УДК 532.529

Н. А. Гумеров

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ГАЗОВЗВЕСЯХ

Большинство теоретических работ по волновой динамике газовзвесей посвящено изучению распространения слабых волн и волн конечной амплитуды в монодисперсных смесях [1—7]. В [1, 8] изложена модель полидисперсной взвеси, состоящей из газа и конечного числа фракций частиц. Обобщение этой модели на непрерывные функции распределения частиц по размерам применительно к описанию распространения звуковых волн в паро- и газовзвесях и некоторые результаты расчетов дисперсии и затухания монохроматических возмущений приведены в [9].

В данной работе показано, что распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в разреженных полидисперсных газовзвесях с произвольным массовым содержанием частиц в смеси и произвольной функцией распределения частиц по размерам может быть описано в рамках модели монодисперсной среды с определенным эффективным радиусом частиц. В частности, это позволяет обобщить результаты ранее проведенных аналитических и численных исследований по распространению длинных волн в монодисперсных взвесях без фазовых переходов на полидисперсные газовзвеси.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим разреженную газовзвесь с малым объемным содержанием частиц в смеси $\alpha_2 \ll 1$. Относительное массовое содержание частиц $m = \alpha_2\rho_2^0/\rho_1^0$ при этом может быть немалым, поскольку обычно истинная плотность материала частиц много больше истинной плотности газа $\rho_2^0 \gg \rho_1^0$. Будем считать частицы несжимаемыми, а газ — идеальным, калорически совершенным (вязкость и теплопроводность газа учитывается лишь в межфазном взаимодействии).

Распространение плоских одномерных волн с характерным периодом $t_* \gg \tau$, где τ — характерное время выравнивания скоростей и температур газа и частиц, в нулевом приближении по малому параметру $\delta = \tau/t_* \ll 1$ описывается моделью эффективного газа [1]

$$d\,\rho + \rho v_x = 0, \quad \rho d_t v + p_x = 0, \quad p/p_0 = (\rho/\rho_0)^{\gamma_e},$$
$$\rho = \rho_1 + \rho_2,\ \rho v = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2,\ p = \rho_1 R_1 T_1$$
$$(v = v_1 = v_2,\ T = T_1 = T_2,\ d_t = \partial/\partial t + v\partial/\partial x);$$
$$c_P = \frac{c_1 + m_0 c_2}{1 + m_0}, \quad c_V = \frac{c_1 - R_1 + m_0 c_2}{1 + m_0}, \quad \gamma_e = \frac{c_P}{c_V}, \quad C_e = \left(\frac{\gamma_e p_0}{\rho_0}\right)^{1/2}.$$

Здесь ρ, v, p, T — средняя плотность, скорость, давление и температура; c, R_1 — теплоемкость (для газа — при постоянном давлении) и газовая постоянная; c_P, c_V — теплоемкости равновесной смеси при постоянном давлении и объеме; γ_e, C_e — равновесные показатель адиабаты и скорость звука в смеси. Индекс 0 внизу относится к начальному невозмущенному состоянию, которое полагается однородным по пространству. Индексы 1 и 2 обозначают соответственно параметры газа и частиц, величины без этих индексов характеризуют смесь в целом. Индексами t и x внизу обозначаются частные производные по времени t и пространственной координате x; d_t — полная (барицентрическая) производная.

В следующем (первом) приближении по малому параметру δ нужно учитывать скоростную и тепловую неравновесность фаз. При этом различия между скоростями и температурами газа и частиц будут небольшими (пропорциональными δ), в связи с чем для силового и теплового межфазного взаимодействия будут справедливы линейные квазистационарные законы.

