0}{2} a^2 + \frac{k_{55}\omega_0^3}{16} a^4 \right].
 \end{aligned}$$

Следовательно, установившееся движение неустойчиво, если  $\Gamma < 0$ , и устойчиво, если  $\Gamma \geq 0$ . В случае если выполняется условие  $\Gamma = 0$ , что соответствует наличию вертикальной касательной к частотной кривой, может иметь место седлообразная бифуркация. Появление седлообразной бифуркации может приводить к скачку и возникновению гистерезиса установившегося движения. Таким образом, следует изменить динамику движения, управляя бифуркацией.

Необходимо объяснить причину возникновения бифуркации в неконтролируемой системе. Характеристическое уравнение неуправляемой системы получается из уравнения (12), если в уравнении обратной связи все коэффициенты положить равными нулю ( $k_{ij} = 0$ ):

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2 + \left( \sigma - \frac{3\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha}{8\omega_0} a^2 - \frac{15\delta\Lambda^4}{\omega_0} - \frac{45\delta\Lambda^2}{2\omega_0} a^2 - \frac{25\delta}{16\omega_0} a^4 \right) \times \\ \times \left( \sigma - \frac{3\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2 - \frac{15\delta\Lambda^4}{\omega_0} - \frac{15\delta\Lambda^2}{2\omega_0} a^2 - \frac{5\delta}{16\omega_0} a^4 \right) = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что сумма собственных значений равна  $-2\mu$ . Эта сумма отрицательна, так как  $\mu > 0$ . Следовательно, по крайней мере одно из двух собственных значений имеет отрицательную вещественную часть. Это означает невозможность существования пары чисто мнимых собственных значений и, следовательно, бифуркации Хопфа. Однако может иметь место также статическая бифуркация. Если в уравнении (13) последние два члена равны нулю, то одно из собственных значений равно нулю и существует седлообразная бифуркация. В этом случае при установившемся движении происходит скачок. Этот факт используется ниже для того, чтобы исключить седлообразную бифуркацию, управляя собственными значениями, а именно чтобы исключить появление нулевого собственного значения соответствующей матрицы Якоби.

Для неуправляемой системы, в случае если выполняются неравенства  $\sigma\alpha > 0$  и  $\sigma\delta > 0$ , всегда существует значение  $\sigma$ , такое что собственное значение обращается в нуль, и, следовательно, существует седлообразная бифуркация. Учитывая сказанное выше, необходимо сконструировать обратную связь, трансформирующую неравенства  $\sigma\alpha > 0$  и  $\sigma\delta > 0$  для неконтролируемой системы в неравенства  $(\sigma + k_{11}/\omega_0)(\alpha - k_{31}) < 0$  и  $(\sigma + k_{11}/\omega_0)(\delta - k_{51}) < 0$  для контролируемой системы, и тем самым исключить или задержать появление нулевого собственного значения.

1.3. *Управление с помощью линейной обратной связи.* Ниже рассматривается линейная обратная связь  $u(x, \dot{x}) = 2\epsilon k_{11}x$ . Покажем, что супергармонический резонанс можно предотвратить, выбирая соответствующую линейную обратную связь. В этом случае характеристическое уравнение (12) принимает следующий вид:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2 + \left[ \left( \sigma + \frac{k_{11}}{\omega_0} \right) - \frac{3\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha}{8\omega_0} a^2 - \frac{15\delta\Lambda^4}{\omega_0} - \frac{45\delta\Lambda^2}{2\omega_0} a^2 - \frac{25\delta}{16\omega_0} a^4 \right] \times \\ \times \left[ \left( \sigma + \frac{k_{11}}{\omega_0} \right) - \frac{3\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2 - \frac{15\delta\Lambda^4}{\omega_0} - \frac{15\delta\Lambda^2}{2\omega_0} a^2 - \frac{5\delta}{16\omega_0} a^4 \right] = 0.$$

Всегда существует значение параметра  $k_{11}$ , при котором выполняются неравенства  $(\sigma + k_{11}/\omega_0)\alpha < 0$  и  $(\sigma + k_{11}/\omega_0)\delta < 0$ . Следовательно, оба собственных значения имеют отрицательные вещественные части. Седлообразная бифуркация, которая происходит в неуправляемой системе, в управляемой системе отсутствует в интервале изменения параметра  $\sigma$ .

