

УДК 517.968: 519.612: 004.272.42

К вопросу об одновременном восстановлении плотности и уравнения поверхности в обратной задаче гравиметрии для контактной поверхности*

И.В. Бойков, В.А. Рязанцев

Пензенский государственный университет, ул. Красная, 40, Пенза, 440026
E-mails: i.v.boikov@gmail.com (Бойков И.В.), ryazantsev@mail.ru (Рязанцев В.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 13, 2020.

Бойков И.В., Рязанцев В.А. К вопросу об одновременном восстановлении плотности и уравнения поверхности в обратной задаче гравиметрии для контактной поверхности // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 3. — С. 289–308.

Исследуются аналитические и численные методы решения обратных задач логарифмического и ньютоновского потенциалов. Рассматривается следующая задача в случае ньютоновского потенциала. В области $\Omega\{\Omega : -l \leq x, y \leq l, H - \varphi(x, y) \leq z \leq H\}$ распределены с плотностью $\rho(x, y)$ источники, возмущающие гравитационное поле Земли. (Здесь $\varphi(x, y)$ — неотрицательная финитная с носителем $\Omega = [-l, l]^2$ функция, $0 \leq \varphi(x, y) \leq H$.) Требуется одновременно восстановить глубину H залегания контактной поверхности $z = H$, плотность $\rho(x, y)$ источников и функцию $\varphi(x, y)$, определяющую поверхность $z = H - \varphi(x, y)$. Методы восстановления основаны на использовании построенных в работе нелинейных моделей теории потенциала. В случае ньютоновского потенциала в качестве исходных используются следующие виды информации: 1) значения поля силы тяжести и его первой и второй производных; 2) значения поля силы тяжести на разных высотах. Продемонстрирована возможность одновременного восстановления функций $\rho(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и константы H в аналитическом виде. Построены итерационные методы для их одновременного восстановления. На модельных примерах продемонстрирована эффективность предложенных численных методов.

DOI: 10.15372/SJNM20200304

Ключевые слова: обратные задачи, логарифмический и ньютоновский потенциалы, гравиразведка, некорректные задачи, регуляризация.

Boikov I.V., Ryazantsev V.A. On the simultaneous restoration of the density and the surface equation in the inverse gravimetry problem for a contact surface // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 3. — P. 289–308.

Analytical and numerical methods for solving inverse problems of logarithmic and the Newtonian potentials are investigated. The following contact problem in the case of a Newtonian potential is considered. In the domain $\Omega\{\Omega : -l \leq x, y \leq l, H - \varphi(x, y) \leq z \leq H\}$, sources with the density $\rho(x, y)$, perturbing the Earth's gravitational field, are distributed. Here, $\varphi(x, y)$ is a non-negative finite function with the support $\Omega = [-l, l]^2$, $0 \leq \varphi(x, y) \leq H$. It is required to simultaneously restore the depth H of the occurrence of the contact surface $z = H$, the density $\rho(x, y)$ of sources, and the function $\varphi(x, y)$. The methods of simultaneous determination are based on the use of nonlinear models of potential theory which are developed in the paper. The following kinds of information are used as the basic ones: 1) values of the gravity field and its first and second derivatives; 2) values of the gravity field at the different heights. The possibility of the simultaneous recovery of the functions $\rho(x, y)$, $\varphi(x, y)$ and the constants H in the analytical form is demonstrated. Iterative methods for their simultaneous recovery. The model examples demonstrate the effectiveness of the proposed numerical methods are constructed.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00594).

Keywords: *inverse problems, logarithmic and Newtonian potentials, gravimetry, ill-posed problems, regularization.*

1. Введение

Пусть $Oxyz$ — декартова система координат с осью Oz , направленной вниз.

Вначале рассмотрим постановку обратной задачи логарифмического потенциала. Пусть источники гравитационного поля имеют бесконечную протяженность в направлении оси Oy . Тогда задачу можно рассматривать как двухмерную. Пусть в области $\Omega \{ \Omega : -l \leq x \leq l, H - \varphi(x) \leq z \leq H \}$ распределены с плотностью $\rho(x, z)$ источники, возмущающие гравитационное поле Земли. Известно [1], что потенциал такого поля в произвольной точке (x, z) выражается формулой:

$$v(x, z) = -\frac{G}{4\pi} \iint_{\Omega} \rho(\xi, \zeta) \ln((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2) d\xi d\zeta, \quad (1.1)$$

где G — гравитационная постоянная.

В случае когда функция $\rho(\xi, \zeta)$ зависит только от переменной ξ ($\rho(\xi, \zeta) \equiv \rho(\xi)$), из формулы (1.1) получаем следующее выражение для поля силы тяжести [2]:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= -\frac{\partial v(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{G}{4\pi} \int_{-l}^l \rho(\xi) \int_H^{H-\varphi(\xi)} \ln((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2) d\zeta d\xi \right] \\ &= -\frac{G}{4\pi} \int_{-l}^l \rho(\xi) \int_H^{H-\varphi(\xi)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2) d\zeta d\xi \\ &= \frac{G}{4\pi} \int_{-l}^l \rho(\xi) \ln \left(\frac{(x - \xi)^2 + (z - H)^2}{(x - \xi)^2 + (z - H + \varphi(\xi))^2} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для дальнейшего анализа аппроксимируем уравнение (1.2) более простым, но тоже нелинейным уравнением. Воспользуемся справедливым при $|u| < 1$ разложением

$$\ln \left[\frac{(x - \xi)^2 + (z - H)^2}{(x - \xi)^2 + (z - H + \varphi(\xi))^2} \right] = \ln(1 - u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k u^k}{k}, \quad u = \frac{2(z - H)\varphi(\xi) + (\varphi(\xi))^2}{(x - \xi)^2 + (z - H + \varphi(\xi))^2}.$$

Тогда

$$u(x, z) = \frac{G}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \int_{-l}^l \rho(\xi) \left(\frac{2(z - H)\varphi(\xi) + (\varphi(\xi))^2}{(x - \xi)^2 + (z - H + \varphi(\xi))^2} \right)^k d\xi.$$

Ограничиваясь первым слагаемым, имеем

$$u(x, z) = -\frac{G}{4\pi} \int_{-l}^l \rho(\xi) \frac{2(z - H)\varphi(\xi) + (\varphi(\xi))^2}{(x - \xi)^2 + (z - H + \varphi(\xi))^2} d\xi. \quad (1.3)$$

Рассмотрим следующее представление уравнения (1.3):

$$u(x, z) = \frac{G}{4\pi} \int_{-l}^l \rho(\xi) \frac{2(H-z)\varphi(\xi) - (\varphi(\xi))^2}{(x-\xi)^2 + (z-H)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w^k(\xi) d\xi,$$

где $w(\xi) = \frac{2(z-H)\varphi(\xi) + \varphi^2(\xi)}{(x-\xi)^2 + (z-H)^2}$, справедливое при $|w(\xi)| < 1$.

Будем рассматривать нашу задачу в предположении, что $|\varphi(\xi)| \ll H$. Тогда, полагая в предыдущей формуле $k = 0$, уравнение (1.3) аппроксимируем следующим уравнением:

$$u(x, z) = \frac{G}{4\pi} \int_{-l}^l \rho(\xi) \frac{2(H-z)\varphi(\xi) - (\varphi(\xi))^2}{(x-\xi)^2 + (z-H)^2} d\xi. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) является частным случаем уравнения (1.11) и его исследование опускается.

В уравнении (1.4) имеется три неизвестных: глубина залегания контактной поверхности $z = H$, плотность источников $\rho(x)$ и функция $\varphi(x)$, определяющая поверхность $z = H - \varphi(x)$. Для нахождения этих неизвестных необходимо, кроме значений поля силы тяжести на поверхности $z = 0$, располагать еще двумя дополнительными линейно независимыми множествами данных. Это позволяет сформулировать следующую обобщенную постановку обратной задачи логарифмического потенциала. Требуется, располагая значениями поля силы тяжести на поверхности $z = 0$ и дополнительной информацией в виде значений поля силы тяжести на поверхностях $z = -h_1$, $z = -h_2$ или дополнительной информацией в виде значений первой и второй производных поля силы тяжести на поверхности $z = 0$, определить глубину залегания контактной поверхности $z = H$, плотность источников возмущения $\rho(x)$ и функцию $\varphi(x)$ в уравнении поверхности $z = H - \varphi(x)$, $0 \leq \varphi(x)$, возмущающего тела, занимающего область $H - \varphi(x) \leq z(x) \leq H$.