Пусть частицы в смеси достаточно хорошо перемешаны и распределены по размерам на отрезке $\Delta = [a_-, a_+]$ с плотностью $N(a, x, t)$ (в начальном состоянии $N_0(a)$). Скорость и температура частиц будут функциями от их размеров [9]. Считая, что частицы сферические и непосредственно между собой не взаимодействуют, запишем замкнутую систему уравнений сохранения массы, импульса, энергии и уравнения состояния в виде [1, 9]

$$(1.1)\qquad d_1\rho_1 + \rho_1 v_{1x} = 0,\ \tilde{d}_2\tilde{N} + \tilde{N}\tilde{v}_{2x} = 0,$$

$$\rho_1 d_1 v_1 = -p_x - F,\quad \tilde{d}_2\tilde{v}_2 = (v_1 - \tilde{v}_2)\,\tilde{\tau}_v^{-1},\quad \rho_1 c_1 d_1 T_1 =$$
$$= d_1 p - Q + A,\quad \tilde{d}_2\tilde{T}_2 = (T_1 - \tilde{T}_2)\,\tilde{\tau}_T^{-1};$$

$$F = \int\limits_\Delta \tilde{m}_2\tilde{N}(v_1 - \tilde{v}_2)\,\tilde{\tau}_v^{-1}\,da,\quad Q = \int\limits_\Delta \tilde{m}_2 c_2\tilde{N}(T_1 - \tilde{T}_2)\,\tilde{\tau}_T^{-1}\,da,$$

$$A = \int\limits_\Delta \tilde{m}_2\tilde{N}(v_1 - \tilde{v}_2)^2\,\tilde{\tau}_v^{-1}\,da,\quad p = \rho_1 R_1 T_1,\quad \tilde{m}_2 = \frac{4}{3}\pi a^3\rho_2^0 = \mathrm{const},$$

$$\tilde{\tau}_v = \frac{2}{9}\frac{\rho_2^0 a^2}{\mu_1},\quad \tilde{\tau}_T = \frac{\rho_2^0 c_2 a^2}{3\lambda_1}\left(1 + \frac{\lambda_1}{5\lambda_2}\right);\quad d_j = \frac{\partial}{\partial t} + v_j\frac{\partial}{\partial x},\quad j = 1, 2.$$

Здесь F и Q — суммарные потоки импульса и тепла от газа к частицам; A — работа межфазных сил; τ_v и τ_T — квазистационарные времена скоростной и тепловой релаксации частиц радиуса a*; μ, λ — динамическая вязкость и теплопроводность; d_j — полные производные вдоль траекторий v_j $(j = 1, 2)$. Величины, зависящие от a, помечены знаком $\sim$.

Для дальнейшего анализа введем среднюю плотность и среднемассовую скорость смеси в целом и диффузионные скорости фаз

$$(1.2)\qquad \rho = \rho_1 + \int\limits_\Delta \tilde{m}_2\tilde{N}da,\ \rho v = \rho_1 v_1 + \int\limits_\Delta \tilde{m}_2\tilde{N}\tilde{v}_2\,da,$$

$$w_1 = v_1 - v,\ \tilde{w}_2 = \tilde{v}_2 - v,\ \rho_2 = \rho - \rho_1.$$

Из этого определения следует

$$(1.3)\qquad \rho_1 w_1 + \int\limits_\Delta \tilde{m}_2\tilde{N}\tilde{w}_2\,da = 0;\quad d_j = d_t + w_j\partial/\partial x,\quad j = 1, 2;$$

$$d_t\rho + \rho v_x = 0,\quad \rho d_t v = -p_x - \left(\rho_1 w_1^2 + \int\limits_\Delta \tilde{m}_2\tilde{N}\tilde{w}_2^2\,da\right)_x,$$

где уравнения сохранения массы и импульса смеси получаются интегрированием соответствующих уравнений (1.1) по массам частиц и сложением с уравнениями сохранения для газовой фазы.

2. Первое приближение по малому параметру δ. Уравнения сохранения импульса и энергии частиц радиуса a из (1.1) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, если рассматривать их вдоль траекторий движения индивидуальных частиц. При малых $\delta \sim \tilde{\tau}_v/t_* \sim \tilde{\tau}_T/t_*$ решения этих уравнений относительно $\tilde{v}_2$ и $\tilde{T}_2$ можно представить в виде формальных рядов

$$(2.1)\qquad \tilde{v}_2 = v_1 - \tilde{\tau}_v d_2 v_1 + \ldots,$$

$$\tilde{T}_2 = T_1 - \tilde{\tau}_T\tilde{d}_2 T_1 + \tilde{\tau}_T{}^2\tilde{d}_2{}^2 T_1 - \ldots$$

