УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОСТЕННОГО ЭЛЕМЕНТА

А. О. Ватульян, В. В. Ковалева

Ростовский государственный университет, 344006 Ростов-на-Дону

Изучено динамическое поведение тонкостенных элементов из материалов с пироэлектрическим эффектом. Используется вариационная постановка задачи, сформулирован вариационный принцип, отличный от известного. С использованием ряда гипотез о распределении компонент физических полей по толщине элемента и вариационного принципа построены корректные краевые задачи, описывающие растяжение-сжатие и изгиб тонкостенного пироэлектрического элемента.

Введение. В настоящее время в технике широко используются конструкции и элементы, изготовленные из пьезоактивных материалов. Представляет интерес изучение их поведения в условиях неоднородного температурного нагружения. Исследования и расчеты ведутся в рамках модели связанной термоэлектроупругости [1], система уравнений которой в общем случае является достаточно сложной. Основу краевых задач термоэлектроупругости составляют уравнения термопьезоэлектричества, сформулированные Р. Д. Миндлиным в начале 60-х гг. XX в. Изучению взаимного влияния тепловых, электрических и упругих полей посвящены работы [2–5]. Обобщенная постановка краевой задачи термоэлектроупругости дана в [5]. При решении конкретных задач возникает необходимость получения более простых моделей и уравнений.

В настоящей работе получены система уравнений и граничные условия в задаче о колебаниях тонкостенных элементов из материалов с пьезо- и пироэлектрическим эффектом.

1. Постановка задачи. В линейной связанной термоэлектроупругости рассматривается задача об установившихся колебаниях тела, занимающего объем V, с границей S. Считая режим колебаний установившимся, опуская временной множитель $\mathrm{e}^{-i\omega t}$, запишем основные уравнения в следующей форме:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = -\omega^2 \rho u_i, \qquad D_{k,k} = 0, \qquad -i\omega T_0 \eta = -q_{i,i} + w. \tag{1}$$

Определяющие соотношения имеют вид [1]

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \gamma_{ij}\theta - e_{kij}E_k, \quad D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + g_j\theta + \epsilon_{ik}E_k, \quad \eta = \gamma_{ij}\varepsilon_{ij} + (c_\varepsilon/T_0)\theta + g_iE_i, \\ E_k = -\varphi_{,k}, \qquad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \qquad q_i = -k_{ij}\theta_{,j}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; D_i — компоненты вектора электрической индукции; η — энтропия; q_i — компоненты вектора потока тепла; F_i — компоненты вектора объемных сил; w — объемная мощность внутренних источников тепла; u_j — компоненты вектора перемещения; φ — электрический потенциал; θ — приращение температуры относительно температуры в естественном состоянии; c_{ijkl} — компоненты тензора

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-01011, 00-15-96087).

упругих постоянных; e_{ikl} — компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных; ϵ_{ik} — компоненты тензора диэлектрических проницаемостей; γ_{ij} — компоненты тензора температурных напряжений; g_i — пироэлектрические коэффициенты; k_{ij} — компоненты тензора теплопроводности; c_ε — теплоемкость при постоянной деформации; ρ — плотность; T_0 — температура в естественном состоянии по шкале Кельвина (все величины соответствуют изотермическому состоянию).

Поверхность S, ограничивающая тело, может быть представлена в виде $S = S_u \cup S_\sigma = S_\theta \cup S_q = S_- \cup S_+ \cup S_H$. Граничные условия представимы в следующей форме:

$$\sigma_{ij}n_j\big|_{S_\sigma} = p_i, \quad u_i\big|_{S_u} = u_{i0}, \quad q_j n_j\big|_{S_q} = f, \quad \theta\big|_{S_\theta} = \theta_0, \quad D_j n_j\big|_{S_H} = 0, \quad \varphi\big|_{S_\pm} = \pm\varphi_0, \tag{3}$$

где p_i, u_{i0}, θ_0, f — известные функции; $2\varphi_0$ — заданная разность потенциалов; n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S.