1.4. *Управление с помощью нелинейной обратной связи.* В случае нелинейной обратной связи седлообразная бифуркация происходит, если выполняется условие  $d^2\sigma/da^2 = 0$ . При этом решение имеет вид

$$\sigma_{\pm} = M \pm \sqrt{N^2 a^4 - \mu^2},$$

где

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{3\alpha_1\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{3\alpha_1}{4\omega_0} a^2 + \frac{15\delta_1\Lambda^4}{\omega_0} + \frac{15\delta_1\Lambda^2}{\omega_0} a^2 + \frac{15\delta_1}{16\omega_0} a^4 - k_{33} \left( \frac{\Lambda^2\Omega^2}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{4} a^2 \right) - \\
 &- k_{53} \left( \frac{3\Lambda^4\Omega^2}{\omega_0} + \frac{3\Lambda^2\Omega^2}{2\omega_0} a^2 + \frac{3\Lambda^2\omega_0}{2} a^2 + \frac{3\omega_0}{16} a^4 \right) - k_{55} \left( \frac{3\Lambda^4\Omega^4}{\omega_0} + 3\Lambda^2\Omega^2\omega_0 a^2 + \frac{3\omega_0^3}{16} a^4 \right), \\
 N &= -\frac{3\alpha_1}{8\omega_0} - \frac{15\delta_1\Lambda^2}{2\omega_0} - \frac{5\delta_1}{8\omega_0} a^2 + \frac{k_{33}\omega_0}{8} + k_{53} \left( \frac{3\Lambda^2\Omega^2}{4\omega_0} + \frac{\omega_0}{8} a^2 + \frac{3\Lambda^2\omega_0}{4} \right) + \\
 &+ k_{55} \left( \frac{3\Lambda^2\Omega^2\omega_0}{2} + \frac{\omega_0^3}{8} a^2 \right).
 \end{aligned}$$

При  $\mu^2 < N^2 a^4$  существует интервал  $\sigma_- < \sigma < \sigma_+$ , в котором уравнение (11) имеет три вещественных положительных решения. При  $\mu^2 \rightarrow N^2 a^4$  этот интервал стягивается в точку  $\sigma = M$ . Из уравнения (11) следует, что критическое значение амплитуды силы является решением уравнения

$$(\mu^2\omega_0^2 R_1 + \sqrt{R_1^2 + 32\mu\omega_0 R_2})/R_2 - (\delta_1 + \Omega^2 k_{53} - \Omega^4 k_{55})^2 \Lambda^{10} = 0,$$

где  $R_1 = -3\alpha_1 - 60\delta_1\Lambda^2 + k_{33}\omega_0^2 + 6k_{53}\Lambda^2(\Omega^2 + \omega_0^2) + 12k_{55}\Lambda^2\Omega^2\omega_0^2$ ;  $R_2 = 5\delta_1 - k_{53}\omega_0^2 - k_{55}\omega_0^4$ ;  $\Lambda = f_{cr}(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1}$ .

При  $f < f_{cr}$  имеется только одно решение, при  $f > f_{cr}$  существует три решения. При фиксированной амплитуде силы максимальная амплитуда собственных колебаний управляемой системы равна

$$a_p = |\delta - k_{51} + \Omega^2 k_{53} - \Omega^4 k_{55}| \Lambda^5 / (\omega_0 \mu).$$