Из первого выражения (2.1) и определения (1.2) находим

$$(2.2)\qquad w_1 - \tilde{w}_2 = \tilde{\tau}_v(d_t v + \tilde{d}_2 w_1 + \tilde{w}_2 v_x) + O(v\delta^2).$$

Интегрируя (2.2) по массам частиц и учитывая (1.2), (1.3), имеем

$$(2.3)\qquad w_1 = \rho^{-1}(d_t v)\int\limits_\Delta \tilde{m}_2\tilde{\tau}_v\tilde{N}da + O(v\delta^2),\quad \tilde{w}_2 = w_1 - \tilde{\tau}_v d_t v + O(v\delta^2).$$

---

* τ_v — стоксово время релаксации; τ_T получается из трехтемпературной модели теплового взаимодействия [6, 7] с безразмерными тепловыми потоками от поверхности частиц в газ $\mathrm{Nu}_1 = 2$ и от поверхности частиц в фазу частиц $\mathrm{Nu}_2 = 10$, последним эффектом обычно можно пренебречь из-за $\lambda_1 \ll \lambda_2$ (двухтемпературная схема) [7].

Из уравнений сохранения массы и числа частиц следует

$$\rho^{-1} d_t\rho = \rho_1^{-1} d_t\rho_1 + O(\delta v_x) = \widetilde{N}^{-1} d_t\widetilde{N} + O(\delta v_x) = -v_x,$$

или $\widetilde{N} = \rho\rho_0^{-1}\widetilde{N}_0(1 + O(\delta))$, $m = m_0(1 + O(\delta))$ $(m = \rho_2/\rho_1)$. Общая система уравнений при использовании выражений (2.1), (2.3), (1.2), (1.3) в первом приближении по δ представима в форме

$$d_t\rho + \rho v_x = 0,\ \rho d_t v + p_x = 0, \tag{2.4}$$
$$p = \rho_1 R_1 T_1,\ d_t\rho_1 + \rho_1 v_x + (\rho_1 w_1)_x = 0,$$
$$(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) d_t T_1 - d_t p - c_2\theta_1 + w_1\rho_1(c_1 - c_2) T_{1x} = 0,$$
$$w_1 = m_0(1 + m_0)^{-1}\tau_v d_t v,\ \theta_1 = \rho m_0(1 + m_0)^{-1}\tau_T d_t{}^2 T_1.$$

Важным является то обстоятельство, что отпадает надобность в уравнении сохранения числа частиц радиуса a (уравнении для плотности распределения $\widetilde{N}$), поскольку в оставшуюся систему входят лишь интегральные характеристики начального распределения $N_0(a)$ через средние времена релаксации τ_v и τ_T:

$$\tau_j = \left(\int\limits_\Delta \widetilde{m}_2\widetilde{\tau}_j\widetilde{N}_0\, da\right)\Big/\left(\int\limits_\Delta \widetilde{m}_2\widetilde{N}_0\, da\right),\quad j = v, T, \tag{2.5}$$
$$\tau_v = \frac{2}{9}\rho_2^0 a_{5,3}^2\mu_1^{-1},\quad \tau_T = \frac{1}{3}\rho_2^0 c_2 a_{5,3}^2\lambda_1^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}\lambda_1\lambda_2^{-1}\right).$$

Здесь $a_{5,3}$ — средний радиус из серии [9]

$$a_{m,n} = \left[\left(\int\limits_\Delta N_0(a)\, a^m\, da\right)\Big/\left(\int\limits_\Delta N_0(a)\, a^n\, da\right)\right]^{1/(m-n)}. \tag{2.6}$$

3. Некоторые упрощения. До сих пор, проводя разложения по малому параметру δ, мы не делали никаких ограничений на амплитуды рассматриваемых волн. Систему (2.4) можно существенно упростить, считая, что относительные амплитуды возмущений конечны, т. е. $\varepsilon \ll \delta^{-1}$, где $\varepsilon \sim (p - p_0)/p_0 \sim (\rho - \rho_0)/\rho_0 \sim (T - T_0)/T_0$. В этом случае последним слагаемым в уравнении сохранения энергии по сравнению с остальными можно пренебречь, а в членах, пропорциональных δ, в качестве коэффициентов использовать невозмущенные параметры среды. В частности, оператор d_t в w_1 и θ_1 из (2.4) коммутирует с $\partial/\partial x$: $d_t(\partial/\partial x) = (\partial/\partial x) d_t$.