Пусть в области $D \{D : -l \leq x \leq l, -l_1 \leq y \leq l_1, H - \varphi(x, y) \leq z \leq H\}$ распределены с плотностью $\sigma(x, y, z)$ источники, возмущающие гравитационное поле Земли. Поле силы тяжести над поверхностью Земли определяется уравнением

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\varphi(\zeta, \eta)}^H \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi)(\xi - z) d\zeta d\eta d\xi}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (\xi-z)^2)^{3/2}} = f(x, y, z), \quad (1.5)$$

где $f(x, y, z)$ — экспериментально определяемая величина.

Для описания силы тяжести на поверхности Земли в уравнении (1.5) следует положить $z = 0$.

Как правило, обратная задача ньютоновского потенциала ставится следующим образом. Пусть в области $D \{D : -l \leq x \leq l, -l_1 \leq y \leq l_1, H - \varphi(x, y) \leq z \leq H\}$ расположено гравитирующее тело, создающее в точке (x, y, z) возмущения $f(x, y, z)$. Требуется, располагая значениями функции $f(x, y, 0)$, $(x, y) \in R_2$, плотности $\sigma(x, y, z)$ и константы H , восстановить границу $z = H - \varphi(x, y)$ гравитирующего тела.

Замечание 1.1. В ряде случаев рассматривают другую постановку обратной задачи. Требуется, располагая значениями функций $f(x, y, 0)$, $H - \varphi(x, y)$, $(x, y) \in R_2$, и константы H , восстановить плотность $\sigma(x, y)$ гравитирующего тела.

Предыдущую задачу представим в следующем эквивалентном виде. Предположим, что 1) плотность $\sigma(\zeta, \eta, \xi) \equiv 0$ вне тела; 2) плотность дифференцируема по ξ ; 3) градиент напряженности гравитационного поля известен при $z \leq 0$.

Вычислив по частям интеграл в левой части уравнения (1.5), имеем

$$\begin{aligned} & G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta, H - z - \varphi(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z - \varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \\ & G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta, H - z) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z)^2)^{1/2}} + \\ & G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H - \varphi(\zeta, \eta)}^H \frac{\sigma'_{\xi}(\zeta, \eta, \xi) d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (\xi - z)^2)^{1/2}} = f(x, y, z). \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что плотность не зависит от ξ . Тогда приходим к уравнению

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z - \varphi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z)^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, z). \quad (1.6)$$

Линеаризация уравнения (1.6) при $z \leq 0$ приводит к уравнению

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \left[\frac{(H - z)\varphi(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z)^2)^{3/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, z). \quad (1.7)$$

Ниже для удобства положим $G = 1$. Представим уравнение (1.6) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z)^2)^{1/2} (1 + u)^{1/2}} - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z)^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, z), \quad (1.8)$$

где $u = \frac{\varphi^2(\zeta, \eta) - 2(H - z)\varphi(\zeta, \eta)}{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - z)^2}$. В предположении, что $|u| < 1$ функция $\frac{1}{(1 + u)^{1/2}}$ разлагается в ряд

$$\frac{1}{(1 + u)^{1/2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!} u^n. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.8) и пользуясь равномерной сходимостью ряда (1.9), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2(H-z)\varphi(\zeta, \eta))^n d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (H-z)^2)^{n+1/2}} = f(x, y, z). \quad (1.10)$$

Аппроксимируем уравнение (1.10), ограничившись одним слагаемым в левой части. В результате получаем уравнение

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \frac{(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2(H-z)\varphi(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (H-z)^2)^{3/2}} = f(x, y, z). \quad (1.11)$$

В уравнении (1.11) имеется три неизвестных: глубина залегания контактной поверхности H , плотность источников $\sigma(x, y)$ и функция $\varphi(x, y)$ в уравнении поверхности $z = H - \varphi(x, y)$. Для нахождения этих неизвестных необходимо, кроме значений поля силы тяжести на некоторой поверхности, располагать еще двумя линейно независимыми источниками информации.

Уравнение (1.11) позволяет сформулировать следующую обобщенную постановку обратной задачи ньютоновского потенциала. Требуется, располагая значениями поля силы тяжести на поверхности $z = 0$ и дополнительной информацией в виде значений поля силы тяжести на поверхностях $z = -h_1$, $z = -h_2$ или дополнительной информацией в виде значений первой и второй производных поля силы тяжести на поверхности $z = 0$, определить глубину залегания H контактной поверхности $z = H$, плотность $\sigma(x, y)$ источников, возмущающих гравитационное поле Земли, и неотрицательную финитную (с носителем Ω) функцию $\varphi(x, y)$ в уравнении поверхности $z = H - \varphi(x, y)$, ограничивающей сверху возмущающее тело, занимающее область $H - \varphi(x, y) \leq z \leq H$, $(x, y) \in \Omega$.

Замечание 1.2. В общем случае для одновременного нахождения трех независимых характеристик возмущающего тела $(H, \sigma(x, y), \varphi(x, y))$ требуется информация в виде трех линейно независимых функций, определенных в R_2 . В связи с активным развитием методов тензорной гравиметрии [3] исследование обобщенной обратной задачи гравirazведки представляется естественным. Отметим работы [4-6], в которых геофизические поля исследуются при совместной обработке данных гравirazведки и магниторазведки и гравirazведки и сейморазведки. Кроме того, отметим, что если известна глубина залегания H контактной поверхности, то для нахождения плотности $\sigma(x, y)$ и функции $\varphi(x, y)$, характеризующих возмущающее тело, достаточно располагать информацией в виде двух линейно независимых функций. В настоящее время осуществляются измерения силы тяжести и ее первой производной. Это дает основание считать возможным практическое применение предложенных алгоритмов.

Для решения обратной задачи ньютоновского потенциала в обобщенной постановке прежде всего необходимо показать, что существуют классы функций, на которых уравнение

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (H-z)^2)^{3/2}} = f(x, y, z), \quad (1.12)$$

где $\psi(\zeta, \eta) = \sigma(\zeta, \eta)(\varphi^2(\zeta, \eta) - 2(H-z)\varphi(\zeta, \eta))$, однозначно разрешимо при $z \leq 0$ и при точно заданной правой части, а также выделить эти классы. Положим для определенности $z = 0$. Рассмотрим уравнение

$$K\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} = f(x, y). \quad (1.13)$$

В общем случае решение этого уравнения является некорректной задачей, однако можно выделить классы функций, в которых уравнение (1.13) разрешимо и имеет единственное решение. Покажем, что уравнение (1.13) однозначно разрешимо в классе функций $\psi(\zeta, \eta)$, финитных в некоторой области $\Omega = [-a, a; -b, b]$, $0 < a < \alpha$, $0 < b < \beta$, α и β — конечные числа.

Замечание 1.3. Обязательным условием является конечность чисел α и β . Конкретные значения α и β , как будет следовать из доказательства, не имеют значения.

Обозначим через Ω_n множество $\Omega_n = [-n, n]^2$, $n = 1, 2, \dots$, а через X_n — пространство функций, определенных на Ω_n и удовлетворяющих неравенству

$$\iint_{\Omega_n} |\psi(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Обозначим через X объединение пространств X_n , а через Y образ множества X при отображении K . Нетрудно видеть, что X и Y являются линейными нормированными пространствами. Также очевидно, что X всюду плотно в $L_2(R_2)$. Покажем, что оператор K однозначно отображает пространство X на пространство Y . Так как каждый элемент пространства X принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)^2$, то оператор K определен на каждом элементе пространства X . Таким образом, каждому элементу пространства X отвечает вполне определенный элемент пространства Y .

Покажем, что каждому элементу пространства Y отвечает единственный элемент пространства X . Для этого для каждого элемента $f \in Y$ построим решение уравнения (1.13) и докажем его единственность в пространстве X . Прежде всего построим решение уравнения (1.13). Так как $f \in Y$, то существует по крайней мере один элемент $\psi \in X$, который является решением уравнения (1.13). Так как элемент $\psi \in X$, то он имеет конечный носитель Ω . Построим этот элемент.

Построение опирается на теорему Винера–Пэли для функций многих переменных (см. [7, с. 95]) и следует методу, предложенному в монографии [7, с. 184–187]. Уравнение (1.13) будем рассматривать в пространстве $L_2((-\infty, \infty)^2)$ функций суммируемых с квадратом. Пусть $f(x_1, x_2) \in L_2((-\infty, \infty)^2)$. Обозначим через $F(\omega_1, \omega_2)$ преобразование Фурье функции $f(x_1, x_2)$, определяемое формулой

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \exp\{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)\} dx_1 dx_2.$$

Обратное преобразование Фурье определяется формулой

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2) \exp\{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)\} d\omega_1 d\omega_2.$$

Применим к уравнению (1.13) преобразование Фурье. В результате приходим к уравнению в спектральной области

$$\frac{2\pi}{H}\Psi(\omega_1, \omega_2)e^{-H|\omega|} = F(\omega_1, \omega_2), \quad (1.14)$$

где $\Psi(\omega_1, \omega_2)$, $F(\omega_1, \omega_2)$ — преобразования Фурье функций $\psi(x, y)$, $f(x, y)$, $|\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Преобразование Фурье функции $(x^2 + y^2 + H^2)^{-3/2}$ равно $\frac{1}{H}e^{-H|\omega|}$.