Заметим, что амплитуда  $a_p$  является функцией нелинейного члена  $\delta$  и коэффициентов нелинейной обратной связи  $k_{51}$ ,  $k_{53}$ ,  $k_{55}$ . Максимальная амплитуда  $a_p$  уменьшается, если коэффициенты  $k_{51}$  и  $k_{55}$  имеют тот же знак, что и параметр  $\delta$ , и увеличивается, если коэффициент  $k_{53}$  имеет тот же знак, что и  $\delta$ . Для того чтобы управление было эффективным, желательно, чтобы амплитуда  $a_p$  была как можно меньшей. В соответствии с этим оптимальная комбинация линейного и нелинейного членов обратной связи имеет вид

$$u(x, \dot{x}) = \varepsilon(2k_{11}x + k_{31}x^3 + k_{33}x\dot{x}^2 + k_{51}x^5 + k_{55}x\dot{x}^4).$$

Здесь коэффициент  $k_{53}$  принят равным нулю, а знаки коэффициентов  $k_{51}$ ,  $k_{55}$  должны быть такими же, как у параметра  $\delta$ . При таком законе управления критическая амплитуда силы, при которой происходит седлообразная бифуркация управляемой системы, больше, чем у неуправляемой системы.

**2. Результаты численных расчетов и их обсуждение.** Ниже приведены результаты численного анализа с целью показать влияние обратной связи, предложенной в п. 1, на поведение нелинейной динамической системы. На рис. 1–9 представлены результаты расчетов для системы с параметрами  $\omega_0 = 5,0$ ,  $\mu = 0,05$ ,  $\alpha = 1,0$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $\Omega = 1,0$  в случае супергармонического резонанса пятого порядка. Сплошные линии соответствуют устойчивым решениям, штриховые — неустойчивым, за исключением случаев, оговоренных особо.

В случае супергармонической нелинейной неуправляемой системы при отсутствии обратной связи критическое значение возбуждающей (внешней) силы при приведенных выше значениях параметров равно  $f_{cr} = 17,8079$ . Если амплитуда меньше критического значения, то для неуправляемой системы седлообразная бифуркация отсутствует. Если амплитуда больше критического значения, то в неуправляемой супергармонической нелинейной

