ПМТФ, № 6, 1971

УДК 533.9 + 537.56

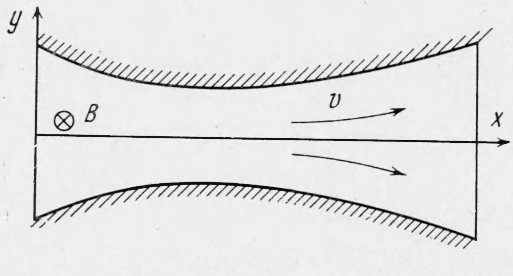
ОБРАЗОВАНИЕ ВИХРЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА ПРИ ТЕПЛОВОМ УСКОРЕНИИ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

А. П. Шубин

(Москва)

Рассмотрено стационарное плоское медленно изменяющееся течение полностью ионизованной невязкой квазинейтральной плазмы в профилированном канале со сплошными металлическими стенками. Учитывается эффект Холла. Показано, что при $\beta \gg 1$, где β — плазменный параметр ($\beta = 8\pi p / B^2$, p — газокинетическое давление плазмы, B — напряженность магнитного поля), ускорение плазмы обязательно сопровождается появлением собственных электромагнитных полей и электрического тока, распределение которого при малых разрядных напряжениях носит вихревой характер. Вихри тока исчезают при увеличении разрядного напряжения. Подробно исследовано ускорение плазмы с изотермичными электронами.

Стационарные течения плазмы с собственным магнитным полем в профилированных плоских и осесимметричных каналах при больших значениях параметра β рассматривались неоднократно (см., например, [1, 2]). Было отмечено, что такие течения могут сопровождаться возникновением приэлектродных вихрей электрического тока и что при уменьшении параметра β вихри исчезают. Цель данной работы — учет эффекта Холла, т. е. учет влияния элементарных механизмов ускорения плазмы [3] на образование электромагнитных полей и токов в ускоряющейся плазме.



Фиг. 1

1. С целью упрощения вычислений рассмотрим стационарное плоское (в плоскости xy) МГД течение полностью ионизованной невязкой плазмы в канале со сплошными непроницаемыми металлическими стенками — электродами (фиг. 1). Магнитное поле, обусловленное протекающим разрядным током, направлено вдоль оси z, в направлении которой канал считается бесконечно широким.

Будем считать, что течение — медленно изменяющееся, а магнитное число Рейнольдса велико ($R_m \gg 1$). Вместо переменной y введем нормированную функцию потока ψ

$$\rho \mathbf{v} = m^{\cdot} \nabla\psi \times \mathbf{n}_z \tag{1.1}$$

где ρ — плотность плазмы, v — скорость плазмы (ионов), $m^{\cdot}$ — секундный массовый расход, т. е. масса плазмы, проходящая за секунду через поперечное сечение канала.

В переменных (x, ψ) система уравнений, описывающая течение, имеет вид [4]

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{dP}{dx}, \qquad P(x) = p(\rho) + \frac{B^2}{8\pi}$$

$$\frac{\nu_m}{c}\,\frac{\rho v}{\dot m}\,\frac{\partial B}{\partial \psi} = -\frac{\partial \varphi_{\text{т}}}{\partial x} + \frac{M}{e\rho}\,\frac{dP}{dx} \qquad \left(\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{B}{\rho c} = -\frac{1}{\dot m}\,\frac{\partial \varphi_{\text{т}}}{\partial \psi}, \qquad \varphi_{\text{т}} = \varphi + \frac{M}{e}\int \frac{dp_i(\rho)}{\rho}$$

Здесь φ — электрический потенциал плазмы, σ — проводимость плазмы.

Считается, что состояние компонент плазмы описывается политропическими зависимостями $p_{i,e} = p_{i,e}(\rho)$, последнее справедливо при $\beta \gg 1$, поскольку джоулево тепловыделение мало, а влияние теплоотвода или теплоподвода и излучения может быть учтено надлежащим выбором показателя политропы. Если $\beta \gg 1$, то система (1.2) может быть упрощена. Действительно, в нулевом приближении по β^{-1} имеем $P(x) = p(\rho)$, т. е. $\rho = \rho(x)$, при этом из первого уравнения (1.2) получаем

$$\tfrac{1}{2} v^2 + w(\rho) = F(\psi) \qquad \left(w = \int dp(\rho)/\rho\right) \tag{1.3}$$