Если величина φ_0 неизвестна, то она определяется из дополнительного условия включения пьезоэлектрического элемента в электрическую цепь

$$i\omega \int\limits_{S_+} D_n \, dS \, = \, -I, \tag{4}$$

где I — амплитуда тока в цепи, периодически изменяющегося во времени.

Таким образом, поведение термоэлектроупругого тела описывается системой пяти дифференциальных уравнений второго порядка сложной структуры с краевыми условиями (3). Построим более простые модели тонкостенных пироэлектрических элементов, подобные моделям изгиба пластин и балок. Для корректного построения таких моделей необходимо использовать вариационный принцип термоэлектроупругости.

2. Формулировка вариационного принципа. Вариационный принцип термоэлектроупругости сформулирован в [1], причем для получения уравнений и граничных условий требуется варьировать два независимых функционала. Приводимый в данной работе вариационный принцип является аналогом вариационного принципа Лагранжа теории упругости, и для составления соответствующего функционала использован метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем понятие кинематически возможного поля в задаче термоэлектроупругости. Будем считать, что оно состоит из дважды непрерывно дифференцируемых в объеме V функций u_i, φ, θ, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям $\delta u_i\big|_{S_u} = 0$, $\delta\varphi\big|_{S_\varphi} = 0$, $\delta\theta\big|_{S_\theta} = 0$. Тогда имеет место следующее утверждение. Среди всех кинематически возможных полей истинные доставляют стационарное значение функционалу L:

$$L = \int\limits_V \Big(\frac{\rho\omega^2}{2} u_i^2 + F_i u_i + \frac{w}{i\omega T_0}\,\theta - \frac{1}{2}\, c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}\varphi_{,i}\,\varphi_{,k} - \frac{1}{2i\omega T_0}\, k_{ij}\theta_{,j}\,\theta_{,i} + \\ + \frac{c_\varepsilon}{2T_0}\,\theta^2 - e_{kij}\varepsilon_{ij}\varphi_{,k} + \gamma_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - g_i\varphi_{,i}\,\theta \Big) dV + \int\limits_{S_\sigma} p_i u_i \, dS - \frac{1}{i\omega T_0} \int\limits_{S_q} f\theta \, dS. \tag{5}$$

Вариационное уравнение $\delta L = 0$ эквивалентно системе уравнений (1) с учетом определяющих соотношений (2) и граничным условиям на S_σ, S_θ и S_q в (3).

Варьируя функционал L, получим

$$\delta L = \int\limits_V \Big[(\rho\omega^2 u_i + F_i + \sigma_{ij,j})\delta u_i + D_{k,k}\,\delta\varphi + \Big(\frac{w}{i\omega T_0} + \eta - \frac{1}{i\omega T_0}\, q_{i,i}\Big)\delta\theta \Big] dV + \\ + \int\limits_{S_\sigma} (p_i - \sigma_{ij}n_j)\delta u_i \, dS - \frac{1}{i\omega T_0} \int\limits_{S_q} (f - q_i n_i)\delta\theta \, dS + \int\limits_{S_H} D_k n_k \delta\varphi \, dS = 0. \tag{6}$$

Поскольку вариации перемещений, потенциала и температуры произвольны и независимы, из (6) в силу основной леммы вариационного исчисления следует равенство нулю множителей при соответствующих вариациях как в объемном, так и в поверхностных интегралах, т. е. уравнения (1) и естественные граничные условия в (3).