Так как функция $\psi(\zeta, \eta)$ является финитной с носителем Ω , то, согласно теореме Винера–Пэли, функция $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ является целой функцией. Следовательно, функция $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ разлагается в ряд по степеням ω_1, ω_2 , сходящийся при $-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$. Так как функция $e^{-H|\omega|}$ не обращается в нуль при $-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$, то функцию $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ можно представить в виде $\Psi(\omega_1, \omega_2) = (2\pi)^{-1}HF(\omega_1, \omega_2)e^{H|\omega|}$.

Так как $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ — целая функция, то и $(2\pi)^{-1}HF(\omega_1, \omega_2)e^{H|\omega|}$ также является целой функцией. Следовательно, справедливо разложение

$$\Psi(\omega_1, \omega_2) = \frac{HF(\omega_1, \omega_2)e^{H|\omega|}}{2\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k G(\omega_1^0, \omega_2^0)}{k!}, \quad (1.15)$$

где $G(\omega_1, \omega_2) = \frac{HF(\omega_1, \omega_2)e^{H|\omega|}}{2\pi}$, $d^k G(\omega_1^0, \omega_2^0)$ — дифференциал k -го порядка, $k = 1, 2, \dots$, в точке (ω_1^0, ω_2^0) , $d^0 G(\omega_1, \omega_2) = G(\omega_1, \omega_2)$. Из формулы (1.15) имеем

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k G(\omega_1^0, \omega_2^0)}{k!} \right) e^{i(\omega, x)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (\omega, x) = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2. \quad (1.16)$$

Докажем существование последнего интеграла. По предположению функция $\psi(x_1, x_2)$ является финитной функцией, суммируемой с квадратом на своем носителе. Следовательно, она принадлежит пространству $L_2(R_2)$ и $\|\psi(x_1, x_2)\|_{L_2(R_2)} = \|\Psi(\omega_1, \omega_2)\|_{L_2(R_2)}$.

Отсюда и из формулы (1.15) следует, что

$$\|\Psi(\omega_1, \omega_2)\|_{L_2(R_2)} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k G(\omega_1^0, \omega_2^0)}{k!} \right\|_{L_2(R_2)}.$$

Следовательно, функция $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k G(\omega_1^0, \omega_2^0)}{k!}$ принадлежит пространству $L_2(R_2)$ и следовательно существует обратное преобразование Фурье от этой функции. Таким образом, интеграл в правой части формулы (1.16) сходится и определяет решение $\psi(x_1, x_2)$ уравнения (1.13) при $f \in Y$. Из теоремы Винера–Пэли следует, что функция $\psi(x_1, x_2)$ финитна с конечным носителем. Таким образом построено решение уравнения (1.13) при любой правой части $f \in Y$ в классе финитных функций.

Докажем единственность решения уравнения (1.13). Предположим, что существует два решения $\psi_1(x_1, x_2)$ и $\psi_2(x_1, x_2)$ уравнения (1.13), определенных в областях Ω_n и Ω_m . Пусть $\psi_3(x_1, x_2) = \psi_1(x_1, x_2) - \psi_2(x_1, x_2)$. Применим к уравнению $K\psi_3(x_1, x_2) = 0$ преобразование Фурье. В результате имеем $\Psi_3(\omega_1, \omega_2)H^{-1}e^{-H|\omega|} = 0$.

Так как $\frac{1}{H}e^{-H|\omega|} \neq 0$, а $\Psi_3(\omega_1, \omega_2)$ — целая функция, то $\Psi_3(\omega_1, \omega_2) \equiv 0$. Единственность решения уравнения (1.13) доказана.

Замечание 1.4. Из приведенных выкладок следует, что если уравнение (1.13), в котором оператор K действует из $L_2((-\infty, \infty)^2)$ в $L_2((-\infty, \infty))^2$, имеет решение, то это решение единственное в $L_2((-\infty, \infty)^2)$. Таким образом, оператор K имеет левый обратный оператор в $L_2((-\infty, \infty))^2$, возможно, неограниченный.

Выше было доказано, что уравнение (1.13) однозначно разрешимо при $f \in Y$. Это означает, что если решается обратная контактная задача нахождения плотности ограниченного гравитирующего тела, его формы и глубины залегания контактной поверхности при точно заданных правых частях, то задача имеет единственное решение. Оператор K отображает пространство $L_2(-\infty, \infty)^2$ в $L_2(-\infty, \infty)^2$, однако вопрос о существовании линейного обратного оператора K^{-1} , определенного на $L_2(-\infty, \infty)^2$, остается открытым. Поэтому возникает необходимость в разработке методов регуляризации.

Рассмотрим итерационный процесс

$$\psi_{n+1} = \alpha_n \psi_n + (1 - \alpha_n) [\psi_n - \beta \psi_n - \gamma (K \psi_n - f)], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.17)$$

где $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq \alpha^* < 1$, β — параметр регуляризации, $\beta > 0$. Применяя [8, теорема 2], убеждаемся, что для сходимости итерационного процесса (1.17) параметр γ достаточно выбрать таким образом, чтобы значения функции $1 - \beta - \frac{2\pi\gamma}{H} e^{-H|\omega|}$ лежали в плоскости комплексной переменной внутри единичного круга с центром в начале координат. Отсюда имеем $0 < \beta + 2\pi\gamma/H < 2$. Эту оценку можно усилить, полагая в (1.17) $\alpha_n = 1/2$.

Докажем сходимость итерационного процесса при любом $f \in L_2((-\infty, \infty)^2)$ и при $\alpha_n = 1/2$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \|\psi_{n+1} - \psi_n\| &= \left\| (\psi_n - \psi_{n-1}) - \frac{1}{2}\beta(\psi_n - \psi_{n-1}) - \frac{1}{2}\gamma K(\psi_n - \psi_{n-1}) \right\| \\ &= \left\| \left(1 - \frac{1}{2}\beta\right) (\Psi_n(\omega) - \Psi_{n-1}(\omega)) - \frac{1}{2}\gamma \frac{2\pi}{H} e^{-H|\omega|} (\Psi_n(\omega) - \Psi_{n-1}(\omega)) \right\| \\ &= \left\| (\Psi_n(\omega) - \Psi_{n-1}(\omega)) \left(1 - \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{2\pi\gamma}{H} e^{-H|\omega|}\right)\right) \right\|. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|\psi_{n+1} - \psi_n\| &\leq \max_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \left| 1 - \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{2\pi\gamma}{H} e^{-H|\omega|}\right) \right| \cdot \|\Psi_n(\omega) - \Psi_{n-1}(\omega)\| \\ &= q \cdot \|\Psi_n - \Psi_{n-1}\| = q \cdot \|\psi_n - \psi_{n-1}\|, \end{aligned}$$

где $q = \max_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \left| 1 - \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{2\pi\gamma}{H} e^{-H|\omega|}\right) \right| = \max\left(\left|1 - \frac{1}{2}\beta\right|, \left|1 - \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{2\pi\gamma}{H}\right)\right|\right)$.

Так как для сходимости итерационного процесса требуется, чтобы $q < 1$, то отсюда следует, что при $\gamma = H/(2\pi)$ параметр регуляризации β должен изменяться в пределах $0 < \beta < 3$.

Замечание 1.5. При других значениях γ параметр регуляризации β принимает другие значения, определяемые условием $\max_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \left| 1 - \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{2\pi\gamma}{H} e^{-H|\omega|}\right) \right| < 1$.

Оценим погрешность, возникающую при регуляризации уравнения $K\psi = f$ уравнением $K_1\psi \equiv \beta\psi + \gamma K\psi = \gamma f$.

Пусть ψ^* — решение уравнения $K\psi = f$. Рассмотрим итерационный процесс (1.17) с начальным значением $\psi_0 = \psi^*$. Для простоты обозначений положим $\alpha_n = 1/2$, $n = 0, 1, \dots$.

Тогда

$$\|\psi_{n+1} - \psi^*\| \leq q \|\psi_n - \psi^*\| + \eta_0,$$

где $q = (1 - \beta)/2$, $\eta_0 = \beta \|\psi^*\|/2$.