Если $F(\psi) = \text{const}$, то из (1.3) следует, что $v = v(x)$. Поскольку $\sigma \sim T^{3/2}$ (T — температура) и, следовательно, $\sigma = \sigma(x)$, можно ввести вместо переменной x переменную η

$$\eta = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\nu_m \rho^2 v}{\dot m^2}\, dx \tag{1.4}$$

где координата x_0 соответствует входу в канал. Для потенциала φ и магнитного поля B получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{M}{e}\,\frac{dw_e}{d\eta} \qquad \left(w_e = \int \frac{dp_e(\rho)}{\rho}\right) \tag{1.5}$$

$$B = -\frac{\rho c}{\dot m}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \tag{1.6}$$

Последние слагаемые в правых частях третьего уравнения (1.2) и уравнения (1.5) учитывают эффект Холла; при $\beta \gg 1$ это эквивалентно учету члена $\nabla p_e / en$ в законе Ома.

Из уравнения (1.3) следует, что ускорение плазмы при $\beta \gg 1$ носит газодинамический характер, а распределения полей и тока целиком определяются газодинамическим характером течения. Из наличия правой части в уравнении (1.5) следует, что потенциал плазмы непостоянен даже при отсутствии разности потенциалов между электродами, а из уравнения (1.6) следует, что в плазме имеется собственное (непостоянное) магнитное поле, т. е. по плазме течет электрический ток. Это является естественным следствием трансформации тепловой энергии электронов в энергию направленного движения плазмы (ионов), такая трансформация должна сопровождаться появлением ускоряющего ионы продольного электрического поля [5] и «электронного ветра», т. е. продольного тока [3]. При отсутствии разности потенциалов между электродами разрядный ток отсутствует; следовательно, распределение электрического тока в канале имеет вихревой характер.

2. Если на входе в канал продольный электрический ток отсутствует и электроды эквипотенциальны, то граничные условия к уравнению (1.5) следующие:

$$\varphi(0, \psi) = U\psi, \qquad \varphi(\eta, 0) = 0, \qquad \varphi(\eta, 1) = U \tag{2.1}$$

Здесь $U = \text{const}$ — разрядное напряжение и принято, что на катоде $\psi = 0$, на аноде $\psi = 1$. Решение уравнения (1.5) с граничными условиями

(2.1) имеет вид

$$\varphi = U\psi - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos\left[\pi(2k+1)\left(\psi - \frac{1}{2}\right)\right] \int_0^{\eta} \frac{dw_e(\tau)}{d\tau} \times$$
$$\times \exp\left[-\pi^2(2k+1)^2(\eta-\tau)\right] d\tau \qquad (2.2)$$

Обращает на себя внимание четность последнего слагаемого в правой части (2.2) по ψ относительно линии $\psi = {}^1/_2$ — довольно очевидный факт, следующий из симметричности задачи при $U = 0$.

В качестве конкретного примера рассмотрим течение плазмы с изотермичными электронами ($T_e = \mathrm{const} = T$) и ионами ($T_i = T_e$).

При этом $w_e = w / 2$ и из уравнения (1.3) имеем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{2T}{M} \ln \frac{\rho}{\rho(0)} = \frac{v^2(0)}{2} \qquad (2.3)$$

Если выбрать зависимость $\rho(\eta)$ в виде

$$\rho = \rho(0) \exp[-\eta] \qquad (2.4)$$

то из (2.3) находим

$$v = [v^2(0) + 4T\eta / M]^{1/2} \qquad (2.5)$$

Соотношение (2.2) дает

$$\varphi = U\psi + \frac{T}{2e}\left[\left(\psi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] +$$
$$+ \frac{4T}{e} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \exp\left[-\pi^2(2k+1)^2 \eta\right] \frac{\cos[\pi(2k+1)(\psi - {}^1/_2)]}{\pi^3(2k+1)^3} \qquad (2.6)$$

Следовательно

$$B = -\frac{\rho(0)c}{m^{\cdot}} \exp[-\eta] \left\{U + \frac{T}{e}\left(\psi - \frac{1}{2}\right) -\right.$$
$$\left. -4\frac{T}{e} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[\pi(2k+1)(\psi - {}^1/_2)]}{\pi^2(2k+1)^2} \exp\left[-\pi^2(2k+1)^2\eta\right]\right\} \qquad (2.7)$$