3. Простейшая модель колебаний тонкостенного элемента. Рассмотрим задачу о колебаниях пластины-полосы из термоэлектроупругого материала класса 6 mm. Будем считать, что пластина находится в состоянии плоской деформации и искомые поля удовлетворяют следующим ограничениям:

$$u_2 = 0, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0.$$

Сечение пластины плоскостью $x_2 = \mathrm{const}$ есть прямоугольник Ω $[-l, l] \times [-H, H]$. Колебания пластины возникают из-за разности температур на границах $x_3 = \pm H$:

$$\sigma_{13}\big|_{x_3=\pm H} = \sigma_{33}\big|_{x_3=\pm H} = 0, \qquad \varphi\big|_{x_3=\pm H} = \pm\varphi_0, \qquad \theta\big|_{x_3=\pm H} = \theta_\pm,$$

$$\sigma_{13}\big|_{x_1=\pm l} = \sigma_{11}\big|_{x_1=\pm l} = 0, \qquad D_1\big|_{x_1=\pm l} = 0, \qquad q_1\big|_{x_1=\pm l} = 0.$$

В этой постановке постоянные $\theta_\pm$ известны, а неизвестный потенциал φ_0 определяется из дополнительного условия (4), которое в данном случае принимает вид

$$\int\limits_{-l}^{l} D_3(x_1, H)\, dx_1 = 0. \tag{7}$$

Построим упрощенную модель деформирования ленточной плиты при $\varepsilon = H/l \ll 1$ в рамках классических гипотез Кирхгофа, полагая

$$u_1 = u_{10}(x_1) - x_3 u'_{30}(x_1), \quad u_3 = u_{30}(x_1), \quad \varphi = (x_3/H)\varphi_0, \quad \theta = T_1 + (x_3/H)T_2, \tag{8}$$

где $T_1 = (\theta_+ + \theta_-)/2$; $T_2 = (\theta_+ - \theta_-)/2$. Подставим (8) в функционал и найдем его вариацию. Приравняв к нулю множители при независимых вариациях δu_{10} и δu_{30}, получим систему уравнений и граничных условий, описывающую колебания тонкостенного элемента в рамках модели термоэлектроупругости.

Полученная система уравнений и граничных условий естественным образом разделяется на две независимые задачи, которые условно можно назвать задачами "растяжения-сжатия" (задача 1) и "изгиба" (задача 2) тонкостенного элемента.

Задача 1. Неизвестная функция u_{10} удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$c^*_{11} u''_{10} + \rho\omega^2 u_{10} = 0, \qquad c^*_{11} u'_{10}\big|_{x_1=\pm l} = \gamma^*_{11} T_1 - (e^*_{31}/H)\varphi_0.$$

Задача 2. Неизвестная функция u_{30} удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$c^*_{11} u^{(4)}_{30} + \rho\omega^2 u''_{30} - \frac{3\rho\omega^2}{H^2}\, u_{30} = 0, \quad (c^*_{11} u'''_{30} + \rho\omega^2 u'_{30})\big|_{x_1=\pm l} = 0, \quad c^*_{11} u''_{30}\big|_{x_1=\pm l} = -\frac{\gamma^*_{11}}{H}\, T_2.$$

Здесь $c^*_{11} = c_{11} - c^2_{13}/c_{33}$; $\gamma^*_{11} = \gamma_{11} - c_{13}\gamma_{33}/c_{33}$; $e^*_{31} = e_{31} - e_{33}c_{13}/c_{33}$.

Следует отметить, что разность температур на границах входит в уравнение задачи 2, сумма — в уравнение задачи 1. В задаче 2 уравнение и первое граничное условие отличаются от уравнения и граничного условия классической задачи изгиба балки лишь членами $\rho\omega^2 u''_{30}$ и $\rho\omega^2 u'_{30}$ соответственно, учитывающими инерцию вращения [6]. Роль изгибающего момента, приложенного на краях $x_1 = \pm l$, играет слагаемое $-(\gamma^*_{11}/H)T_2$, зависящее от разности температур θ_+ и θ_-.

Дополнительное условие (7) имеет вид

$$\int\limits_{-l}^{l} \Big(e_{31}^*(u_{10}' - H u_{30}'') - \frac{\epsilon_{33}^*}{H}\,\varphi_0 + g_3^*(T_1 + T_2)\Big) dx_1 = 0, \tag{9}$$

где $\epsilon_{33}^* = \epsilon_{33} + e_{33}^2/c_{33}$; $g_3^* = g_3 + \gamma_{33}e_{33}/c_{33}$.