Продолжая этот процесс, приходим к оценке

$$\|\psi_{n+1} - \psi^*\| \leq q^n \|\psi_1 - \psi^*\| + \eta_0 / (1 - q) = O(\beta).$$

При $q < 1$ итерационный процесс сходится при любой правой части $f \in L_2(R_2)$ и, следовательно, уравнения $\beta\psi + \gamma(K\psi - f) = 0$ и $\frac{\beta}{\gamma}\psi + K\psi = f$ однозначно разрешимы. Отсюда следует, что оператор $K_1\psi = \beta\psi + \gamma K\psi$ непрерывно обратим и $\|K_1^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}$. Таким образом, доказана однозначная разрешимость уравнения $K_1\psi = \beta\psi + \gamma K\psi = \gamma f$, установлена связь между уравнениями $K_1\psi = \beta\psi + \gamma K\psi = \gamma f$ и $K\psi = f$ и представлен сходящийся итерационный метод. Выше была доказана однозначная разрешимость уравнения $K_1\psi = \gamma f$ при любой функции $f \in L_2(R_2)$ в предположении, что решение ищется в виде функции $\psi(\zeta, \eta) = \sigma(\zeta, \eta) (2(H - z)\varphi(\zeta, \eta) - \varphi^2(\zeta, \eta))$.

Еще один метод регуляризации заключается в фильтрации высоких частот. Пусть $G = [-A, A; -A, A]$, где A — достаточно большое положительное число. Введем оператор

$$P_G [F(\omega_1, \omega_2)] = \begin{cases} F(\omega_1, \omega_2), & (\omega_1, \omega_2) \in G, \\ 0, & (\omega_1, \omega_2) \in R_2 \setminus G. \end{cases}$$

Уравнение (1.14) будем аппроксимировать уравнением

$$2\pi\Psi(\omega_1, \omega_2) P_G \left[\frac{1}{H} e^{-H|\omega|} \right] = F(\omega_1, \omega_2), \quad (1.18)$$

к которому применима итерационная схема (1.17).

Повторяя приведенные выше рассуждения, можно показать, что к уравнению (1.18) применим итерационный процесс вида (1.17), сходящийся, в частности, при $\alpha_n = 1/2$, и

$$q = \max_{-A \leq \omega_i \leq A, i=1,2} \left| 1 - \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{2\pi\gamma}{H} e^{-H|\omega|} \right) \right| < 1.$$

Располагая только функцией $\psi(\zeta, \eta)$, можно получить бесконечное множество эквивалентных семейств $\{\sigma(\zeta, \eta), \varphi(\zeta, \eta), H\}$.

Для выбора конкретного решения, удовлетворяющего исследуемой задаче, необходимы дополнительные данные, в качестве которых в данной работе предлагается использовать информацию о полях силы тяжести на дополнительных поверхностях или использовать значения силы тяжести и ее первых двух производных на одной поверхности.

При реализации предложенных в пп. 2 и 3 методов к исследованию аномалий поля силы тяжести необходимо провести предварительную обработку гравитационных данных. Это связано с необходимостью исключить влияние боковых источников и источников, залегающих выше и ниже рассматриваемого тела. Предварительная обработка состоит из трех этапов, подробно описанных в работе [9].

Приближенным методам нахождения областей, в которых распределены источники гравитационного поля с известной плотностью, а также определения плотности источников при известных областях распределения источников посвящено много работ. В работе [2] исследовано применение метода регуляризации к решению нелинейного уравнения (1.1) с граничными условиями $\varphi(-l) = \varphi(l) = 0$, $\varphi'(-l) = \varphi'(l) = 0$. Различные методы решения обратной задачи логарифмического потенциала исследовались в работах [10–14, 18]. Аналитическим и численным методам решения обратных задач ньютоновского потенциала посвящено большое число работ [6, 10, 11, 15–20].

В данной работе предлагаются аналитические и численные методы одновременного определения глубины залегания H контактной поверхности $z = H$, плотности $\sigma(x, y)$, функции $\varphi(x, y)$, определяющей верхнюю границу гравитирующего тела, расположенного в области $H - \varphi(x, y) \leq z \leq H$, $(x, y) \in \Omega$. Методы основаны на использовании нелинейной модели теории потенциала, которая ограничивается второй степенью разложения ядра потенциала по функциям $\varphi(x, y)$, определяющим форму верхней границы гравитирующего тела. Отметим, что предложенный в работе численный метод допускает распараллеливание.

2. Одновременное определение глубины залегания контактной поверхности, плотности возмущающего тела и уравнения границы тела в обратной задаче ньютоновского потенциала

Вначале рассмотрим случай, когда значение поля силы тяжести известны на поверхностях $z = 0$, $z = -h_1$, $z = -h_2$, и обозначим функции $f(x, y, 0)$, $f(x, y, -h_1)$, $f(x, y, -h_2)$ соответственно через $f_0(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$. Полагая в уравнении (1.12) $z = 0$, $z = -h_1$, $z = -h_2$, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \frac{2H\varphi(\xi, \eta) - \varphi^2(\xi, \eta)}{((x - \xi) + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} d\xi d\eta = f_0(x, y), \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \frac{2(H + h_1)\varphi(\xi, \eta) - \varphi^2(\xi, \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (H + h_1)^2)^{3/2}} d\xi d\eta = f_1(x, y), \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \frac{2(H + h_2)\varphi(\xi, \eta) - \varphi^2(\xi, \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (H + h_2)^2)^{3/2}} d\xi d\eta = f_2(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

Введем функции $\sigma(x, y)\varphi(x, y)/2 = w_1(x, y)$, $\sigma(x, y)\varphi^2(x, y)/2 = w_2(x, y)$ и применим к системе уравнений (2.1) преобразование Фурье. В результате имеем

$$\begin{cases} 4\pi e^{-H|\omega|} W_1(\omega_1, \omega_2) - \frac{2\pi}{H} e^{-H|\omega|} W_2(\omega_1, \omega_2) = F_0(\omega_1, \omega_2), \\ 4\pi e^{-(H+h_1)|\omega|} W_1(\omega_1, \omega_2) - \frac{2\pi}{H+h_1} e^{-(H+h_1)|\omega|} W_2(\omega_1, \omega_2) = F_1(\omega_1, \omega_2), \\ 4\pi e^{-(H+h_2)|\omega|} W_1(\omega_1, \omega_2) - \frac{2\pi}{H+h_2} e^{-(H+h_2)|\omega|} W_2(\omega_1, \omega_2) = F_2(\omega_1, \omega_2). \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $|\omega| = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}$. Система (2.2) разрешима в явном виде:

$$\begin{cases} H = h_1 h_2 \frac{F_2(\omega) e^{h_2|\omega|} - F_1(\omega) e^{h_1|\omega|}}{h_2 F_1(\omega) e^{h_1|\omega|} - (h_2 - h_1) F_0(\omega) - h_1 F_2(\omega) e^{h_2|\omega|}}, \\ W_1(\omega) = \frac{H + h_1}{4\pi h_1} e^{(H+h_1)|\omega|} F_1(\omega) - \frac{H}{4\pi h_1} e^{H|\omega|} F_0(\omega), \\ W_2(\omega) = \frac{H(H + h_1)}{2\pi h_1} e^{(H+h_1)|\omega|} F_1(\omega) - \frac{H(H + h_1)}{2\pi h_1} e^{H|\omega|} F_0(\omega). \end{cases} \quad (2.3)$$

Из (2.3) обратным преобразованием Фурье находим функции $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$. Отсюда $\varphi(x, y) = \frac{w_2(x, y)}{w_1(x, y)}$, $\sigma(x, y) = 2\frac{w_1^2(x, y)}{w_2(x, y)}$.

Рассмотрим теперь случай, когда на поверхности $z = 0$ известны значения силы тяжести и ее первой и второй производных, которые обозначаются через $f_0(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ соответственно.

