

**ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ
НА ЭЛЕКТРОДАХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КАНАЛА
СО СКРЕЩЕННЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ И МАГНИТНЫМ ПОЛЯМИ
ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА ХОЛЛА**

Л. Е. Калижман

(Москва)

Рациональная организация рабочего процесса в различного рода магнитогидродинамических устройствах требует в первую очередь знания законов взаимодействия потока плазмы с электродами. Поэтому проблема пограничного слоя плазмы на электродах МГД-канала представляет собой существенный практический интерес. Как правило, в каналах ускорителей имеет место значительное разрежение, а напряженность магнитного поля достаточно велика. Это приводит к необходимости учета полей холловских токов и влияния параметра Холла на свойства переноса плазмы. Кроме того, в ускорителях плазмы обычно возникает отрыв электронной температуры.

Существующие работы по магнитогидродинамическому пограничному слою посвящены рассмотрению отдельных частных вопросов или решению упрощенных задач [1-3]. В литературе отсутствует полная система уравнений пограничного слоя сжимаемой замагниченной двухтемпературной плазмы на электродах.

Ниже даны уравнения пограничного слоя для указанного общего случая. Ограничимся полностью ионизованной квазинейтральной плазмой при малых значениях магнитного числа Рейнольдса.

Направим ось x вдоль проводящей стенки, ось y — по нормали к стенке, ось z — перпендикулярно осям x и y . Пусть внешнее магнитное поле характеризуется компонентами $B_x = B_y = 0$, $B_z = B$, а возникающее в плазме электрическое поле — компонентами E_x, E_y .

Система уравнений магнитной газодинамики для плоского стационарного потока плазмы будет [4]

$$mn \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + j_y B - \frac{\partial \pi_{xx}^i}{\partial x} - \frac{\partial \pi_{xy}^i}{\partial y} \quad (1)$$

$$mn \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - j_x B - \frac{\partial \pi_{yx}^i}{\partial x} - \frac{\partial \pi_{yy}^i}{\partial y} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} kn \left(u \frac{\partial T_i}{\partial x} + v \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) = & - \left(\frac{\partial q_x^i}{\partial x} + \frac{\partial q_y^i}{\partial y} \right) - P_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ & - \pi_{xx}^i \frac{\partial u}{\partial x} - \pi_{xy}^i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \pi_{yy}^i \frac{\partial v}{\partial y} + 3k \frac{m_e}{m} \frac{n}{\tau_e} (T_e - T_i) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} kn \left(u \frac{\partial T_e}{\partial x} + v \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial q_x^e}{\partial x} + \frac{\partial q_y^e}{\partial y} \right) - P_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \quad (4)$$

$$\begin{aligned} - \pi_{xx}^e \frac{\partial u}{\partial x} - \pi_{xy}^e \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \pi_{yy}^e \frac{\partial v}{\partial y} + j_x (E_x + vB)_i + j_y (E_y - uB) - \\ - \frac{3km_e}{m_i} \frac{n}{\tau_e} (T_e - T_i), \quad \frac{\partial}{\partial x} (nu) + \frac{\partial}{\partial y} (nv) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь u, v — проекции среднемассовой скорости плазмы на оси координат; n — числовая плотность электронов или ионов; p — общее давление; P_e, P_i — парциальные давления; T_e, T_i — температура электронов и ионов; m, m_e — масса иона и электрона соответственно.