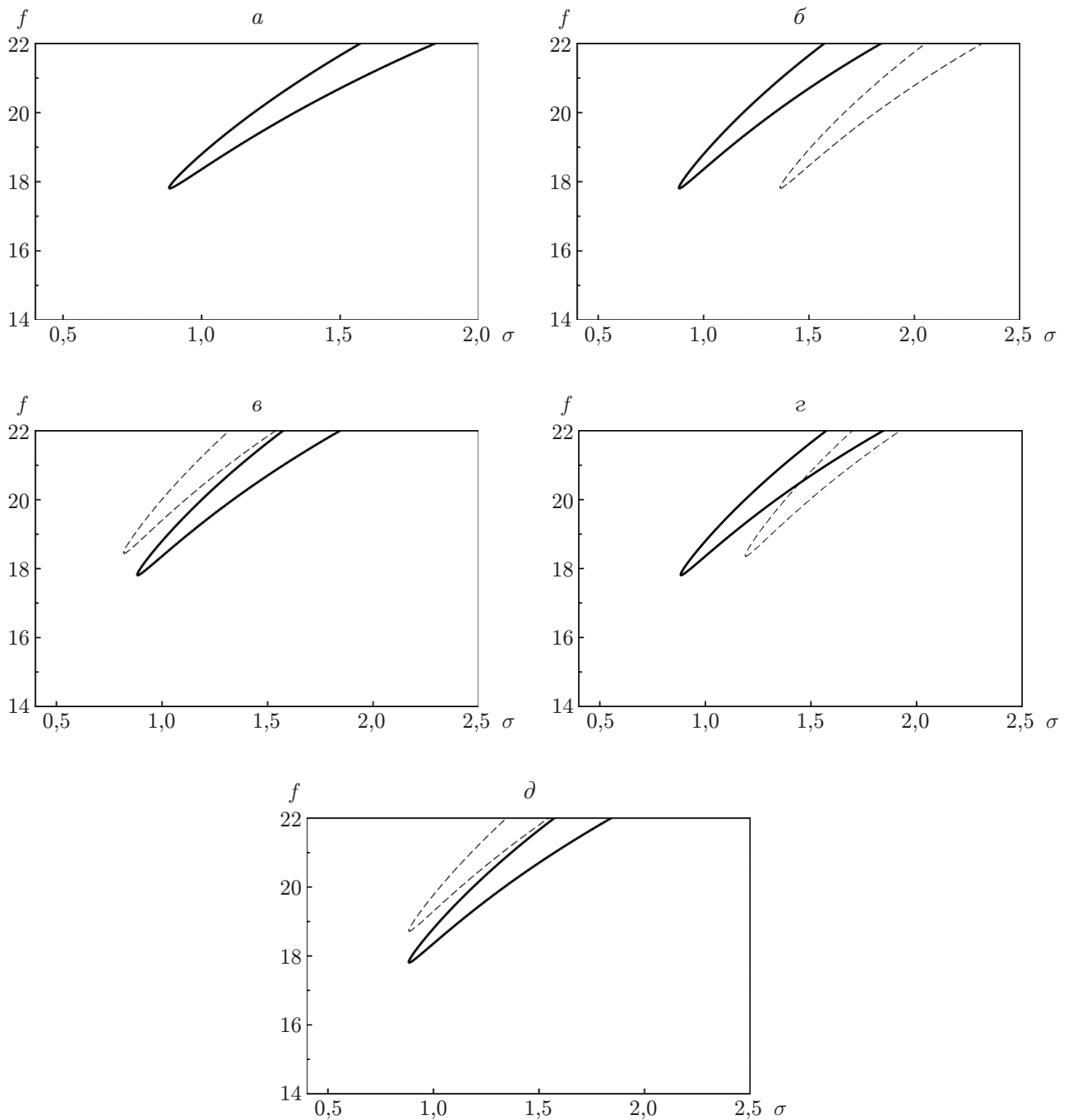


Рис. 1. Области биустойчивости для неуправляемой и управляемой супергармонических резонансных систем:

*a* — неуправляемая система, *б* — система, управляемая с помощью линейной обратной связи, при  $k_{11} = -2,4$ , *в* — система, управляемая с помощью нелинейной обратной связи, при  $k_{31} = 0,09$ ,  $k_{33} = 0,04$ ,  $k_{51} = 0,08$ ,  $k_{53} = 0,01$ ,  $k_{55} = 0,01$ , *г* — система, управляемая с помощью обратной связи с линейными и нелинейными членами, при  $k_{11} = -1,9$ ,  $k_{31} = 0,06$ ,  $k_{33} = 0,05$ ,  $k_{51} = 0,08$ ,  $k_{53} = 0,02$ ,  $k_{55} = 0,01$ , *д* — система, управляемая с помощью нелинейной обратной связи, при  $k_{51} = 0,11$ ; сплошные линии — неуправляемая система, штриховые — управляемая система

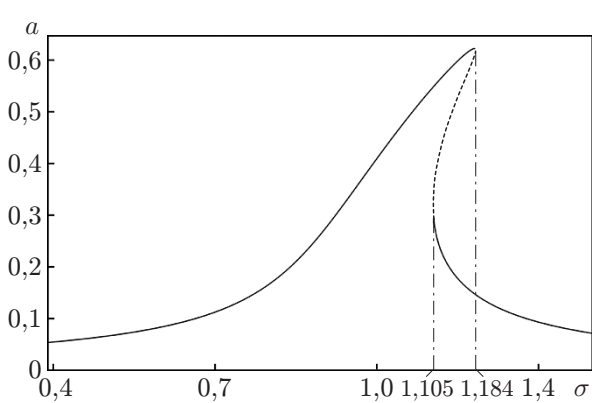


Рис. 2

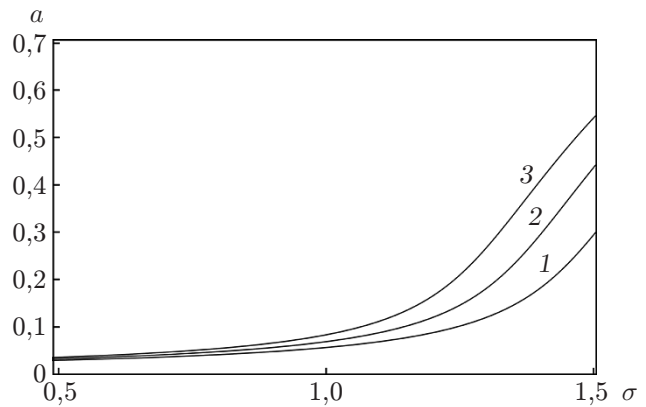


Рис. 3

Рис. 2. Амплитудно-частотная кривая неуправляемой супергармонической резонансной системы пятого порядка при  $f = 19$