Этот случай описывается системой уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hw_1(\xi, \eta) - w_2(\xi, \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} d\xi d\eta = f_0(x, y), \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{6H^2w_1(\xi, \eta) - 3Hw_2(\xi, \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{5/2}} - \frac{2w_1(\xi, \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} \right\} d\xi d\eta \\ & \hspace{20em} = f_1(x, y), \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{3w_2(\xi, \eta) - 18Hw_1(\xi, \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{5/2}} + \frac{30H^3w_1(\xi, \eta) - 15H^2w_2(\xi, \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{7/2}} \right\} d\xi d\eta \\ & \hspace{20em} = f_2(x, y). \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

Применив преобразование Фурье к системе (2.4), имеем

$$\left\{ \begin{aligned} & 4\pi e^{-H|\omega|}W_1(\omega) - \frac{2\pi}{H}e^{-H|\omega|}W_2(\omega) = F_0(\omega), \\ & 4\pi|\omega|e^{-H|\omega|}W_1(\omega) - \frac{2\pi}{H^2}(1 + H|\omega|)e^{-H|\omega|}W_2(\omega) = F_1(\omega), \\ & 4\pi|\omega|^2e^{-H|\omega|}W_1(\omega) - \frac{2\pi}{H^3}(2 + 2H|\omega| + H^2|\omega|^2)e^{-H|\omega|}W_2(\omega) = F_2(\omega). \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

При получении системы (2.5) были использованы следующие формулы:

$$\mathbb{F} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + H^2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{H}e^{-H|\omega|}, \quad \mathbb{F} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + H^2)^{5/2}} \right) = \frac{1}{3H^3}(1 + H|\omega|)e^{-H|\omega|},$$

$$\mathbb{F} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + H^2)^{7/2}} \right) = \frac{1}{15H^5}(H^2|\omega|^2 + 3H|\omega| + 3)e^{-H|\omega|}.$$

Система (2.5) имеет единственное решение

$$\left\{ \begin{aligned} & H = 2\frac{F_1(\omega) - |\omega|F_0(\omega)}{F_2(\omega) - 2|\omega|F_1(\omega) + |\omega|^2F_0(\omega)}, \\ & W_1(\omega) = \frac{e^{H|\omega|}}{4\pi} [(1 + H|\omega|)F_0(\omega) - HF_1(\omega)], \\ & W_2(\omega) = \frac{H^2e^{H|\omega|}}{2\pi} [|\omega|F_0(\omega) - F_1(\omega)]. \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

Из системы (2.6) обратным преобразованием Фурье находим $w_i(x, y)$, $i = 1, 2$, и, следовательно, определяем H , $\sigma(x, y)$ и $\varphi(x, y)$.

Изложенный выше метод допускает распространение и на тела, заданные в неограниченных областях. Приведем модельный пример.

Пример 2.1. Пусть в области $\Omega = \{5 - \varphi(x, y) \leq z \leq 5, -\infty < x, y < \infty\}$, $\varphi(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 4}\right)^{3/2}$ залегает возмущающее тело плотностью $\sigma(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$. Пусть на поверхности $z = 0$ известны значения силы тяжести и ее первых двух производных:

$$f_0(x, y, 0) = \frac{12\pi}{(x^2 + y^2 + 36)^{3/2}} - \frac{7\pi}{10(x^2 + y^2 + 49)^{3/2}},$$

$$\left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{216\pi}{(x^2 + y^2 + 36)^{5/2}} - \frac{2\pi}{(x^2 + y^2 + 36)^{3/2}} - \frac{147\pi/10}{(x^2 + y^2 + 49)^{5/2}} - \frac{\pi/25}{(x^2 + y^2 + 49)^{3/2}}, \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f_0(x, y, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \frac{6480\pi}{(x^2 + y^2 + 36)^{7/2}} - \frac{1029\pi}{2(x^2 + y^2 + 49)^{7/2}} - \frac{108\pi}{(x^2 + y^2 + 36)^{5/2}} + \frac{21\pi/50}{(x^2 + y^2 + 49)^{5/2}} - \frac{2\pi/125}{(x^2 + y^2 + 49)^{3/2}}.$$

Преобразование Фурье функций (2.7) имеет вид

$$F_0(\omega) = 2\pi e^{-6|\omega|} - \frac{\pi}{10} e^{-7|\omega|}, \quad F_1(\omega) = 2\pi|\omega|e^{-6|\omega|} - \frac{\pi}{10}|\omega|e^{-7|\omega|} - \frac{\pi}{50}e^{-7|\omega|}, \quad (2.8)$$

$$F_2(\omega) = 2\pi|\omega|^2 e^{-6|\omega|} - \frac{\pi}{125}e^{-7|\omega|} - \frac{\pi}{25}|\omega|e^{-7|\omega|} - \frac{\pi}{10}|\omega|^2 e^{-7|\omega|}.$$

Подставляя эти значения в систему (2.6) и проделывая соответствующие вычисления, имеем $H = 5$, $W_1(\omega_1, \omega_2) = e^{-|\omega|}/2$, $W_2(\omega_1, \omega_2) = e^{-2|\omega|}/4$. Применение обратного преобразования Фурье дает $w_1(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-3/2}/2$, $w_2(x, y) = (x^2 + y^2 + 4)^{-3/2}/2$.

Отсюда следует: $H = 5$, $\sigma(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$, $\varphi(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 4}\right)^{3/2}$, что совпадает с точным решением.

Замечание 2.1. Остановимся кратко на обратной задаче логарифмического потенциала. Для простоты обозначений здесь положено $G/4\pi = 1$. Пусть известны значения поля силы тяжести при $z = 0$, $z = -h_1$, $z = -h_2$, определенные функциями $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$. Тогда глубина залегания контактной поверхности H , плотность источников $\rho(x)$ и функция $\varphi(x)$, определяющая верхнюю границу $z = H - \varphi(x)$ возмущающего тела, даются формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi) \frac{2H\varphi(\xi) - \varphi^2(\xi)}{(x - \xi)^2 + H^2} d\xi = f_0(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi) \frac{2(H + h_1)\varphi(\xi) - \varphi^2(\xi)}{(x - \xi)^2 + (H + h_1)^2} d\xi = f_1(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi) \frac{2(H + h_2)\varphi(\xi) - \varphi^2(\xi)}{(x - \xi)^2 + (H + h_2)^2} d\xi = f_2(x). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Воспользовавшись введенными выше обозначениями и применяя к системе (2.9) преобразование Фурье, имеем

$$\begin{cases} H = h_1 h_2 \frac{F_2(\omega) e^{h_2|\omega|} - F_1(\omega) e^{h_1|\omega|}}{h_2 F_1(\omega) e^{h_1|\omega|} - (h_2 - h_1) F_0(\omega) - h_1 F_0(\omega) e^{h_2|\omega|}}, \\ W_1(\omega) = \frac{H+h_1}{2\pi h_1} e^{(H+h_1)|\omega|} F_1(\omega) - \frac{H}{2\pi h_1} e^{H|\omega|} F_0(\omega), \\ W_2(\omega) = \frac{H(H+h_1)}{\pi h_1} e^{(H+h_1)|\omega|} F_1(\omega) - \frac{H(H+h_1)}{\pi h_1} e^{H|\omega|} F_0(\omega). \end{cases} \quad (2.10)$$

Решив эту систему и применяя обратное преобразование Фурье, находим функции $\rho(x)$, $\varphi(x)$.

Пусть известны значения поля силы тяжести и его первых двух производных по z на поверхности $z = 0$. Тогда константа H , функции $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ в спектральной области определяются формулами:

$$\begin{cases} W_1(\omega) = \frac{e^{H|\omega|}}{2\pi} [(1 + H|\omega|) F_0(\omega) - H F_1(\omega)], \\ W_2(\omega) = \frac{H^2 e^{H|\omega|}}{\pi} [|\omega| F_0(\omega) - F_1(\omega)], \\ H = 2 \frac{F_1(\omega) - |\omega| F_0(\omega)}{F_2(\omega) - 2|\omega| F_1(\omega) + \omega^2 F_0(\omega)}. \end{cases}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим функции $\rho(x)$, $\varphi(x)$.

Замечание 2.2. В последних двух системах ω означает вещественную переменную $\omega \in (-\infty, \infty)$.