Проекции плотности тока даются обобщенным законом [Ома

$$j_x = \sigma \left\{ E_x + vB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial x} - \frac{A_2}{A_1} \left[E_y - uB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + \frac{k}{e} \left(\frac{A_3}{A_1} \frac{\partial T_e}{\partial x} - \frac{A_4}{A_1} \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) \right\} \quad (6)$$

$$j_y = \sigma \left\{ E_y - uB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial y} + \frac{A_2}{A_1} \left(E_x + vB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{k}{e} \left(\frac{A_3}{A_1} \frac{\partial T_e}{\partial y} + \frac{A_4}{A_1} \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) \right\} \quad (7)$$

Здесь σ — проводимость плазмы поперек магнитного поля, A_k функции от параметра Холла для электронов H_e . Элементы тензоров вязких напряжений ионов и электронов имеют вид

$$\begin{aligned} \pi_{xx}^i &= -\eta_i \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} + H_i \frac{5}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ \pi_{xy}^i &= -\eta_i \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - H_i \frac{5}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ \pi_{yy}^i &= -\eta_i \left[\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - H_i \frac{5}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \pi_{xx}^e &= -\eta_e \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - H_e \frac{50}{3(2+\sqrt{2})} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \pi_{xy}^e &= -\eta_e \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + H_e \frac{20}{3(2+\sqrt{2})} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ \pi_{yy}^e &= -\eta_e \left[\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + H_e \frac{50}{3(2+\sqrt{2})} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Проекции векторов теплового потока электронов и ионов будут

$$\begin{aligned} q_x^i &= -\lambda_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial x} + \frac{5}{4} H_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right), \quad q_y^i = -\lambda_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial y} - \frac{5}{4} H_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \\ q_x^e &= -\lambda_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial x} - \frac{A_6}{A_5} \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) - \lambda_e \frac{e}{k} \frac{A_7}{A_5} \left(E_x + vB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) + \\ &+ \lambda_e \frac{e}{k} \frac{A_8}{A_5} \left(E_y - uB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) \\ q_y^e &= -\lambda_e \left(\frac{A_6}{A_5} \frac{\partial T_e}{\partial x} + \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) - \lambda_e \frac{e}{k} \frac{A_7}{A_5} \left(E_y - uB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) - \\ &- \lambda_e \frac{e}{k} \frac{A_8}{A_5} \left(E_x + vB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты переноса будут

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{ne^2 \tau_e}{m_e} A_1, \quad \eta_i = \frac{5/6 k T_i \tau_i n}{1 + 25/6 H_i^2}, \quad \lambda_i = \frac{25/8 n \tau_i}{1 + 25/16 H_i^2} \frac{k^2}{m} T_i \\ \eta_e &= \frac{5}{3(2+\sqrt{2})} \frac{k T_e \tau_e n}{1 + 100/9 + (2+\sqrt{2})^2 H_e^2}, \quad \lambda_e = \frac{5}{2} \frac{nk^2}{m_e} T_e \tau_e A_5 \end{aligned} \quad (10)$$

В этих выражениях

$$\begin{aligned} A_1 &= \nabla(1.93 + 1.07 H_e^2), \quad A_2 = \nabla(4.69 H_e + 1.07 H_e^3) \\ A_3 &= \nabla(1.55 - 1.6 H_e^2), \quad A_4 = \Delta 4.6 H_e \\ A_5 &= \nabla(2.58 + 0.391 H_e^2), \quad A_6 = \nabla(6.63 H_e + 1.06 H_e^3) \\ A_7 &= \nabla(2.55 + 0.42 H_e^2), \quad A_8 = \nabla(6.53 H_e + 1.07 H_e^3) \\ \nabla &= (1 + 6.73 H_e^2 + 1.67 H_e^4)^{-1}, \quad H_e = \omega_e \tau_e, \quad H_i = \omega_i \tau_i \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь H_e , H_i — параметры Холла, ω_e , ω_i — ларморовы частоты, а τ_i , τ_e — средние времена между столкновениями ионов между собой и электронов с ионами.