Решения задач 1, 2 записываются в виде

$$u_{10} = \frac{l(\gamma_{11}^* T_1 - (e_{31}^*/H)\varphi_0)}{c_{11}^* k \cos k}\,\sin\Big(\frac{k}{l}\,x_1\Big), \qquad u_{30} = \frac{\gamma_{11}^*}{c_{11}^* H K_0}\,(f(\xi_2)\operatorname{ch}(\xi_1 x_1) - f(\xi_1)\operatorname{ch}(\xi_2 x_1))T_2,$$

где $k = \omega l/c$; $c = \sqrt{c_{11}^*/\rho}$; $\varepsilon = H/l$; $\xi_{1,2} = (k/(\sqrt{2}l))\sqrt{-1 \pm \sqrt{1 + 12/(k^2\varepsilon^2)}}$; $f(\xi_1) = \xi_1(\xi_1^2 + k^2/l^2)\operatorname{sh}(\xi_1 l)$; $K_0 = \xi_2^2 f(\xi_1)\operatorname{ch}(\xi_2 l) - \xi_1^2 f(\xi_2)\operatorname{ch}(\xi_1 l)$.

Наведенный потенциал определяется из (9) следующим образом:

$$\varphi_0 = \varphi_1 T_1 + \varphi_2 T_2,$$
$$\varphi_1 = H(e_{31}^*\gamma_{11}^*\sin k + g_3^* c_{11}^* k\cos k)/d_0, \qquad d_0 = \epsilon_{33}^* c_{11}^* k \cos k + e_{31}^{*2}\sin k,$$
$$\varphi_2 = c_{11}^* k\cos k (g_3^* l - (e_{31}^*\gamma_{11}^*/K_0)(f(\xi_2)\xi_1\operatorname{sh}(\xi_1 l) - f(\xi_1)\xi_2\operatorname{sh}(\xi_2 l)))/d_0.$$

Проанализируем полученные формулы для расчета наведенного потенциала. В пироэлектрическом элементе имеется два набора резонансных частот, соответствующих продольным резонансам, определяемым из условия $d_0(k_j) = 0$, и изгибным, определяемым из уравнения $K_0(k_i) = 0$. На этих частотах наведенный потенциал обращается в бесконечность. Следует отметить, что при $T_2 = 0$ изгиб отсутствует.

4. Уточненная модель колебаний тонкостенного элемента. Простейшая модель деформирования тонкостенного элемента, исследованная в п. **3**, не учитывает распределение температуры по координате x_1 и дает неограниченный рост потенциала на частотах продольного и изгибного резонансов.

Рассмотрим уточненную модель колебаний тонкостенного элемента, принимая

$$u_1 = u_{10}(x_1) - x_3(e_{15}/c_{44})\Phi_0'(x_1) - x_3 u_{30}'(x_1), \qquad u_3 = u_{30}(x_1),$$
$$\varphi = (1 - x_3^2/H^2)\Phi_0(x_1) + x_3\varphi_0/H, \qquad \theta = (1 - x_3^2/H^2)\theta_0(x_1) + (x_3/H)T_2 + (x_3^2/H^2)T_1. \tag{10}$$

При этом выполняются кинематические граничные условия $\varphi(x_1, \pm H) = \pm\varphi_0$, $\theta(x_1, \pm H) = \theta_\pm$. Кроме того, $\sigma_{13}(x_1, \pm H) = 0$, а введенные дополнительно функции $\Phi_0(x_1)$ и $\theta_0(x_1)$ имеют простой физический смысл: $\varphi(x_1, 0) = \Phi_0(x_1)$, $\theta(x_1, 0) = \theta_0(x_1)$.

Проварьировав функционал (5) с учетом (10) и приравняв к нулю множители при независимых вариациях δu_{10}, δu_{30}, $\delta\Phi_0$ и $\delta\theta_0$, получим систему уравнений и граничных условий, которая также естественным образом разделяется на две независимые задачи.

