ПМТФ, № 5, 1966

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ВРАЩАТЕЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ ПО ЗАДАННОЙ МАГНИТНОЙ СИЛОВОЙ ЛИНИИ

Е. Ф. Афанасьев, Е. А. Морозова

(Москва)

В некоторых технических приложениях при расчете магнитного поля с вращательной симметрией выдвигается основное требование, чтобы заранее заданная линия была магнитной силовой линией (точнее, заданная поверхность вращения совпадала с магнитной силовой поверхностью).

Находится точное частное решение задачи в случае, когда заданная линия является прямой. Это решение затем обобщается на случай произвольной гладкой линии путем аппроксимации ее ломаной.

Предлагается также способ создания и расчета магнитного поля, удовлетворяющего указанным условиям.

Решение задачи может быть использовано в вопросах магнитной гидродинамики и динамики плазмы как первое приближение для магнитного поля в случае малых магнитных чисел Рейнольдса, когда требуется совпадение некоторой линии тока жидкости с силовой линией магнитного поля.

§ 1. Определение магнитного поля с вращательной симметрией по его значению на оси [1]. В случае отсутствия токов в среде или пренебрежения ими статическое магнитное поле с вращательной симметрией в цилиндрической системе координат zr определяется по формулам

$$H_z(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} H^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \tag{1.1}$$

$$H_r(z, r) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} H^{(2n+1)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} \tag{1.2}$$

где H_z и H_r — составляющие вектора напряженности магнитного поля, $H(z)$ — значение поля на оси, $H^{(n)}(z)$ — производная n-го порядка.

Известно, что магнитные поля с вращательной симметрией получаются при помощи круговых проводников с током.

На основании закона Био-Савара магнитное поле катушки на оси симметрии равно

$$H(z) = \frac{R^2}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{D(\zeta)\, d\zeta}{[(z-\zeta)^2 + R^2]^{3/2}} \tag{1.3}$$

Здесь R — радиус катушки или соленоида, простирающихся от z_1 до z_2, $D(\zeta)$ — плотность ампер-витков. При этом $D(\zeta) = In(\zeta)$, где I — сила тока, $n(\zeta)$ — плотность витков.

Если распределение поля $H(z)$ на оси задано, то плотность ампер-витков $D(\zeta)$, необходимая для создания указанного осевого поля, может быть найдена решением интегрального уравнения (1.3).

В предположении, что функция $D(z)$ определена при всех значениях $-\infty < z < +\infty$, решение интегрального уравнения (1.3), где следует положить $z_1 = -\infty$ и $z_2 = \infty$, найдено В. Глазером [2] при помощи преобразования Фурье и имеет вид

$$D(z) = -\frac{1}{R\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{|\xi|\, H_1^{(1)}(iR|\xi|)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(z-\eta)} H(\eta)\, d\eta \tag{1.4}$$

где $H_1^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода и первого порядка, i — мнимая единица.

Квадратуры в (1.4) берутся только лишь в некоторых частных случаях. Обычно даже численным методом их взять весьма трудно. Вероятно, проще функцию $D(z)$ определять не из (1.4), а численным решением интегрального уравнения первого рода (1.3).

§ 2. Решение задачи в случае, когда заданная магнитная силовая линия является прямой. Пусть при расчете магнитного поля с вращательной симметрией выдвигается основное требование, чтобы заранее заданная кривая $r = r_0(z)$ (точнее, поверхность вращения) совпадала с магнитной силовой линией. В этих случаях составляющие магнитного поля H_z и H_r должны удовлетворять условию

$$\left.\frac{H_r(z, r)}{H_z(z, r)}\right|_{r=r_0(z)} = \frac{dr_0(z)}{dz} \tag{2.1}$$

Рассмотрим случай, когда линия $r = r_0(z)$ будет прямой

$$r_0 = kz + a \qquad (kz + a > 0) \tag{2.2}$$

Представим условие (2.1) в виде

$$H_z(z, r_0)\, r_0'(z) - H_r(z, r_0) = 0 \tag{2.3}$$

Подставляя H_z и H_r согласно (1.1) и (1.2) в (2.3), получим уравнение для функции $H(z)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} r_0^{2n}(z)\left[r_0'(z) H^{(2n)}(z) + \frac{r_0(z)}{2(n+1)} H^{(2n+1)}(z)\right] = 0 \tag{2.4}$$

Решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$H(z) = C / r_0^m(z) \tag{2.5}$$

где C — произвольная постоянная, показатель m пока не определен.