Введем вместо переменной ρ_1 относительное массовое содержание частиц в смеси $m = \rho_2/\rho_1$, $\rho = \rho_1(1 + m)$. Тогда из уравнений неразрывности (2.4) с учетом (2.5), (1.2) имеем

$$d_t m = m_0\tau_v d_t v_x,\ m = m_0(1 + \tau_v v_x),$$

т. е. возмущение m — величина первого порядка малости по δ. Используя этот факт, уравнение сохранения энергии приведем к виду

$$d_t p = -\gamma_e p v_x - \rho_{10} m_0 C_e{}^2\psi_0\tau_v d_t v_x, \tag{3.1}$$
$$\psi_0 = 1 + c_2\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_P}\right)\frac{\tau_T}{\tau_v} = 1 + \frac{\frac{3}{2}(\gamma_1 - 1)\bar{c}^2 \Pr_1\left(1 + \frac{1}{5}\bar{\lambda}\right)(1 + m_0)}{(1 + m_0\bar{c})(1 + \gamma_1 m_0\bar{c})},$$
$$\bar{c} = c_2/c_1,\ \bar{\lambda} = \lambda_1/\lambda_2,\ \Pr_1 = \mu_1 c_1/\lambda_1,\ \gamma_1 = c_1/(c_1 - R_1).$$

Подставляя в (3.1) v_x из уравнения неразрывности, видим, что соотношение можно один раз проинтегрировать по t и получить уравнение состояния $p = p(\rho, d_t\rho)$. Тем самым систему (2.4) представим в следующей канонической форме:

$$d_t\rho + \rho v_x = 0,\ \rho d_t v + p_x = 0, \tag{3.2}$$
$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^{\gamma_e} + \gamma_e\tau_0 d_t\rho/\rho_0.$$

Здесь введено характерное время релаксации средней плотности смеси $\tau_0 = \tau_v\psi_0 m_0/(1 + m_0)$.

В лагранжевых переменных t, ξ, где $v = d_t x$ и оператор d_t переходит в оператор частного дифференцирования, (3.2) сводится к одному уравнению для безразмерной плотности $\bar\rho = \rho/\rho_0$:

$$(\bar\rho^{-1})_{tt} + \gamma_e^{-1}C_e^2(\bar\rho^{\gamma_e})_{\xi\xi} + C_e^2\tau_0\bar\rho_{t\xi\xi} = 0. \tag{3.3}$$

Для малых возмущений $\bar\rho = 1 + \varepsilon R$, $\varepsilon \ll 1$, имеем из (3.3)

$$R_{tt} - C_e{}^2 R_{\xi\xi} - C_e{}^2\tau_0 R_{t\xi\xi} = 0. \tag{3.4}$$

Линеаризация (3.2) приводит к (3.4), где под R можно понимать возмущение плотности, давления или скорости, а дифференцирование по ξ отождествить с дифференцированием по x. Дисперсионное соотношение, соответствующее уравнению (3.4), согласуется с низкочастотной асимптотикой комплексного волнового числа для полидисперсных взвесей [9] (в [9] ψ_0 не содержит $\bar\lambda$ в связи с малостью этой величины).

Рассматривая релаксационный член в уравнении состояния (3.2) как малую поправку, возмущающую волну Римана, систему (3.2) в приближении $\varepsilon\delta \ll 1$ сводим к уравнению Бюргерса для скорости [10], которое для волны, бегущей вправо, в координатах η, t, где $\eta = x - C_e t$, имеет вид

$$v_t + \frac{\gamma_e + 1}{2} v v_\eta = \frac{\tau_0}{2} C_e^2 v_{\eta\eta}. \tag{3.5}$$

Производя в (3.5) замену, соответствующую римановской волне $v = 2(\gamma_e - 1)^{-1} C_e\left[(\rho/\rho_0)^{(\gamma_e-1)/2} - 1\right]$ и $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{1/\gamma_e}$, можно получить эволюционные уравнения для плотности и давления (диссипативные члены при этом можно линеаризовать по ε).