Рис. 3. Влияние линейной обратной связи на амплитудно-частотную зависимость супергармонической резонансной системы пятого порядка:

1 —  $k_{11} = -2,9$ ; 2 —  $k_{11} = -2,4$ ; 3 —  $k_{11} = -2,0$

системе (1) при  $\alpha > 0, \delta > 0$  и  $\alpha < 0, \delta < 0$  происходит седлообразная бифуркация в интервалах  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ . На рис. 1,а показана область биустойчивости (область существования двух устойчивых решений) неуправляемой супергармонической нелинейной системы в плоскости  $(\sigma, f)$ . В точках, принадлежащих приведенным на рис. 1,а двум кривым, касательная к частотной кривой является вертикальной и имеет место седлообразная бифуркация неуправляемой системы. В области, заключенной между двумя кривыми, существует три стационарных периодических решения. Два из этих решений являются устойчивыми и одно — неустойчивым. С помощью соответствующего выбора линейной и нелинейной обратных связей можно задержать появление седлообразной бифуркации. На рис. 1,б указанная область сдвигается вправо, поэтому седлообразная бифуркация наступает позднее. На рис. 1,в-д показаны области биустойчивости управляемой системы при различных комбинациях линейной и нелинейной обратных связей. Для управляемой системы области биустойчивости становятся более узкими и сдвигаются влево и вверх. При этом изменяется критическое значение амплитуды вынуждающей (внешней) силы.

На рис. 2 представлены кривые амплитудно-частотной характеристики для неуправляемой системы при  $f = 19$ . Кривая амплитудно-частотной характеристики является многозначной, седлообразная бифуркация происходит при значениях внешней расстройки  $\sigma = 1,105; 1,184$ . Три вида обратной связи (линейная, нелинейная и комбинация линейной и нелинейной связей) могут быть использованы для устранения или задержки появления седлообразной бифуркации.

На рис. 3 представлены кривые амплитудно-частотной характеристики супергармонической резонансной системы пятого порядка для различных линейных связей. При уменьшении коэффициента  $k_{11}$  кривые сдвигаются вправо и появление седлообразной бифуркации (скачка и явления гистерезиса) задерживается.

На рис. 4 показана амплитудно-частотная зависимость системы, управляемой с помощью нелинейной обратной связи. Видно, что, выбрав соответствующим образом нелинейную обратную связь, можно устранить седлообразную бифуркацию. Более того, в управляемой системе скачок и явление гистерезиса отсутствуют в том же интервале значений параметра расстройки  $\sigma$ , что и в неуправляемой системе.