Система газодинамических уравнений (1) — (5) дополняется следующими соотношениями:

электродинамическими

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

уравнениями состояния

$$p_i = nkT_i, \quad p_e = nkT_e \quad (13)$$

соотношением

$$p = p_i + p_e \quad (14)$$

Для сопоставления между собой отдельных членов приведем уравнения к безразмерному виду. Выберем масштабы: продольных размеров x_0 , поперечных размеров y_0 , продольной и поперечной составляющей скоростей u_0 и v_0 соответственно, концентрации n_0 , температур T_0 , давлений $p_0 = n_0 k T_0$, компонент напряженности электрического поля E_0 , магнитного поля B_0 , времени между столкновениями τ_{e0} , τ_{i0} . Масштабы для параметров Холла будут

$$H_{e0} = \frac{eB_0}{m_e} \tau_{e0}, \quad H_{i0} = \frac{eB_0}{m} \tau_{i0}$$

Масштабы для функций A_k определяются соотношениями (11) по масштабу H_{e0} . Масштабы газокинетических величин σ_0 , η_{i0} , η_{e0} , λ_{i0} , λ_{e0} связаны соотношениями (10) с масштабами n_0 , T_0 , τ_{e0} , τ_{i0} , H_{e0} , H_{i0} , A_{10} .

При преобразовании уравнений к безразмерному виду введем следующие критерии подобия:

$$R_i = \frac{u_0 m n_0 x_0}{\eta_{i0}}, \quad P_i = \frac{\eta_{i0} c_p}{\lambda_{i0}} \quad \left(c_p = \frac{5}{2} \frac{k}{m} \right),$$

$$R_e = \frac{u_0 m n_0 x_0}{\eta_{e0}}, \quad P_e = \frac{\eta_{e0} c_p}{\lambda_{e0}}, \quad \Phi = \frac{e E_0 x_0}{k T_0}, \quad K = \frac{E_0}{B u_0}$$

$$M = \frac{u_0}{\sqrt{\kappa T_0 k / m}}, \quad M^D = \frac{\sigma_0 E_0}{e n_0 \sqrt{\kappa T_0 k / m}} \quad \left(\kappa = \frac{5}{3} \right)$$

Здесь R_e , R_i — числа Рейнольдса электронов и ионов соответственно; P_e , P_i — числа Прандтля электронов и ионов; Φ — критерий электрического поля; K — критерий нагрузки; M — число Маха; M^D — диффузионное число Маха, в котором за масштаб тока взято $\sigma_0 E_0$. Для масштабов y_0 и v_0 примем соотношения

$$y_0 = \frac{x_0}{\sqrt{R_i}}, \quad v_0 = \frac{u_0}{\sqrt{R_i}}$$

Тогда уравнение (1) в безразмерной форме с учетом (7), (8) будет иметь вид (чертой обозначаются величины, отнесенные к своим масштабам)

$$\begin{aligned} \bar{n} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\kappa M^2} + \bar{B} \bar{n} \bar{\tau}_e \left[\bar{A}_1 \left(\bar{E}_y - \bar{u} \bar{B} \frac{1}{K} + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{y}} \frac{\sqrt{\bar{R}_i}}{\Phi} \right) + \right. \\ & + \bar{A}_2 \frac{A_{20}}{A_{10}} \left(\bar{E}_x + \bar{v} \bar{B} \frac{1}{K \sqrt{\bar{R}_i}} + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\Phi} \right) \left. \right] \frac{M^D \Phi}{\kappa M^3 K} + \\ & + \bar{B} \bar{n} \bar{\tau}_e \left(\frac{A_{30}}{A_{10}} \bar{A}_3 \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{y}} \sqrt{\bar{R}_i} + \frac{A_{40}}{A_{10}} \bar{A}_4 \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{x}} \right) \frac{M^D}{\kappa M^3 K} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \bar{\eta}_i \left[\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{H}_i H_{i0} \frac{5}{3} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\sqrt{\bar{R}_i}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sqrt{\bar{R}_i} \right) \right] \right\} \frac{1}{R_i} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ \bar{\eta}_i \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{R_i} - \bar{H}_i H_{i0} \frac{5}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\sqrt{\bar{R}_i}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{1}{R_i} \right) \right] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда критерий Рейнольдса для ионов много больше других безразмерных критериев и их комбинаций M , M^D , Φ , K , H_{i0} , H_{e0} , A_{20}/A_{10} и др., и предположим, что удалось выбрать масштабы таким образом, что все безразмерные величины и их градиенты оказались порядка единицы. Тогда в уравнении (15) можно пренебречь членами, содержащими множители $1/\sqrt{R_i}$ или $1/R_i$ по сравнению с членами, содержащими множителем единицу, а также членами, содержащими множителем единицу по сравнению с аналогичными членами, содержащими множителем $\sqrt{R_i}$. Отбрасывая соответствующие члены и возвращаясь к размерным переменным, получаем