При $\eta = 0$ два последних слагаемых в фигурной скобке взаимно уничтожаются. Учитывая экспоненциальный спад членов ряда, приближенно можем записать

$$B \approx -\frac{\rho(0)c}{m^{\cdot}} \exp(-\eta) \left\{U + \frac{T}{e}\left(\psi - \frac{1}{2}\right)[1 - \exp(-\pi^2\eta)]\right\} \qquad (2.8)$$

Вводя безразмерный параметр $\varkappa$

$$\varkappa = 2eU / T \geqslant 0$$

перепишем выражение (2.8)

$$B \approx B(0) \exp(-\eta) \{1 + \varkappa^{-1}(2\psi - 1)[1 - \exp(-\pi^2\eta)]\} \qquad (2.9)$$

где $B(0) = -\rho(0)cU / m^{\cdot}$ — магнитное поле на входе в канал ($\eta = 0$).

Рассмотрим подробнее выражение (2.9). Функция $B(\eta, \psi)$ монотонно спадает с ростом ψ ($B(0) \leqslant 0$), достигая максимума B^* и минимума B_* на электродах $\psi = 0$, $\psi = 1$. При этом

$$B^*(\eta) = B(\eta, 0) = B(0) \exp(-\eta) \{1 - \varkappa^{-1}[1 - \exp(-\pi^2\eta)]\} \qquad (2.10)$$
$$B_*(\eta) = B(\eta, 1) = B(0) \exp(-\eta) \{1 + \varkappa^{-1}[1 - \exp(-\pi^2\eta)]\}$$

Функции $B^*(\eta)$ и $B_*(\eta)$ имеют точки экстремума η_c, соответствующие центрам вихревой структуры электрического тока. При этом

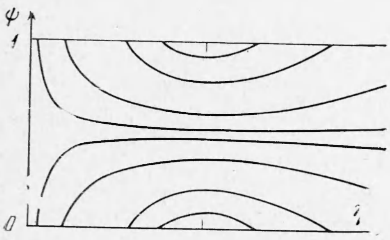
$$\eta_c|_{\psi=0} = \pi^{-2}\ln\left|\frac{1+\pi^2}{1-\varkappa}\right|, \qquad \eta_c|_{\psi=1} = \pi^{-2}\ln\left|\frac{1+\pi^2}{1+\varkappa}\right| \tag{2.11}$$

Уравнение линии $\psi = \psi_0(\eta)$, соответствующей нулевой напряженности магнитного поля, имеет вид

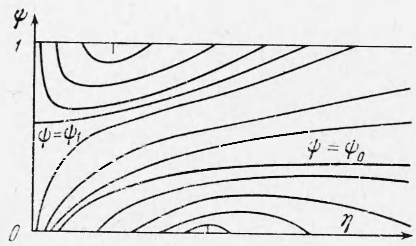
$$\psi_0(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{\varkappa}{2}\,[1 - \exp(-\pi^2\eta)]^{-1} \tag{2.12}$$

Таким образом, линия $B = 0$ существует при $\varkappa \leqslant 1$. Если $\psi > \psi_0$, то $B < 0$, если $\psi < \psi_0$, то $B > 0$. При $\varkappa = 0$ $\psi_0(\eta) \equiv {}^1/_2$, при $\varkappa > 0$ и $\eta \to \infty$ $\psi_0 \to (1 - \varkappa)/2$.

Рассмотрим вначале случай $\varkappa = 0$, когда $B(0) = 0$. При этом $\eta_c|_{\psi=0} = \eta_c|_{\psi=1} = \pi^{-2}\ln(1 + \pi^2)$, точки экстремума линий электрического тока $B(\eta, \psi) = \text{const}$ совпадают с η_c.



Фиг. 2



Фиг. 3

Картина распределения тока в канале при $\varkappa = 0$ показана на фиг. 2. При возрастании параметра $\varkappa$ магнитное поле на входе в канал отлично от нуля (отрицательно), имеются две сепаратрисы, ограничивающие области вихревой структуры, одна является линией $\psi_0(\eta)$ нулевой напряженности магнитного поля, другая — линией $B(\eta, \psi) = B(0)$, т. е.

$$\psi = \psi_1(\eta) = \frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2}\,\frac{\exp(\eta) - 1}{1 - \exp(-\pi^2\eta)} \tag{2.13}$$