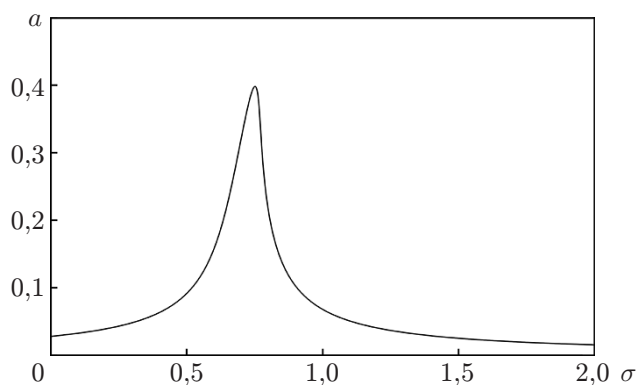


Рис. 4

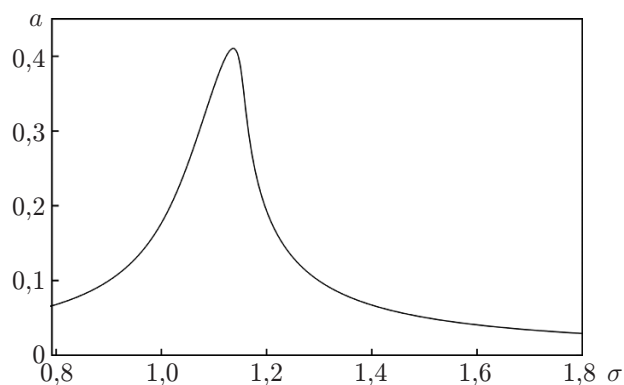


Рис. 5

Рис. 4. Амплитудно-частотная кривая супергармонической резонансной системы пятого порядка, управляемой с помощью нелинейной обратной связи, при  $k_{31} = 0,09$ ,  $k_{33} = 0,04$ ,  $k_{51} = 0,18$ ,  $k_{53} = 0,01$ ,  $k_{55} = 0,01$

Рис. 5. Амплитудно-частотная кривая супергармонической резонансной системы пятого порядка, управляемой с помощью обратной связи с линейными и нелинейными членами, при  $k_{11} = -1,9$ ,  $k_{31} = 0,06$ ,  $k_{33} = 0,05$ ,  $k_{51} = 0,18$ ,  $k_{53} = 0,02$ ,  $k_{55} = 0,01$

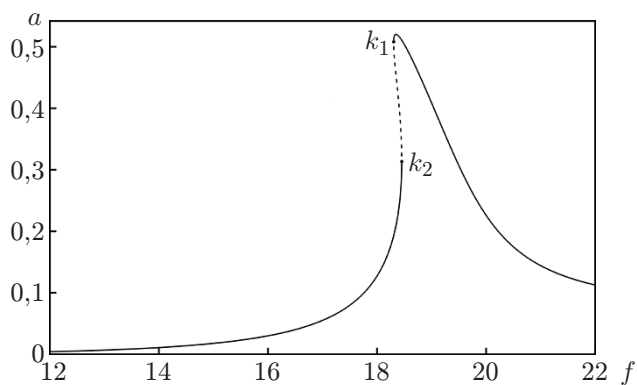


Рис. 6

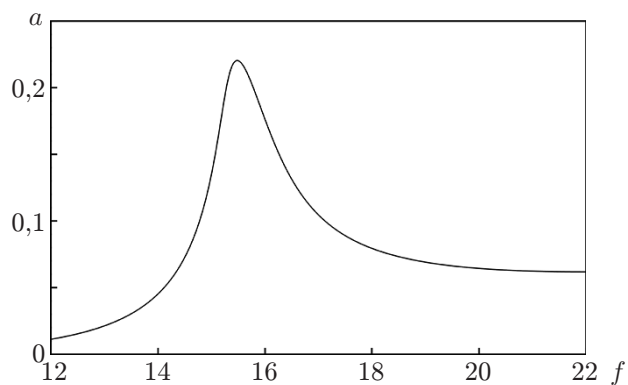


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость амплитуды колебаний  $a$  от амплитуды  $f$  возбуждающей (внешней) силы для неуправляемой супергармонической резонансной системы пятого порядка при  $\sigma = 1$

Рис. 7. Зависимость амплитуды колебаний  $a$  от амплитуды  $f$  возбуждающей (внешней) силы для супергармонической резонансной системы пятого порядка, управляемой с помощью линейной обратной связи, при  $k_{11} = -2,4$ ,  $\sigma = 1$