$$mn \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + j_y B \quad (16)$$

где плотность поперечного тока

$$j_y = \sigma \left(E_y - uB + \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} + \frac{A_2}{A_1} E_x + \frac{k}{\epsilon} \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) \quad (17)$$

Поступая аналогично с уравнением (2), с учетом (6), (8), получим

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \bar{B} n \bar{\tau}_e \left(\bar{A}_2 \frac{A_{20}}{A_{10}} \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{y}} + \bar{A}_4 \frac{A_{40}}{A_{10}} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{y}} \right) \frac{M^D}{\kappa M^3 K} \quad (18)$$

Следовательно, давление можно считать постоянным поперек пограничного слоя, если комбинация критериев

$$\frac{M^D}{\kappa M^3 K} = \frac{S}{\Phi} \quad \left(S = \frac{\sigma_0 E_0 B_0 x_0}{mn_0 u_0^2} \right) \quad (19)$$

достаточно мала. Здесь S — параметр магнитного взаимодействия.

Уравнение энергии ионов после соответствующих упрощений принимает вид

$$mnc_p \left(u \frac{\partial T_i}{\partial x} + v \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p_i}{\partial x} + v \frac{\partial p_i}{\partial y} + \eta_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{3km_e}{m} \frac{n}{\tau_e} (T_e - T_i) \quad (20)$$

Ввиду важности уравнения энергии электронов выпишем его в безразмерной форме полностью