3. Численные методы

В пункте 2 получены точные формулы для определения глубины залегания контактной поверхности $z = H$, плотности источников $\sigma(x, y)$ и функции $\varphi(x, y)$, определяющей верхнюю поверхность $z = H - \varphi(x, y)$ возмущающего тела. Эти формулы эффективны, если функции $f_0(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ заданы в аналитическом виде, а их преобразования Фурье также вычисляются в аналитическом виде. В общем случае, когда преобразования Фурье вычисляются приближенно, эти формулы могут оказаться неприменимыми из-за расходимости полученных выражений при $|\omega_1| \rightarrow \infty$, $|\omega_2| \rightarrow \infty$. При решении практических задач значения функций $f_0(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ задаются на сетках узлов и преобразования Фурье $F_0(\omega)$, $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ также вычисляются на конечных сетках узлов. В этом случае необходимо применение методов регуляризации [21, 22]. В качестве одного из таких методов можно использовать регуляризацию, основанную на введении весовых множителей в формулы обратного преобразования Фурье [21]. Недостатком этого метода является необходимость вычисления обратного преобразования Фурье от достаточно сложных функций, заданных на множестве $(-\infty, \infty)$ (в двумерном случае) и на множестве $(-\infty, \infty)^2$ (в трехмерном случае). Более предпочтительным является использование локальных сплайнов для аппроксимации функций $f_0(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$. В этом случае возможно использование как равномерных, так и произвольных (хаотических) сеток. Предположим, что функции $f_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, определены и суммируемы с квадратом в R_2 . Следовательно, существует область $\Omega \subset R_2$ такая, что

$$\|f_i(x, y)\|_{L_2(\Omega_i)} < \varepsilon, \quad i = 0, 1, 2, \quad (3.1)$$

где ε — как угодно малое число, $\varepsilon > 0$, $\Omega_1 = (-\infty, \infty)^2 \setminus \Omega$. Разобьем область Ω на N^2 конечных областей $\Delta_{k,l}$, $k, l = 1, 2, \dots, N$. В каждой области $\Delta_{k,l}$, $k, l = 1, 2, \dots, N$, будем аппроксимировать функции $f_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, в метрике пространства $L_2(\Delta_{k,l})$ с точностью ε/N^2 полиномами по степеням переменных x и y . Это всегда можно сделать в случае достаточно большого числа узлов функций $f_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, в области $\Delta_{k,l}$, $k, l = 1, 2, \dots, N$. В качестве этих полиномов можно взять интерполяционные полиномы (в случае равномерной сетки узлов) или полиномы, полученные методом наименьших квадратов (в случае неравномерных сеток узлов). В области Ω_1 положим локальный сплайн, равным нулю. В результате таких построений получаем локальные сплайны $f_i^N(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, аппроксимирующие функции $f_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, с точностью 2ε .

Нетрудно видеть, что прямое преобразование Фурье функций $f_i^N(x, y)$ вычисляется аналитически. В результате получаем функции $F_i^N(\omega)$, $i = 0, 1, 2$. Из теоремы Парсеваля следует, что $\|F_i^N(\omega) - F_i(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} < 2\varepsilon$. Подставляя функции $F_i^N(\omega)$ в формулы (2.3), (2.5) вместо функций $F_i(\omega)$, $i = 0, 1, 2$, убеждаемся, что погрешность определения H , $\sigma(x, y)$, $\varphi(x, y)$ есть величина порядка $O(\varepsilon)$.

Замечание 3.1. В случае равномерной сетки узлов функции $f_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, могут аппроксимироваться рядами Котельникова.

Замечание 3.2. В случае неравномерной сетки узлов функции $f_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, могут аппроксимироваться конечными суммами, составленными из гармонических функций. Значения коэффициентов при гармонических функциях определяются методом коллокации.

Ниже предлагается другой метод, допускающий распараллеливание.

Пусть $\Omega_2 = [-A_2, A_2; -A_2, A_2]$ — квадрат, расположенный в области оригиналов, $\Omega_3 = [-A_3, A_3; -A_3, A_3]$ — квадрат, расположенный в области изображений. Введем две сетки узлов: (x_k, x_l) , (t_k, t_l) , $k, l = 0, 1, \dots, N$. Здесь $x_k = -A_2 + \frac{2kA_2}{N}$, $t_k = -A_3 + \frac{2kA_3}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Предлагаемый метод будем рассматривать на примере системы уравнений (2.2) (в случае если значения силы тяжести известны на поверхностях $z = 0, z = -h_1, z = -h_2$) или системы уравнений (2.5) (в случае если на поверхности $z = 0$ известны значения силы тяжести и ее первой и второй производных). Пусть $t_{kl} = \{t_k, t_l\}$, $x_{kl} = \{x_k, x_l\}$, $k, l = \overline{0, N}$.

Для определения величины H воспользуемся формулой (2.3) (в случае если значения силы тяжести известны на поверхностях $z = 0, z = -h_1, z = -h_2$) или формулой (2.6) (в случае если на поверхности $z = 0$ известны значения силы тяжести и ее первой и второй производных). Для определенности остановимся на формуле (2.6):

$$H = 2 \frac{F_1(\omega_1, \omega_2) - |\omega| F_0(\omega_1, \omega_2)}{F_2(\omega_1, \omega_2) - 2|\omega| F_1(\omega_1, \omega_2) + |\omega|^2 F_0(\omega_1, \omega_2)}.$$

Вычисляем значения правой части этой формулы на сетке узлов x_{kl} , $k, l = \overline{0, N-1}$, и осредняя полученные значения, находим величину H (можно взять меньшую сетку узлов). В случае если полученное число является комплексным, отбрасываем мнимую часть, модуль которой определяет погрешность метода.

Замечание 3.3. Полагая в предыдущей формуле $\omega_i = 0$, $i = 1, 2$, имеем

$$H = 2 \frac{F_1(0,0)}{F_2(0,0)} = 2 \left(\int_{\Omega} f_1(x,y) dx dy \right) / \left(\int_{\Omega} f_2(x,y) dx dy \right).$$

Здесь Ω — область, в которой наблюдается возмущение гравитационного поля.

Подставив полученное значение H в систему (2.6), рассмотрим последние два уравнения этой системы. Этим уравнениям поставим в соответствие N^2 систем уравнений:

$$\begin{cases} 4\pi e^{-H|t_{kl}|} W_1(t_{kl}) - \frac{2\pi}{H} e^{-H|t_{kl}|} W_2(t_{kl}) = F_0(t_{kl}), \\ 4\pi |t_{kl}| e^{-H|t_{kl}|} W_1(t_{kl}) - \frac{2\pi}{H^2} (1 + H|t_{kl}|) e^{-H|t_{kl}|} W_2(t_{kl}) = F_1(t_{kl}), \end{cases} \quad (3.2)$$

$k, l = \overline{0, N-1}$. Систему уравнений (3.2) запишем в операторной форме:

$$A(k,l)W(k,l) = B(k,l). \quad (3.3)$$

Обозначения $A(k,l)$, $W(k,l)$, $B(k,l)$ очевидны. Определитель системы (3.3) равен $-\frac{8\pi^2}{H^2} e^{-2H|t_{kl}|}$ при всех значениях t_{kl} , $k, l = \overline{0, N-1}$. Следовательно, матрицы $A(k,l)$ имеют обратные при всех значениях $k, l = \overline{0, N-1}$. Для решения системы (3.3) применимы все стандартные методы. С вычислительной точки зрения наиболее удобным является итерационный метод

$$W_{n+1}(k,l) = \alpha_n W_n(k,l) + (1 - \alpha_n) (W_n(k,l) - \gamma (A^*(k,l)A(k,l)W_n(k,l) - A^*(k,l)B(k,l))), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.4)$$

где $0 < \alpha_* \leq \alpha_n \leq \alpha^* < 1$, $\gamma(k,l) = \frac{1}{2\|A^*(k,l)A(k,l)\|}$, устойчивый к возмущениям. Сходимость метода следует из неравенства $\|I - \gamma A^*(k,l)A(k,l)\|_{L_2(R_2)} \leq 1$ и утверждений работы [8]. После вычисления значений $W_i(t_{kl})$, $i = 1, 2$, $k, l = \overline{0, N-1}$, по итерационной схеме (3.4) значения $w_i(x_k, x_l)$, $i = 1, 2$, $k, l = \overline{0, N-1}$, находятся на сетке $\{x_k, x_l\}$, $k, l = \overline{0, N-1}$, обратным преобразованием Фурье.

В ряде случаев более предпочтительным является итерационный метод в действительной области.

Рассмотрим систему уравнений (2.1). Определим значение H по формуле (2.3). (При этом достаточно ограничиться рассмотрением первой формулы в (2.3) при $\omega = 0$.)

Воспользовавшись функциями $w_1(x,y) = \sigma(x,y)\varphi(x,y)/2$, $w_2(x,y) = \sigma(x,y)\varphi^2(x,y)/2$, последние два уравнения системы (2.1). преобразуем в линейную систему:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(H+h_1)w_1(\xi,\eta) - w_2(\xi,\eta)}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (H+h_1)^2)^{3/2}} d\xi d\eta = f_1(x,y), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(H+h_2)w_1(\xi,\eta) - w_2(\xi,\eta)}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (H+h_2)^2)^{3/2}} d\xi d\eta = f_2(x,y). \end{cases} \quad (3.5)$$

Введем обозначения:

$$\psi_i(\zeta,\eta) = 2(H+h_i)w_1(\zeta,\eta) - w_2(\zeta,\eta), \quad i = 1, 2. \quad (3.6)$$

Систему (3.5) будем решать итерационным методом

$$\psi_i^{n+1}(x, y) = \alpha_n \psi_i^n(x, y) + (1 - \alpha_n)(\psi_i^n(x, y) - \beta \psi_i^n(x, y) - \gamma_i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_i^n(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H + h_i))^{3/2}} d\zeta d\eta + \gamma_i f_i(x, y)), \quad (3.7)$$

$i = 1, 2, n = 0, 1, \dots$

Здесь β — параметр регуляризации, параметры γ_i выбираются из условий:

$$\max_{-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty} |1 - \beta - \frac{2\pi\gamma_i}{H + h_i} e^{-(H+h_i)|\omega|}| < 1, \quad i = 1, 2.$$

Обоснование сходимости итерационного метода (3.7) проводится по аналогии с доказательством сходимости итерационного метода (1.17).