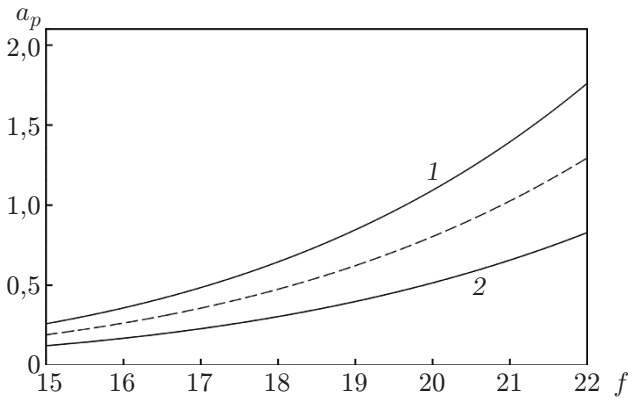


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость максимальной амплитуды собственных колебаний  $a_p$  от амплитуды  $f$  возбуждающей (внешней) силы для супергармонической резонансной системы пятого порядка:

сплошные линии — управляемая система, штриховая — неуправляемая система; 1 —  $k_{53} = 0,18$ , 2 —  $k_{51} = k_{55} = 0,18$

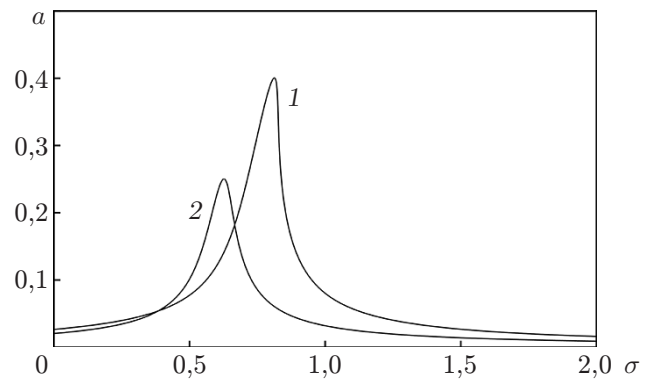


Рис. 9

Рис. 9. Амплитудно-частотная кривая при различных значениях коэффициента  $k_{51}$  нелинейной обратной связи:

1 —  $k_{51} = 0,18$ , 2 —  $k_{51} = 0,3$

Седлообразной бифуркацией можно управлять также с помощью комбинации линейной и нелинейной обратных связей. На рис. 5 видно, что в этом случае седлообразная бифуркация исключается (в отличие от случая, представленного на рис. 2). Из приведенных выше результатов следует, что с помощью коэффициентов нелинейной обратной связи  $k_{51}$ ,  $k_{55}$  можно управлять критическим значением амплитуды внешнего возбуждения более эффективно, чем с помощью коэффициентов  $k_{31}$ ,  $k_{33}$ ,  $k_{53}$ .

Таким образом, из приведенных результатов следует, что с помощью комбинации линейной и нелинейной обратных связей можно эффективно управлять супергармонической резонансной системой. На рис. 6 приведен график зависимости  $a(f)$  при  $\sigma = 1$ , которая следует из уравнения (11). В точках  $k_1$  и  $k_2$  кривая имеет вертикальные касательные, и, следовательно, в этих точках происходит скачок. Видно, что зависимость  $a(f)$  является неоднозначной. Из рис. 7 следует, что при управлении поведением системы с помощью линейной связи неоднозначность исчезает. На рис. 8 приведена зависимость  $a_p(f)$ . Если система управляется с помощью нелинейной обратной связи  $u = \varepsilon(k_{51}x^5 + k_{55}x\dot{x}^4)$ , то максимальная амплитуда уменьшается, в то время как управление с помощью нелинейной связи  $u = \varepsilon k_{53}x^3\dot{x}^2$  может привести к увеличению максимальной амплитуды (рис. 9). На рис. 9 приведена зависимость  $f(\sigma)$  для двух значений  $k_{51}$ . Видно, что седлообразная бифуркация отсутствует и с уменьшением коэффициента  $k_{51}$  амплитуда отклика уменьшается.