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \bar{n} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{y}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \bar{\lambda}_e \left(\frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{x}} - \sqrt{R_i} \frac{A_{60}}{A_{50}} \frac{\bar{A}_6}{A_5} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\kappa}{(\kappa-1) R_e} \frac{1}{P_e} + \right. \\ &+ \frac{5}{2} \bar{\sigma} \bar{T}_e \frac{\bar{A}_7}{A_1} \left(\bar{E}_x + \bar{v} \bar{B} \frac{1}{K \sqrt{R_i}} + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial p_e}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\Phi} \right) \frac{M^D}{M} \frac{A_{70}}{A_{10}} - \\ &- \left. \frac{5}{2} \bar{\sigma} \bar{T}_e \frac{\bar{A}_8}{A_1} \left(\bar{E}_y - \bar{u} \bar{B} \frac{1}{K} + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial p_e}{\partial \bar{y}} \frac{\sqrt{R_i}}{\Phi} \right) \frac{M^D}{M} \frac{A_{80}}{A_{10}} \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ \bar{\lambda}_e \left(\frac{\bar{A}_6}{A_5} \frac{A_{60}}{A_{50}} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\sqrt{R_i}} + \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{R_i}{P_e R_e} + \frac{5}{2} \bar{\sigma} \bar{T}_e \frac{\bar{A}_7}{A_1} \left(\bar{E}_y - \bar{u} \bar{B} \frac{1}{K} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial p_e}{\partial \bar{y}} \frac{\sqrt{R_i}}{\Phi} \right) \frac{M^D}{M} \frac{A_{70}}{A_{10}} \sqrt{R_i} + \frac{5}{2} \bar{\sigma} \bar{T}_e \frac{\bar{A}_8}{A_1} \left(\bar{E}_x + \bar{v} \bar{B} \frac{1}{K \sqrt{R_i}} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial p_e}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\Phi} \right) \frac{M^D}{M} \frac{A_{80}}{A_{10}} \sqrt{R_i} \right\} - \bar{p}_e \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left\{ \bar{\eta}_e \left[\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \bar{H}_e \frac{10 H_{e0}}{3(2+\sqrt{2})} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sqrt{R_i} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\sqrt{R_i}} \right) \right] \right\} \frac{\kappa M^2}{R_e} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sqrt{R_i} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\sqrt{R_i}} \right) \times \\ &\times \left\{ \bar{\eta}_e \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sqrt{R_i} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\sqrt{R_i}} + \bar{H}_e \frac{10 H_{e0}}{3(2+\sqrt{2})} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right] \right\} \frac{\kappa M^2}{R_e} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \left\{ \eta_e \left[\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{H}_e \frac{10H_{e0}}{3(2 + \sqrt{2})} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sqrt{R_i} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\sqrt{R_i}} \right) \right] \right\} \frac{\kappa M^2}{R_e} + \\
& + \left(\bar{E}_x + \bar{v} \bar{B} \frac{1}{K \sqrt{R_i}} \right) \bar{\sigma} \left\{ \left(\bar{E}_x + \bar{v} \bar{B} \frac{1}{K \sqrt{R_i}} + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\Phi} \right) \frac{\Phi M^D}{M} - \right. \\
& - \frac{A_2}{A_1} \left(\bar{E}_y - \bar{u} \bar{B} \frac{1}{K} + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{y}} \frac{\sqrt{R_i}}{\Phi} \right) \frac{\Phi M^D}{M} \frac{A_{20}}{A_{10}} + \left(\frac{\bar{A}_3}{\bar{A}_1} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{x}} \frac{A_{30}}{A_{10}} - \right. \\
& \left. - \frac{\bar{A}_4}{\bar{A}_1} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{y}} \frac{A_{40}}{A_{10}} \sqrt{R_i} \right) \frac{M^D}{M} \left. \right\} + (\bar{E}_y - \bar{u} \bar{B}) \bar{\sigma} \left\{ (\bar{E}_y - \bar{u} \bar{B} + \right. \\
& + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{y}} \frac{\sqrt{R_i}}{\Phi} \left. \right) \frac{\Phi M^D}{M} + \frac{\bar{A}_2}{A_1} \left(\bar{E}_x + \bar{v} \bar{B} \frac{1}{K \sqrt{R_i}} + \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} \frac{1}{\Phi} \right) \frac{\Phi M^D}{M} \frac{A_{20}}{A_{10}} + \\
& + \left(\frac{\bar{A}_3}{\bar{A}_1} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{y}} \frac{A_{30}}{A_{10}} \sqrt{R_i} + \frac{\bar{A}_4}{\bar{A}_1} \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial \bar{x}} \frac{A_{40}}{A_{10}} \right) \frac{M^D}{M} \left. \right\} - 3 \frac{\bar{n}}{\tau_e} (\bar{T}_e - \bar{T}_i) \frac{\Phi A_{10}}{\kappa M M^D} \quad (21)
\end{aligned}$$

Будем считать, что критерий R_e достаточно велик, так что

$$R_e P_e \gg R_i, \quad R_e > H_{e0} \sqrt{R_i}, \quad H_{e0} < \sqrt{R_i} \quad (22)$$

При этом числа Холла для электронов, следовательно, могут быть большими, но не безграничными.