Сепаратриса $\psi = \psi_1(\eta)$ имеет положительную производную $d\psi_1/d\eta$, она существует (и пересекается с анодом, т. е. допускает значение $\psi = 1$) при $\varkappa \leqslant \pi^2$. Из (2.11) следует, что при возрастании $\varkappa$ прикатодный вихрь тока сдвигается в сторону бóльших η, а прианодный вихрь тока смещается к входу в канал. Картина распределения электрического тока при $0 < \varkappa < 1$ показана на фиг. 3. В случае $\varkappa \geqslant 1$ прикатодный вихрь тока и сепаратриса $\psi = \psi_0(\eta)$ исчезают, и во всем канале $B < 0$ (фиг. 4). По достижении параметром $\varkappa$ значения $\varkappa = \pi^2$ исчезает и прианодный вихрь (сепаратриса $\psi_1(\eta)$ стягивается в точку $\eta = 0$, $\psi = 1$ на входе в канал), при $\varkappa > \pi^2$ распределение тока в канале безвихревое (фиг. 5).

Условие $\beta \gg 1$, т. е. $B^2/8\pi p \ll 1$ можно записать следующим образом:

$$\frac{\rho(0)\,c^2 MT(1+\varkappa)^2}{32\,\pi e^2 m'^2} \ll 1 \tag{2.14}$$

Если $v^2(0) \ll 4T/M$, условие (2.14) принимает вид

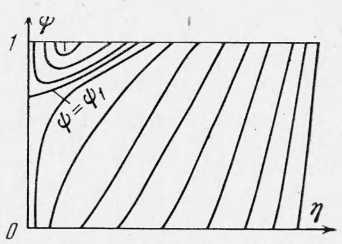
$$\frac{e}{16}\,\frac{c^2(1+\varkappa)^2}{\omega_p^{\,2} f^{*2}} \ll 1 \qquad (e = 2.718\ldots) \tag{2.15}$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n(0) / M$, f^* — ширина канала в критическом сечении (т. е. там, где $df / dx = 0$).

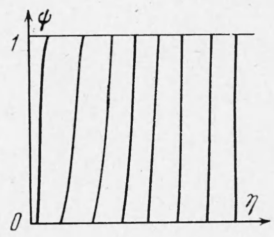
Если $v^2(0) \gg 4T / M$, то из (2.14) получим

$$\frac{T}{Mv^2(0)}\,\frac{c^2(1+\varkappa)^2}{8\omega_p^2 f^2(0)} \ll 1 \tag{2.16}$$

Из условий (2.15), (2.16) следует, что разрядное напряжение не должно быть слишком велико. Увеличение параметра $\varkappa$ соответствует уменьше-



Фиг. 4



Фиг. 5

нию β. Таким образом, приэлектродные вихри тока исчезают при уменьшении β. Параметр обмена $\xi = Mc\,|B(0)|\,/\,4\pi e m^{\cdot}$ в рассматриваемой задаче равен

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{c^2\varkappa e}{4\omega_p^2 f^{*2}}, & v^2(0) \ll \dfrac{4T}{M} \\[2ex] \dfrac{T}{Mv^2(0)}\,\dfrac{c^2\varkappa}{2\omega_p^2 f^2(0)}, & v^2(0) \gg \dfrac{4T}{M} \end{cases} \tag{2.17}$$

Сравнивая (2.17) с (2.14) и (2.15), видим, что

$$\xi \sim \frac{1}{\beta^*}\,\frac{\varkappa}{(1+\varkappa)^2} \ll 1 \tag{2.18}$$

Здесь β^* — максимальное значение β.

Для заданного β параметр обмена ξ максимален при $\varkappa = 1$, когда исчезает прикатодный токовый вихрь.

Поступила 13 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Л. М., Соловьев Л. С. Токовые вихри и критические поверхности в магнитогидродинамическом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
2. Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И. Влияние конечной проводимости на двумерное течение плазмы в коаксиальном канале. Магнитная гидродинамика, 1967, № 2.
3. Морозов А. И., Артюшков Е. В., Соловьев Л. С., Шубин А. П. Некоторые свойства течений проводящего газа в магнитном поле. В сб. «Низкотемпературная плазма», М., «Мир», 1967.
4. Морозов А. И., Шубин А. П. К теории плоских течений хорошо проводящей плазмы в канале. ПМТФ, 1970, № 4.
5. Плютто А. А. Ускорение положительных ионов в расширяющейся плазме вакуумных искр. ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 6.