**Заключение.** В работе получены следующие результаты. Для управления супергармонической резонансной системой пятого порядка предложено уравнение обратной связи, содержащее линейный и нелинейные члены. Исследовано поведение системы, управляемой с помощью комбинации линейной и нелинейной связей. Показано, что, управляя системой с помощью комбинаций линейной и нелинейной связей, можно задержать или исключить появление седлообразной бифуркации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Gopalsamy K.** Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.
2. **Kuang Y.** Delay differential equations with application in population dynamics. N. Y.: Springer, 2002.
3. **Chen G., Moiola J. L., Wang H. O.** Bifurcation control: Theories, methods and applications // Intern. J. Bifurcat. Chaos. 2000. V. 10. P. 511–548.
4. **Harb A. M., Widyan M. S.** Chaos and bifurcation control of SSR in the IEEE second benchmark model // Chaos, Solitons Fractals. 2004. V. 21. P. 537–552.
5. **Ming-ge Z., Lee C. I.** Nonlinear dynamics and control of chaos for a rotational machine with a hexagonal centrifugal governor with a spring // J. Sound Vibrat. 2003. V. 262. P. 845–864.
6. **Romulus B., Helena E. N., Edward O.** Lack of predictability in dynamical systems with drift: Scaling of indeterminate saddle-node bifurcation // Phys. Lett. A. 2003. V. 319. P. 79–84.
7. **Deepak V. R., William L. K., Richard H. R.** Perturbation solution for secondary bifurcation in the quadratically-damped Mathieu equation // Intern. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39. P. 491–502.
8. **Leung A. Y. T., Ji J. C., Chen G.** Resonance control for a forced single-degree of freedom nonlinear system // Intern. J. Bifurcat. Chaos. 2004. V. 14, N 4. P. 1423–1429.
9. **Ke-an L., Han X., Rong-fan C.** Bifurcation control of nonlinear oscillator in primary and secondary resonance // J. Cent. South Univ. Technol. 2007. V. 6. P. 826–831.
10. **Mao-an H., Ping B., Dong-mei X.** Bifurcation of limit cycles and separatrix loops in singular Lienard systems // Chaos, Solitons Fractals. 2004. V. 20. P. 529–546.
11. **Maccari A.** Saddle-node bifurcations of cycles in a relief valve // Nonlinear Dynamics. 2000. V. 22. P. 225–247.
12. **Ji C. J., Leung A. Y. T.** Bifurcation control of a parametrically excited Duffing system // Nonlinear Dynamics. 2002. V. 27. P. 411–417.
13. **Elnaggar A. M., El-Bassiouny A. F., Khalil K. M.** Saddle-node bifurcation control for an odd non-linearity problem // Global J. Pure Appl. Math. 2011. V. 7, N 2. P. 213–229.
14. **Wang H., Liu J.** Stability and bifurcation analysis in a magnetic bearing system with time delays // Chaos, Solitons Fractals. 2005. V. 26, N 3. P. 813–825.
15. **El-Bassiouny A. F.** Fundamental and subharmonic resonances of harmonically oscillation with time delay state feedback // Shock Vibration. 2006. V. 13. P. 65–83.
16. **El-Bassiouny A. F.** Vibration control of a cantilever beam with time delay state feedback // Z. Naturforsch. 2006. Bd 61a. S. 1–12.
17. **Sun Z., Xu W., Yang X., Fang T.** Effects of time delays on bifurcation and chaos in a non-autonomous system with multiple time delays // Chaos, Solitons Fractals. 2007. V. 31, N 1. P. 39–53.
18. **El-Bassiouny A. F.** Stability and oscillation of two coupled duffing equations with time delay state feedback // Physica Scripta. 2006. V. 75. P. 726–735.
19. **Jia-shi T., Wen-bin F., Ke-an L.** Bifurcations of a parametrically excited oscillator with strong nonlinearity // Chinese Phys. 2002. V. 11, N 10. P. 1004–1007.
20. **Jia-shi T., Zi-li C.** Amplitude control of limit cycle in van der Pol system // Intern. J. Bifurcat. Chaos. 2006. V. 16, N 2. P. 487–495.
21. **Jia-shi T., Ke-jian O.** Controlling the period-doubling bifurcation of logistic model // Acta Physica Sinica. 2006. V. 55, N 9. P. 4437–4441.
22. **Nayfeh A. H.** Nonlinear oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. N. Y.: Wiley, 1979.

*Поступила в редакцию 19/Х 2011 г.*