Пренебрегая членами, содержащими множителем единицу или $\sqrt{R_i}$, по сравнению с аналогичными членами, содержащими соответственно множители $\sqrt{R_i}$ и R_i , с учетом неравенств (22), возвращаясь к размерным переменным и вводя теплоемкость c_p , получаем

$$\begin{aligned}
\text{мн} c_p \left(u \frac{\partial T_e}{\partial x} + v \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \frac{5}{2} \frac{j_y^q}{e} k T_e \right) + u \frac{\partial p_e}{\partial x} + \\
&+ v \frac{\partial p_e}{\partial y} + j_x E_x + j_y E_y + \eta_e \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 3k \frac{m_e}{m} \frac{n}{\tau_e} (T_e - T_i) \quad (23)
\end{aligned}$$

Здесь

$$j_x = \sigma \left\{ E_x - \frac{A_2}{A_1} \left(E_y - uB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) - \frac{k}{e} \frac{A_4}{A_1} \frac{\partial T_e}{\partial y} \right\} \quad (24)$$

плотность осевого (холловского) тока, а

$$j_y^q = \sigma \left\{ \frac{A_7}{A_1} \left(E_y - uB + \frac{1}{en} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) + \frac{A_8}{A_1} E_x \right\} \quad (25)$$

плотность тока, переносящего энтальпию в поперечном направлении.

Безразмерный вид электродинамических уравнений

$$\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{y}} \sqrt{R_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{j}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{j}_y}{\partial \bar{y}} \sqrt{R_i} = 0$$

позволяет заключить, что \bar{E}_x и j_y постоянны поперек пограничного слоя.

Задача о пограничном слое плазмы на электродах будет полностью определена, если задать следующие граничные условия:

[при $y = 0$

$$u = v = 0, \quad T_i = T_{iw}(x), \quad T_e = T_{ew}(x) \quad (26)$$

[при $\bar{y} = \infty$

$$u = U_s(x), \quad T_i = T_{is}(x), \quad T_e = T_{es}(x), \quad j_y = j_{ys}(x), \quad E_x = E_{xs}(x) \quad (27)$$

Одним из возможных методов интегрирования системы уравнений пограничного слоя двухтемпературной плазмы является метод нахождения локально-автомодельных течений, в котором зависимость всех вели-

чин от продольной координаты учитывается через изменение параметров внешнего потока. Введем независимые переменные

$$\xi = \int_0^{\bar{x}} \bar{U}_s d\bar{x}, \quad \zeta = \frac{\bar{U}_s \sqrt{R_i}}{\sqrt{2\xi}} \int_0^{\bar{y}} \bar{n} d\bar{y}$$

$$\left(\bar{U}_s = \frac{U_s}{U_{s0}}, \bar{n} = \frac{n}{n_s}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, R_i = \frac{U_{s0} L m n_{s0}}{\eta_{is0}} \right)$$

(индекс 0 относится к начальному сечению $x = 0$) и функции

$$f' = \frac{u}{U_s}, \quad \theta_e = \frac{T_e}{T_{es}}, \quad \theta_i = \frac{T_i}{T_{is}}$$

Ограничимся рассмотрением изотермического ускоряющегося внешнего потока с постоянными параметрами

$$T_{is} = \text{const}, \quad T_{es} = \text{const}, \quad p = \text{const}, \quad E_{x_s} = \text{const}, \quad j_{y_s} = \text{const}, \quad j_{x_s} = 0$$

Тогда уравнения (16), (20), (23) приведем к виду

$$ff'' + \frac{2\xi S \bar{T}_{es}}{\bar{U}_s^3} \theta_e + \frac{2\xi S \bar{T}_{is}}{\bar{U}_s^3} \theta_i - \frac{2\xi}{\bar{U}_s} \frac{d\bar{U}_s}{d\xi} f'^2 + (\bar{\eta}_{i1} f'')' = 0 \quad (28)$$

$$f\theta_i' + (\kappa - 1) M^2 \frac{\bar{U}_s^2}{T_{is}} \bar{\eta}_{i1} f'^2 + (\bar{\lambda}_{i1} \theta_i')' + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \bar{T}_{es} f \frac{\theta_i \theta_e' - \theta_e \theta_i'}{\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}} +$$

$$+ 6 \frac{\kappa - 1}{\kappa^3} \frac{\Phi^2 \xi}{M^4 S K} \frac{A_{1s0}^2 + A_{2s0}^2}{U_s^2 A_{2s0} \bar{T}_{is}} - \frac{\theta_e \bar{T}_{es} - \theta_i \bar{T}_{is}}{\theta_e^{3/2} (\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is})} = 0 \quad (29)$$