Из (2.2) и (2.5) следует, что (2.6)

$$H^{(2n)}(z) = \frac{C}{(m-1)!} \frac{(2n+m-1)!\, k^{2n}}{r_0^{2n+m}(z)}, \qquad H^{(2n+1)}(z) = -\frac{C}{(m-1)!} \frac{(2n+m)!\, k^{2n+1}}{r_0^{2n+m+1}(z)}$$

Подставляя (2.6) в уравнение (2.4), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+m-1)!}{2^{2n}(n!)^2} k^{2n+1}\left[1 - \frac{2n+m}{2(n+1)}\right] \frac{C}{(m-1)!\, r_0^m(z)} = 0 \tag{2.7}$$

Поделив обе части (2.7) на множитель

$$\frac{C}{(m-1)!\, r_0^m(z)} \neq 0$$

получим соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+m-1)!}{2^{2n}(n!)^2}\left[1 - \frac{2n+m}{2(n+1)}\right] k^{2n+1} = 0 \tag{2.8}$$

Левая часть (2.8) представляет собою ряд по степеням параметра k. Сумма этого ряда должна обращаться в нуль при любом значении k. Последнее возможно тогда и только тогда, когда

$$1 - \frac{2n+m}{2(n+1)} = 0$$

Отсюда следует, что показатель $m = 2$.

В результате в случае заданной магнитной силовой линии (2.1) напряженность магнитного поля на оси симметрии равна

$$H(z) = \frac{C}{(kz+a)^2} \tag{2.9}$$

Подставляя выражение (2.9) для $H(z)$ в (1.1) и (1.2), получим

$$H_z = \frac{C}{(kz+a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(n!)^2} \left(\frac{k}{2}\right)^{2n} \left(\frac{r}{kz+a}\right)^{2n} \tag{2.10}$$

$$H_r = \frac{C}{(kz+a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2)!}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2n+1} \left(\frac{r}{kz+a}\right)^{2n+1} \tag{2.11}$$

Модуль $H_0(z)$ вектора напряженности магнитного поля на линии $r_0 = kz + a$ равен

$$H_0(z) = \sqrt{1 + r_0'^2(z)}\, H_z(z, r_0) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{(kz+a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(n!)^2} \left(\frac{k}{2}\right)^{2n} \tag{2.12}$$

В формулы (2.9)—(2.12) входит произвольная постоянная C. Подбором постоянной C можно обеспечить любую нужную среднюю напряженность магнитного поля в любой точке, в частности, на силовой линии $r = kz + a$.

При помощи признаков сходимости рядов нетрудно установить, что ряды (2.10) и (2.11) абсолютно и равномерно сходятся по r при

$$r < r^* = \frac{kz+a}{|k|} \tag{2.13}$$

Следует ожидать, что знакопеременные ряды (2.10) и (2.11) условно сходятся в гораздо большей области, чем (2.13). Отметим, что найденное магнитное поле (2.10), (2.11) не является коническим, так как

$$\frac{H_r}{H_z} = \frac{k}{k + a/z} \frac{r}{z} \qquad (a \neq 0,\ r \geqslant a)$$

и только при $z \to \infty$ оно стремится к коническому.

Если магнитное поле (2.10), (2.11) создается катушкой или соленоидом радиуса R $(R > r_0(z))$ и протяженности $0 \leqslant z \leqslant l$, то обратная задача определения нужной плотности ампер-витков $D(z)$, согласно (1.3) и (2.9), сводится к решению интегрального уравнения

$$\frac{C}{(kz+a)^2} = \frac{R^2}{2} \int_0^l \frac{D(\zeta)\, d\zeta}{[(z-\zeta)^2 + R^2]^{3/2}} \qquad (0 \leqslant z \leqslant l) \tag{2.14}$$

которое можно преобразовать к более простому виду

$$\int_0^1 \frac{u(\xi)\, d\xi}{[(x-\xi)^2 + \alpha^2]^{3/2}} = \frac{1}{(x+\beta)^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{2.15}$$

$$x = \frac{z}{l}, \qquad \alpha = \frac{\beta}{l}, \qquad \beta = \frac{a}{lk}, \qquad u(x) = \frac{k^2 R^2}{2C} D(lx)$$

Уравнение (2.15) является интегральным уравнением первого рода с ядром, зависящим от абсолютной величины разности аргументов, и конечным промежутком изменения переменных. Для его решения могут быть применены теория, развитая Г. А. Гринбергом [3] и метод Винера — Хопфа. Интегральные уравнения типа (2.15) рассматривались, например, в работе [4]. Обычно решение таких уравнений представляется в виде сложных рядов из многократных квадратур и находится обычно численным методом.