Задача 1а (обобщенная задача растяжения-сжатия). Неизвестные функции u_{10}, θ_0 удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$c_{11}^* u_{10}'' + \rho\omega^2 u_{10} - (2/3)\gamma_{11}^*\theta_0' = 0,$$
$$\gamma_{11}^* u_{10}' + \frac{4}{5}\,\frac{k_{11}}{i\omega T_0}\,\theta_0'' - \Big(\frac{2}{H^2}\,\frac{k_{33}}{i\omega T_0} - \frac{4}{5}\,\frac{c_\varepsilon^*}{T_0}\Big)\theta_0 = -\Big(\frac{2}{H^2}\,\frac{k_{33}}{i\omega T_0} + \frac{1}{5}\,\frac{c_\varepsilon^*}{T_0}\Big)T_1 + \frac{g_3^*}{H}\,\varphi_0,$$
$$(c_{11}^* u_{10}' - (2/3)\gamma_{11}^*\theta_0)\big|_{x_1 = \pm l} = \gamma_{11}^* T_1/3 - (e_{31}^*/H)\varphi_0, \qquad \theta_0'\big|_{x_1=\pm l} = 0.$$

Задача 2а (обобщенная задача изгиба). Неизвестные функции u_{30}, Φ_0 удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$c_{11}^* u_{30}^{(4)} + \rho\omega^2 u_{30}'' - \frac{3\rho\omega^2}{H^2}\,u_{30} + c_{11}^*\,\frac{e_{15}}{c_{44}}\,\Phi_0^{(4)} + \Big(\rho\omega^2\,\frac{e_{15}}{c_{44}} + \frac{2e_{31}^*}{H^2}\Big)\Phi_0'' = 0,$$

$$c_{11}^*\,\frac{e_{15}}{c_{44}}\,u_{30}^{(4)}+\Big(\rho\omega^2\,\frac{e_{15}}{c_{44}}+\frac{2e_{31}^*}{H^2}\Big)u_{30}''+c_{11}^*\,\frac{e_{15}^2}{c_{44}^2}\,\Phi_0^{(4)}+$$
$$+\Big(\rho\omega^2\,\frac{e_{15}^2}{c_{44}^2}+\frac{4e_{31}^*}{H^2}\,\frac{e_{15}}{c_{44}}+\frac{19}{H^2}\,\frac{e_{15}^2}{c_{44}}+\frac{8}{5}\,\frac{\epsilon_{11}}{H^2}\Big)\Phi_0''-\frac{4\epsilon_{33}^*}{H^4}\,\Phi_0=\frac{2g_3^*}{H^3}\,T_2,$$
$$\Big(c_{11}^*u_{30}'''+\rho\omega^2u_{30}'+c_{11}^*\,\frac{e_{15}}{c_{44}}\,\Phi_0'''+\Big(\rho\omega^2\,\frac{e_{15}}{c_{44}}+\frac{2e_{31}^*}{H^2}\Big)\Phi_0'\Big)\Big|_{x_1=\pm l}=0,$$
$$\Big(c_{11}^*\,\frac{e_{15}}{c_{44}}\,u_{30}'''+\rho\omega^2\,\frac{e_{15}}{c_{44}}\,u_{30}'+c_{11}^*\,\frac{e_{15}^2}{c_{44}^2}\,\Phi_0'''+\Big(\rho\omega^2\,\frac{e_{15}^2}{c_{44}^2}+\frac{2e_{31}^*}{H^2}\,\frac{e_{15}}{c_{44}}+\frac{19}{H^2}\,\frac{e_{15}^2}{c_{44}}+\frac{8}{5}\,\frac{\epsilon_{11}}{H^2}\Big)\Phi_0'\Big)\Big|_{x_1=\pm l}=0,$$
$$\Big(c_{11}^*u_{30}''+c_{11}^*\,\frac{e_{15}}{c_{44}}\,\Phi_0''+\frac{2e_{31}^*}{H^2}\,\Phi_0\Big)\Big|_{x_1=\pm l}=-\frac{\gamma_{11}^*}{H}\,T_2.$$