$$f\theta_e' + (\kappa - 1) M^2 \frac{U_s^2}{\bar{T}_{es}} \bar{\eta}_{e1} f'^2 + (\bar{\lambda}_{e1} \theta_e')' + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \bar{T}_{is} f \frac{\theta_e \theta_i' - \theta_i \theta_e'}{\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}} +$$

$$+ 2(\kappa - 1) \frac{M^2 S K}{\bar{T}_{es}} \frac{\xi}{U_s^2} (\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}) \left[\bar{\sigma} \left(1 + \frac{A_{2s}^2}{A_{1s}^2} \right) - 2 \frac{A_{2s}}{A_{1s}} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \right] +$$

$$+ (\kappa - 1) \sqrt{2\xi} R_i \frac{M^2 S K}{\Phi U_s} \left\{ \theta_e' \left[- \frac{\theta_i \bar{T}_{is}}{\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}} + \bar{\sigma} \left(\frac{A_{2s} A_{3s}}{A_{1s}^2} - \frac{A_{4s}}{A_{1s}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{2} \frac{j_y^q}{i_y} - \frac{A_{3s}}{A_{1s}} \right] + \theta_i' \frac{\theta_e \bar{T}_{is}}{\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}} \left\} - 6 \frac{(\kappa - 1) \Phi^2 \xi}{\kappa^3 M^4 S K} \frac{A_{1s0}^2 + A_{2s0}^2}{U_s^2 A_{2s0} \bar{T}_{es}} \times$$

$$\times \frac{\theta_e \bar{T}_{es} - \theta_i \bar{T}_{is}}{\theta_e^{3/2} (\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is})} = 0 \quad (30)$$

Свойства переноса плазмы

$$\bar{\eta}_{i1} = \frac{\eta_i / \eta_{is}}{\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}}, \quad \bar{\lambda}_{i1} = \frac{\lambda_i / \lambda_{is}}{(\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}) P_i}, \quad \bar{\eta}_{e1} = \frac{\eta_e / \eta_{es}}{\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}} \frac{R_i}{R_e},$$

$$\bar{\lambda}_{e1} = \frac{\lambda_e / \lambda_{es}}{(\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is})} \frac{R_i}{P_e R_e}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{00}} = \frac{\sigma E_x}{i_y} = \frac{\sigma}{\sigma_s} \frac{A_{2s} / A_{1s}}{1 + A_{2s}^2 / A_{1s}^2}$$

согласно соотношениям (10) и с учетом определений [4]

$$\tau_i = (4\pi e)^2 \frac{3 \sqrt{m} (kT_i)^{3/2}}{4 \sqrt{\pi} \lambda_i e^4 n}, \quad \tau_e = (4\pi e)^2 \frac{3 \sqrt{m_e} (\kappa T_e)^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi} \lambda_e e^4 n}$$

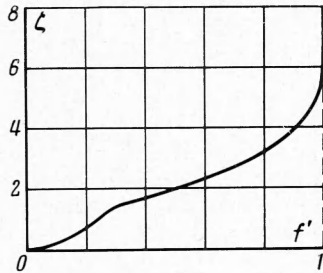
выражаются через θ_e , θ_i , \bar{H}_e , \bar{H}_i , причем

$$H_i = \theta_i^{3/2} (\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}) H_{is}, \quad H_e = \theta_e^{3/2} (\theta_e \bar{T}_{es} + \theta_i \bar{T}_{is}) H_{es}$$

В предположении постоянства j_y^q можно получить

$$\frac{j_y^q}{i_y} = \frac{A_{1s} A_{rs} + A_{rs} A_{8s}}{A_{1s}^2 + A_{2s}^2}$$

Критерии подобия задачи будут следующие величины:



Фиг. 1

$$S = \frac{i_y BL}{mn_s U_{s0}^2}, \quad M = \frac{U_{s0}}{\sqrt{\kappa k T_s / m}}, \quad \Phi = \frac{e E_x L}{k T_s}$$

$$K = \frac{E_x}{U_{s0} B}, \quad \bar{T}_{es} = \frac{T_{es}}{T_s}, \quad \bar{T}_{is} = \frac{T_{is}}{T_s}$$

$$R_i = \frac{U_{s0} m n_s L}{\eta_{is}}, \quad R_e = \frac{U_{s0} m n_s L}{\eta_{es}}, \quad P_c = \frac{\eta_{es} c_p}{\lambda_{es}}$$

$$P_i = \frac{\eta_{is} c_p}{\lambda_{is}}, \quad H_{is} = \omega_i \tau_{is}, \quad H_{es} = \omega_e \tau_{es}$$

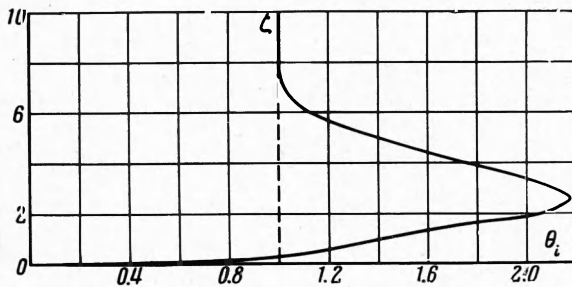
Заметим, что параметр магнитного взаимодействия S связан с диффузионным (токовым) числом Маха соотношением

$$S = \frac{M^j \Phi}{\kappa M^3 K}, \quad M_j = \frac{i_y}{en_s \sqrt{\kappa k T_s / m}} = \frac{\sigma_{00} E_x}{en_s \sqrt{\kappa k T_s / m}} = \frac{\sigma_{00}}{\sigma_s} M^D$$

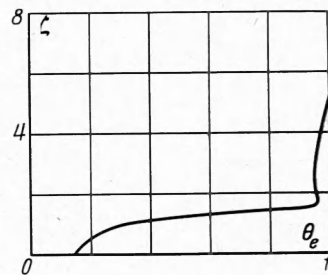
Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \\ \theta_e(0) = \theta_{ew} = \text{const}, \quad \theta_e(\infty) = 1 \\ \theta_i(0) = \theta_{iw} = \text{const}, \quad \theta_i(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (31)$$

В качестве примера на фиг. 1–3 приведены распределения u/U_s , θ_i и θ_e в пограничном слое двухтемпературной полностью ионизованной плазмы аргона при $\xi = 0$,



Фиг. 2



Фиг. 3

полученные в результате численного расчета на ЭВМ М-20 при следующих значениях определяющих параметров:

$$\begin{aligned} M = 2.45, \quad K = 1.036, \quad \bar{T}_{es} = 0.833, \quad \bar{T}_{is} = 0.167 \\ R_i = 1.565 \cdot 10^4, \quad R_e = 3.61 \cdot 10^{10}, \quad P_i = 0.619, \quad P_e = 1.925 \cdot 10^{-5} \\ H_{is} = 0.265, \quad H_{es} = 438, \quad \theta_{ew} = 0.15, \quad \theta_{iw} = 0.15 \end{aligned}$$

Некоторые особенности, наблюдаемые в полученных профилях, по-видимому связаны с поведением свойств переноса в сильном магнитном поле.

Поступила 6 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Л ю б и м о в Г. А. Магнитогидродинамический пограничный слой. Магнитная гидродинамика, 1965, № 3.
2. Г о г о с о в В. В. Пограничные слои в полностью ионизированной двухтемпературной плазме. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
3. П а с к о н о в В. М., Я к у б е н к о А. Е. Расчет пограничного слоя на электропроводной стенке плоского канала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. К а л и х м а н Л. Е. Элементы магнитной газодинамики. М., Атомиздат, 1964.