§ 3. **Решение задачи в случае, когда заданная магнитная линия является произвольной.** Пусть требуется создать магнитное поле с вращательной симметрией такое, чтобы произвольная линия (точнее, поверхность вращения) $r = r_0(z)$ была магнитной силовой линией.

Относительно функции $r = r_0(z)$ предположим, что это однозначная функция, причем положительная и ограниченная на отрезке $[0, l]$.

Разобьем интервал $0 \leqslant z \leqslant l$ на N равных или неравных промежутков $z_{i-1} \leqslant z \leqslant z_i$, где $z_0 = 0$, $z_N = l$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим $r_i = r_0(z_i)$. Кривую $r = r_0(z)$ в каждом промежутке заменим отрезком прямой, соединяющим точки (z_{i-1}, r_{i-1}) и (z_i, r_i). В результате кривая $r = r_0(z)$ будет аппроксимирована ломаной линией из N звеньев. При расчете магнитного поля в каждом промежутке могут быть использованы результаты предыдущего параграфа. А именно, формулы для H_z и H_r (2.10) и (2.11), где при $z_{i-1} \leqslant z \leqslant z_i$ нужно положить

$$r_0(z) = k_i z + a_i, \quad k = k_i, \quad C = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots N)$$

$$k_i = \frac{r_0(z_i) - r_0(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}}, \qquad a_i = \frac{z_i r_0(z_{i-1}) - z_{i-1} r_0(z_i)}{z_i - z_{i-1}} \quad (i = 1, \ldots, N)$$

В указанном промежутке осевое магнитное поле, согласно (2.9), будет

$$H(z) = \frac{C_i}{(k_i z + a_i)^2} = H_i(z) \quad (z_{i-1} \leqslant z \leqslant z_i) \tag{3.1}$$

При решении обратной задачи определения плотности ампер-витков $D(z)$ можно поступить следующим образом. Примем приближенно плотность $D(z)$ в каждом промежутке $z_{i-1} < z < z_i$ постоянной и равной D_i. Интеграл в (2.14) представим в виде суммы интегралов по промежуткам и проинтегрируем. В результате будем иметь

$$\sum_{j=1}^{N} D_j [F_j(z) - F_{j-1}(z)] = H_i(z) \qquad (z_{i-1} < z < z_i) \tag{3.2}$$

$$F_j(z) = \frac{1}{2} \frac{z - z_j}{\sqrt{(z - z_j)^2 + R^2}} \qquad (R > r_0(z)) \tag{3.3}$$

В (3.1)—(3.3) положим $z = {}^1/_2(z_{i-1} + z_i) = z_{i-{}^1/_2}$ тогда для $D_1, \ldots, D_N$, получим систему N линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} [F_j(z_{i-{}^1/_2}) - F_{j-1}(z_{i-{}^1/_2})] D_j = H_i(z_{i-{}^1/_2}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{3.4}$$

Решая систему уравнений (3.4), например на ЭВМ, получим распределение плотности ампер-витков.

Исследование данной задачи было предложено недавно скончавшимся Евграфом Сергеевичем Кузнецовым.

Авторы считают необходимым отметить, что постоянное внимание Е. С. Кузнецова и его ценные советы позволили завершить эту работу.

Поступила 14 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Рустерхольц А. Электронная оптика. Изд. иностр. лит., 1952.
2. Глазер В. Основы электронной оптики. Гостехиздат, 1957.
3. Гринберг Г. А. Об интегральных уравнениях с ядром, зависящим от абсолютной величины разности аргументов и конечным промежуткам изменения переменных. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 3.
4. Афанасьев Е. Ф. Некоторые задачи для уравнения теплопроводности со смешанными граничными условиями. Ж. Дифференциальные уравнения, Минск, 1965, т. 1, № 5.