Дополнительное условие (7) имеет вид

$$\int\limits_{-l}^{l}\Big(e_{31}^*\Big(u_{10}'-H\,\frac{e_{15}}{c_{44}}\,\Phi_0''-Hu_{30}''\Big)-\frac{\epsilon_{33}^*}{H}(\varphi_0-2\Phi_0)+g_3^*(T_1+T_2)\Big)\,dx_1=0. \qquad (11)$$

Следует отметить, что сумма температур на границах входит в задачу 1а, а их разность — в задачу 2а. Задачи 1а, 2а существенно сложнее задач 1, 2. Их решения выражаются через корни биквадратного и бикубического характеристических уравнений.

Наведенный потенциал имеет такую же структуру, как и в п. **3**: $\varphi_0=\varphi_1T_1+\varphi_2T_2$, причем φ_1 и φ_2 находятся из условия (11).

Построим решение задачи 1а, когда $T_2=0$, т. е. изгиб отсутствует и $\Phi_0=0$, $u_{30}=0$. В этом случае решение задачи 1а имеет вид

$$u_{10}=\sum_{i=1}^{2}A_i\,\mathrm{sh}\,(\lambda_ix_1),\qquad \theta_0=\sum_{i=1}^{2}B_i\,\mathrm{ch}\,(\lambda_ix_1)+L_1T_1-\frac{L_2}{H}\,\varphi_0,$$
$$A_i=(2/3)(\gamma_{11}^*/c_{11}^*)\lambda_iX_i,\quad B_i=(\lambda_i^2+k^2/l^2)X_i,\quad L_1=b_3/b_2,\quad L_2=b_4/b_2,$$

λ_i — решения характеристического уравнения

$$(4/5)\lambda^4+(2\gamma_{11}^{*2}b_1/(3c_{11}^*)-b_2+4k^2/(5l^2))\lambda^2-b_2k^2/l^2=0,$$

где $b_1=T_0ikc/(k_{11}l)$; $b_2=(10lk_{33}-4c_\varepsilon^*k_{11}H^2ikc)/(5H^2k_{11}l)$; $b_3=(10lk_{33}+c_\varepsilon^*k_{11}H^2ikc)/(5H^2k_{11}l)$; $b_4=g_3^*T_0ikc/(k_{11}l)$; X_i находятся из граничных условий

$$X_1=\frac{3}{2}\,\frac{c_{11}^*}{\gamma_{11}^*}\,\frac{l^2}{k^2}\,\frac{F(\lambda_2)}{D_0}\Big(N_1T_1-N_2\,\frac{\varphi_0}{H}\Big),\qquad X_2=-\frac{3}{2}\,\frac{c_{11}^*}{\gamma_{11}^*}\,\frac{l^2}{k^2}\,\frac{F(\lambda_1)}{D_0}\Big(N_1T_1-N_2\,\frac{\varphi_0}{H}\Big),$$

где $F(\lambda_1)=\lambda_1(\lambda_1^2+k^2/l^2)\,\mathrm{sh}\,(\lambda_1l)$; $N_1=\gamma_{11}^*(1+2b_3/b_2)/(3c_{11}^*)$; $N_2=(e_{31}^*+2\gamma_{11}^*b_4/(3b_2))/c_{11}^*$; $D_0=F(\lambda_1)\,\mathrm{ch}\,(\lambda_2l)-F(\lambda_2)\,\mathrm{ch}\,(\lambda_1l)$.

Потенциал φ_0 определяется из дополнительного условия (11):

$$\varphi_0=T_1H\,\frac{g_3^*lk^2D_0+\lambda_1\lambda_2l^2e_{31}^*N_1\,\mathrm{sh}\,(\lambda_1l)\,\mathrm{sh}\,(\lambda_2l)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{\epsilon_{33}^*lk^2D_0+\lambda_1\lambda_2l^2e_{31}^*N_2\,\mathrm{sh}\,(\lambda_1l)\,\mathrm{sh}\,(\lambda_2l)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}.$$

В этом случае значение потенциала φ_0 оказывается комплексным. Тогда, отделяя вещественную часть, получим $\varphi_0=AR\sin(\omega t+\delta_3)$, где A — размерный множитель; R — безразмерная амплитуда, зависящая от k.