Из системы уравнений (3.6) следует, что

$$w_1(x, y) = \frac{\psi_2(x, y) - \psi_1(x, y)}{2(h_2 - h_1)}, \quad w_2(x, y) = \frac{(H + h_2)(\psi_2(x, y) - \psi_1(x, y))}{h_2 - h_1} - \psi_2(x, y).$$

Из $w_i(x, y)$, $i = 1, 2$, определяем $\sigma(x, y)$ и $\varphi(x, y)$.

Аппроксимируя интегралы в правых частях уравнений (3.7) кубатурными формулами, получаем сходящийся численный алгоритм. Приведем модельный пример.

Пример 3.1. Рассмотрим систему уравнений (2.9) при $H = 2$, $h_1 = 1$, $h_2 = 2$. Функции $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ равны нулю всюду, за исключением сегмента $[-1/2, 1/2]$, где они определяются формулами: $\rho(x) = 1/(x + 1)$, $\varphi(x) = 1 - x^2$.

Значение H определяется по формуле (2.10) с точностью до 10^{-15} .

Восстановление функций $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ проведено в двух различных случаях.

В первом случае считаем носитель $[-1/2, 1/2]$ упомянутых функций заранее известным. Восстановление функций $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ представлено на рисунках 1 и 2.

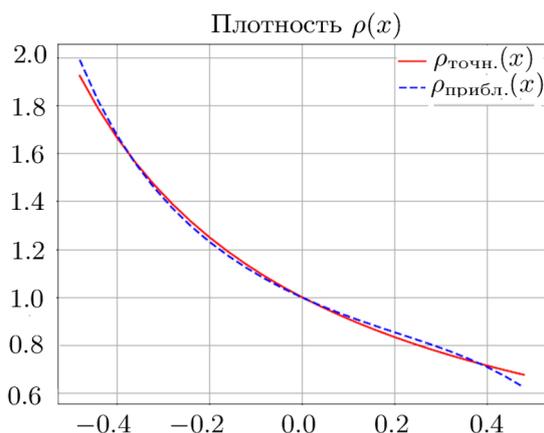


Рис. 3.1. Восстановление плотности при точно заданном носителе

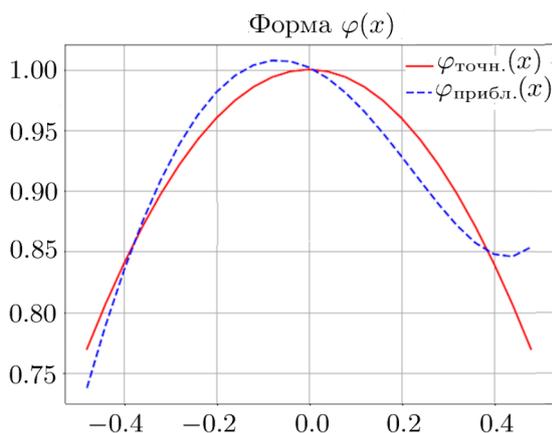


Рис. 3.2. Восстановление поверхности при точно заданном носителе

Во втором случае носитель $[-1/2, 1/2]$ предполагается неизвестным. Оказывается, что в этом случае точность восстановления функций $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ существенно снижается, но, несмотря на это, задача может быть успешно решена. Взяв исходным достаточно

большой сегмент, согласованный с анализируемым внешним полем, и последовательно его уменьшая, отбрасывая концы сегментов, на которых имеются большие флуктуации, приходим к сегменту близкому к носителю. В рассматриваемом примере, взяв в качестве исходного сегмент $[-1, 1]$, приходим к сегменту $[0.52, 0.52]$. На рис. 3 и рис. 4 приведены результаты восстановления функций $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ с носителем $[-0.52, 0.52]$.

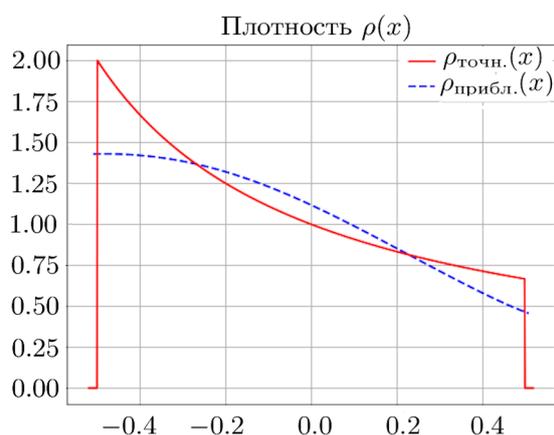


Рис. 3.3. Восстановление плотности в общем случае

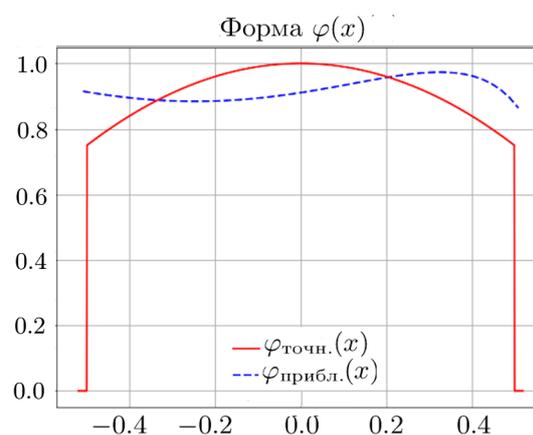


Рис. 3.4. Восстановление поверхности в общем случае

При решении примера глубина залегания H контактной поверхности $z = H$ вычисляется в спектральной области по формуле (2.10); для вычисления функций $\rho(x), \varphi(x)$ используется аналог итерационного процесса (3.7) в действительной области.

Заключение

В работе представлен метод построения нелинейных математических моделей обратных задач гравиметрии для контактных поверхностей, позволяющий учитывать дополнительную информацию о гравитационных полях для восстановления характеристик возмущающего тела: плотности, глубины залегания контактной поверхности, уравнения верхней границы тела.

Описанный в работе подход к решению обратных задач гравиметрии может быть использован и при отличных от представленных в работе способах задания дополнительной информации о гравитационных полях.

Литература

1. **Сретенский Л.Н.** Теория ньютоновского потенциала. — М.: Гостехиздат, 1946.
2. **Тихонов А.Н., Гласко В.Б.** Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1965. — Т. 5, № 3. — С. 463–473. Перевод: Tikhonov A.N., Glasko V.B. Use of the regularization method in non-linear problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1965. — Vol. 5, iss. 3. — P. 93–107.
3. **Михайлов В.О., Диаман М.** Некоторые вопросы интерпретации данных тензорной градиентометрии // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. — 2006. — № 12. — С. 3–10. Перевод: Mikhailov V.O., Diament M. Some aspects of interpretation of tensor gradientometry data // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. — 2006. — Vol. 42, № 12. — P. 971–978.