Уравнение (3.5) позволяет ввести понятия вязкости и теплопроводности эффективного газа, поскольку аналогичным уравнением описывается распространение слабонелинейных волн в газе с коэффициентами (см. [10])

$$\zeta_e + \frac{4}{3}\mu_e = \frac{\rho_0 C_e^2 m_0}{1 + m_0}\tau_v, \quad \lambda_e = \frac{\rho_0 c_2 C_e^2 m_0}{1 + m_0}\tau_T$$

$$\left(\zeta_e + \frac{4}{3}\mu_e + \lambda_e\left(c_V^{-1} - c_P^{-1}\right) = \rho_0 C_e^2\tau_0\right),$$

где ζ_e, μ_e — объемная и динамическая вязкости, λ_e — теплопроводность эффективного газа (такое разделение в известной мере условно).

Отметим, что уравнение (3.5) согласуется с уравнением Бюргерса для скорости газа v_1, полученным в [5].

4. Заключение. Мы показали, что распространение длинных волн конечной амплитуды в полидисперсной взвеси будет таким же, как в монодисперсной газовзвеси с идентичными теплофизическими свойствами фаз и радиусом частиц $a_{5,3}$. Этот вывод, однако, нельзя распространить на короткие волны или волны умеренной длительности, поскольку для слабых волн при $\delta \gg 1$ эффективным является радиус $a_{3,2}$, а в области дисперсии звука $\delta \sim 1$ модель монодисперсной газовзвеси может давать результаты, качественно отличающиеся от получаемых в рамках модели полидисперсной смеси [9].

Радиусы $a_{m,n}$, определенные соотношением (2.6), обладают свойством симметрии $a_{m,n} = a_{n,m}$, лежат на отрезке Δ и образуют при фиксированном n упорядоченную последовательность $a_{m,n} > a_{l,n}$ при $m > l$ (последнее можно доказать, пользуясь неравенством Гельдера). Это, в частности, означает, что $a_{5,3} \geqslant a_{3,2} \geqslant a_{3,0} \geqslant a_{2,0} \geqslant a_{1,0}$. Иными словами, радиус $a_{5,3}$ для немонодисперсных взвесей превышает матожидание $a_{1,0}$, среднеповерхностный и среднеобъемный радиусы $a_{2,0}$, $a_{3,0}$ и «объемноповерхностный» радиус $a_{3,2}$, которые, как правило, измеряются в экспериментах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1.
2. **Ивандаев А.И., Кутушев А.Г., Нигматулин Р.И.** Математическое моделирование процесса взаимодействия с жесткими стенками ударных волн в газовзвесях // Физика и химия обработки материалов. - 1986. - № 2.
3. **Davidson G.A.** A Burger's equation for finite amplitude acoustics in fogs // J. Sound and Vibration. - 1976. - V. 45, N 4.
4. **Борисов А.А., Вахгельт А.Ф., Накоряков В.Е.** Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газовзвесях // ПМТФ. – 1980. – № 5.
5. **Тараканов С.В., Тодес О.М.** Приближение Бюргерса для плоских длинноволновых возмущений в аэровзвесях // ПМТФ. – 1982. – № 1.
6. **Гумеров Н.А., Ивандаев А.И.** Особенности распространения высокочастотных акустических возмущений в паро- и газовзвесях // ПМТФ. – 1985. – № 6.
7. **Gumerov N.A., Ivandaev A.I., Nigmatulin R.I.** Sound waves in monodisperse gas-particle or vapour-droplet mixtures // J. Fluid Mech. - 1988. - V. 193. - P. 53.
8. **Нигматулин Р.И.** Некоторые вопросы гидромеханики двухфазных полидисперсных сред // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1968. – № 3.
9. **Гумеров Н.А., Ивандаев А.И.** Распространение звука в полидисперсных газовзвесях // ПМТФ. – 1988. – № 5.
10. **Руденко О.В., Солуян С.И.** Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука, 1975.

г. Тюмень *Поступила 6/III 1989 г.*