На рис. 1, 2 приведены зависимости амплитуды потенциала от безразмерной частоты k для пироэлектрического элемента из титаната бария (сплошные линии соответствуют простейшей модели, штриховые — уточненной). На рис. 1 зависимости

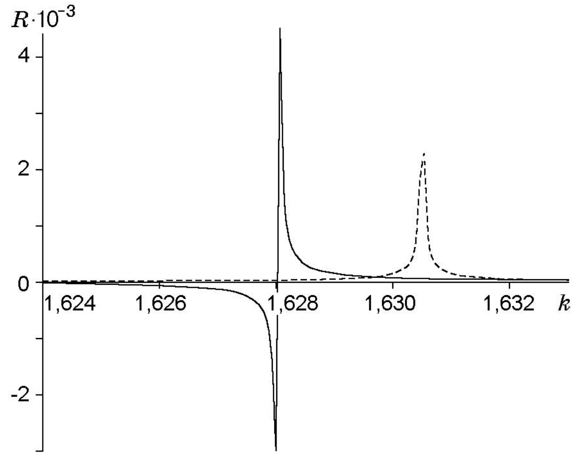

Рис. 1

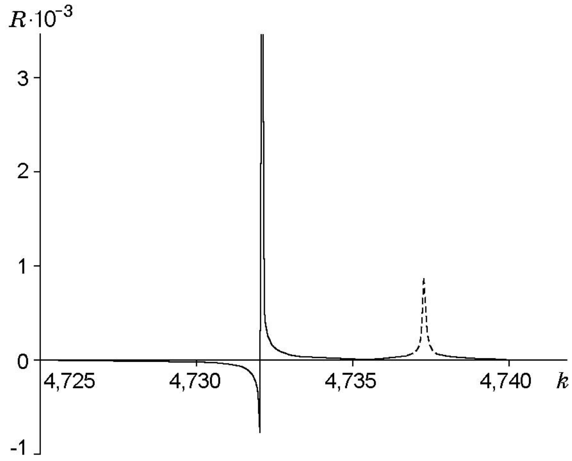

Рис. 2

изображены в окрестности первого продольного резонанса, на рис. 2 — в окрестности второго продольного резонанса. Результаты сравнения этих зависимостей показывают, что в уточненной модели всплески амплитуд конечные и сдвинуты в сторону увеличения k. Из анализа уточненной модели следует, что она может быть использована для описания связанных колебаний пироэлектрических элементов.

В случае $\gamma_{11}^* = 0$ при $T_2 = 0$, что соответствует отсутствию связанности, в задачах 1, 1а решения для наведенного потенциала для обеих моделей совпадают и приводятся к виду $\varphi_1 = T_1 H g_3^* c_{11}^* k \cos k/d_0$.

При моделировании колебаний пироэлектрических элементов часто используется концепция слабой связанности, в которой величины γ_{11}^* и g_3^* предполагаются малыми и строятся регулярные разложения по этим параметрам. Нетрудно показать, что при таком подходе сохраняются бесконечные всплески амплитуды потенциала на частотах продольных и поперечных резонансов. В нерезонансной области использование этого подхода дает результаты, близкие к полученным по уточненной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
2. **Шинкаренко Г. А.** Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. 1. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 7. С. 1252–1260.
3. **Шинкаренко Г. А.** Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. 2. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 2. С. 317–326.
4. **Paul H. S., Renganathan K.** Free vibration of a pyroelectric layer of hexagonal (6 mm) class // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 78, N 2. P. 395–397.
5. **Белоконь А. В., Наседкин А. В.** Колебания термоэлектроупругих тел ограниченных размеров // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов н/Д: МП “Книга”, 1995. С. 31–46.
6. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 25/VI 2001 г.,
в окончательном варианте — 20/IX 2001 г.