4. **Новоселицкий В.М., Мартышко П.С., Бычков С.Г., Щербинина Г.П., Простолупов Г.В.** Математические и геологические проблемы в системе “VECTOR” // Материалы второй Всероссийской конференции “Геофизика и математика”. — Пермь: ГИ УрО РАН, 2001. — С. 240–247.
5. **Простолупов Г.В., Новоселицкий В.М., Конешов В.Н., Щербинина Г.П.** Об интерпретации гравитационного и магнитного полей на основе трансформации горизонтальных градиентов в системе “VECTOR” // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. — 2006. — № 6. — С. 90–96. Перевод: Prostolupov G.V., Novoselitskiy V.M., Koneshov V.N., Shcherbinina G.P. Gravity and magnetic field interpretation based on transformations of horizontal gradients in the VECTOR system // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. — 2006. — Vol. 42, № 6. — P. 530–535.
6. **Мартышко П.С., Ладовский И.В., Цидаев И.В.** Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. — 2010. — № 11. — С. 23–35. Перевод: Martyshko P.S., Ladovskii I.V., Tsidaev A.G. Construction of regional geophysical models based on the joint interpretation of gravity and seismic data // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. — 2010. — Vol. 46, № 11. — P. 931–942.
7. **Хургин Я.И., Яковлев В.П.** Финитные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971.
8. **Обломская Л.Я.** О методах последовательных приближений для линейных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1968. — Т. 8, № 2. — С. 417–426. Перевод: Oblomskaia L.Ya. Methods of successive approximation for linear equations in Banach spaces // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1968. — Vol. 8, iss. 2. — P. 239–253.
9. **Мартышко П.С., Пруткин И.Л.** Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофиз. журнал. — 2003. — Т. 25, № 3. — С. 159–168. Перевод: Martyshko P.S., Prutkin I.L. Technology of division of the gravitational field sources in depth // Geophysical Journal. — 2003. — Vol. 25, № 3. — P. 30–34.
10. Гравиразведка / Е.А. Мудрецов и К.Е. Веселова. — М.: Недра, 1990.
11. **Старостенко В. И.** Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — Киев : Наукова думка, 1978.
12. **Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.** Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. I // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. — 1992. — № 6. — С. 48–58.
13. **Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.** Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. II // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. — 1993. — № 7. — С. 47–56.
14. **Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.** Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. III // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. — 1993. — № 7. — С. 57–66.
15. **Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В.** Параллельные алгоритмы решения задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое // Тр. ИММ УрО РАН. — 2007. — Т. 13, № 3. — С. 3–21.
16. **Лаврентьев М. М., Старостенко В.И., Филатов В.Г., Гласко Ю.В.** Применение регуляризации в гравимагниторазведке при поиске месторождений углеводородов. — М.: МГРИ-РГГРУ, 2010.
17. **Zhdanov M.S.** Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems. — N.Y.: Elsevier, 2002.
18. **Сизиков В.С., Голов И.Н.** Моделирование месторождений сфероидами // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. — 2006. — № 12. — С. 3–10. Перевод: Mikhailov V.O., Diament M. Some aspects of interpre. — 2009. — № 3. — С. 83–96. Перевод: Sizikov V.S., Golov I.N. Modeling of deposits by spheroids // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. — 2009. — Vol. 45, № 3. — P. 258–271.
19. **Sizikov V., Evseev V.** Bars and Spheroids in Gravimetry Problem. — NY: Elsevier, 2010.
20. **Бойков И.В., Бойкова А.И.** Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. — Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2013.

21. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974.
22. **Лаврентьев М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию 17 июля 2017 г.

После исправления 6 мая 2019 г.

Принята к печати 16 апреля 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Sretenskii L.N.** Teoriya n'yutonovskogo potentsiala. — М.: Gostekhizdat, 1946.
2. **Tihonov A.N., Glasko V.B.** Primenenie metoda regulyazatsii v nelineinykh zadachah // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1965. — Т. 5, № 3. — С. 463–473. Pervod: Tikhonov A.N., Glasko V.B. Use of the regularization method in non-linear problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1965. — Vol. 5, iss. 3. — P. 93–107.
3. **Mihailov V.O., Diaman M.** Nekotorye voprosy interpretatsii dannykh tenzornoj gradientometrii // Izv. RAN. Ser. Fizika Zemli. — 2006. — № 12. — С. 3–10. Pervod: Mikhailov V.O., Diament M. Some aspects of interpretation of tensor gradientometry data // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. — 2006. — Vol. 42, № 12. — P. 971–978.
4. **Novoselitskii V.M., Martyshko P.S., Bychkov S.G., Scherbinina G.P., Prostolupov G.V.** Matematicheskie i geologicheskie problemy v sisteme “VECTOR” // Materialy vtoroi Vserossiiskoi konferentsii “Geofizika i matematika”. — Perm': GI UrO RAN, 2001. — С. 240–247.
5. **Prostolupov G.V., Novoselitskii V.M., Koneshov V.N., Scherbinina G.P.** Ob interpretatsii gravitatsionnogo i magnitnogo polia na osnove transformatsii gorizonta'nykh gradientov v sisteme “VECTOR” // Izv. RAN. Ser. Fizika Zemli. — 2006. — № 6. — С. 90–96. Pervod: Prostolupov G.V., Novoselitskiy V.M., Koneshov V.N., Shcherbinina G.P. Gravity and magnetic field interpretation based on transformations of horizontal gradients in the VECTOR system // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. — 2006. — Vol. 42, № 6. — P. 530–535.
6. **Martyshko P.S., Ladovskii I.V., Tsidaev I.V.** Postroenie regional'nykh geofizicheskikh modelei na osnove kompleksnoi interpretatsii gravitatsionnykh i seismicheskikh dannykh // Izv. RAN. Ser. Fizika Zemli. — 2010. — № 11. — С. 23–35. Pervod: Martyshko P.S., Ladovskii I.V., Tsidaev A.G. Construction of regional geophysical models based on the joint interpretation of gravity and seismic data // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. — 2010. — Vol. 46, № 11. — P. 931–942.
7. **Hurgin Ya.I., Yakovlev V.P.** Finitnye funktsii v fizike i tekhnike. — М.: Nauka, 1971.
8. **Oblomskaya L.Ya.** O metodah posledovatel'nykh priblizhenii dlya lineinykh uravnenii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1968. — Т. 8, № 2. — С. 417–426. Pervod: Oblomskaya L.Ya. Methods of successive approximation for linear equations in Banach spaces // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1968. — Vol. 8, iss. 2. — P. 239–253.
9. **Martyshko P.S., Prutkin I.L.** Tekhnologiya razdeleniya istochnikov gravitatsionnogo polya po glubine // Geofiz. zhurnal. — 2003. — Т. 25, № 3. — С. 159–168. Pervod: Martyshko P.S., Prutkin I.L. Technology of division of the gravitational field sources in depth // Geophysical Journal. — 2003. — Vol. 25, № 3. — P. 30–34.
10. Gravirazvedka / E.A. Mudretsovoi i K.E. Veselova. — М.: Nedra, 1990.
11. **Starostenko V. I.** Ustoichivye chislennye metody v zadachah gravimetrii. — Kiev : Naukova dumka, 1978.
12. **Starostenko V.I., Chernaya N.N., Chernyi A.V.** Obratnaya zadacha gravimetrii dlya kontaktnoi poverhnosti. I // Izv. RAN. Ser. Fizika Zemli. — 1992. — № 6. — С. 48–58.

13. **Starostenko V.I., Chernaya N.N., Chernyi A.V.** Obratnaya zadacha gravimetrii dlya kontaktnoi poverhnosti. II // *Izv. RAN. Ser. Fizika Zemli.* — 1993. — № 7. — S. 47–56.
14. **Starostenko V.I., Chernaya N.N., Chernyi A.V.** Obratnaya zadacha gravimetrii dlya kontaktnoi poverhnosti. III // *Izv. RAN. Ser. Fizika Zemli.* — 1993. — № 7. — S. 57–66.
15. **Akimova E.N., Gemaidinov D.V.** Parallel'nye algoritmy resheniya zadachi gravimetrii o vosstanovlenii plotnosti v sloe // *Tr. IMM UrO RAN.* — 2007. — Т. 13, № 3. — S. 3–21.
16. **Lavrent'ev M. M., Starostenko V.I., Filatov V.G., Glasko Yu.V.** Primenenie regulyaryzatsii v gravimagnitorazvedke pri poiske mestorozhdenii uglevodorodov. — M.: MGRI–RGGRU, 2010.
17. **Zhdanov M.S.** Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems. — N.Y.: Elsevier, 2002.
18. **Sizikov V.S., Golov I.N.** Modelirovanie mestorozhdenii sferoidami // *Izv. RAN. Ser. Fizika Zemli.* — 2009. — № 3. — S. 83–96. *Perevod: Sizikov V.S., Golov I.N. Modeling of deposits by spheroids // Izvestiya. Physics of the Solid Earth.* — 2009. — Vol. 45, № 3. — P. 258–271.
19. **Sizikov V., Evseev V.** Bars and Spheroids in Gravimetry Problem. — NY: Elsevier, 2010.
20. **Boikov I.V., Boikova A.I.** Priblizhennyye metody resheniya pryamyyh i obratnykh zadach gravirazvedki. — Penza: Izd-vo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2013.
21. **Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.** Metody resheniya nekorrektnyykh zadach. — M.: Nauka, 1974.
22. **Lavrent'ev M.M.** O nekotorykh nekorrektnyykh zadachah matematicheskoi fiziki. — Novosibirsk: Izd-vo SO AN SSSR, 1962.