

УДК 532.59

DOI: 10.63430/TIA2025020013

Сравнение двумерной и трехмерной моделей волнового ручейкового течения по наклонной плоскости*

С.П. Актершев, В.В. Гузанов, А.З. Квон, А.В. Бобылев, А.В. Черданцев

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: cherdantsev@itp.nsc.ru

Объектом исследований является течение по наклонной пластине прямолинейного ручейка, поверхность которого покрыта регулярными нелинейными волнами. Моделировать такие волны можно в полностью трехмерной постановке, но также можно использовать упрощенный квазидвумерный подход, в котором форма поперечного сечения ручейка самоподобна. В работе проводится прямое сравнение результатов моделирования в рамках двумерного и трехмерного подходов с формой волновой поверхности ручейка, восстановленной экспериментально с помощью метода лазерно-индуцированной флюоресценции. Показано, что трехмерная модель достоверно воспроизводит волновую поверхность ручейка, включая такие трехмерные особенности, как искривление фронта волны и малые возмущения ее заднего склона. Двумерная модель в принципе не может воспроизвести эти особенности, однако она хорошо описывает параметры и форму волны в центральном продольном сечении ручейка.

Ключевые слова: ручейковое течение, наклонная пластина, нелинейные трехмерные волны, метод лазерно-индуцированной флюоресценции, теоретическое моделирование.

Введение

Ручейковое (ривулетное) течение — разновидность течения пленки жидкости, ограниченной двумя контактными линиями по бокам. Эти течения реализуются в самых разных технологических установках: теплообменных аппаратах, холодильной технике, аппаратах химической технологии, дистилляционных колоннах, установках по ожижению природного газа, в пищевой промышленности [1–3]. Основной акцент в исследованиях ручейковых течений делался на форме поперечного сечения гладкого (без волн) ручейка на плоской и цилиндрической поверхностях [4–9].

Во многих практически важных случаях ручейковое течение неустойчиво, а поверхность жидкости покрыта волнами. При этом теоретическое моделирование волнового

* Теоретическое моделирование выполнено в рамках работ по госзаданию Института теплофизики СО РАН. Эксперименты и анализ возможностей управления волновым ручейковым течением выполнены при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-79-30075).

ручейкового течения чаще всего ограничивается линейным анализом устойчивости [10–13]. Экспериментальные и теоретические работы по изучению нелинейных волн в ручейковом потоке очень немногочисленны. Авторам известно четыре систематических экспериментальных исследования на эту тему.

В работах [14, 15] изучались волны на ручейке, текущем по нижней поверхности наклонного цилиндра диаметром 19 мм в диапазоне углов наклона от 2° до 15° . Волны изучались с использованием теневого метода, позволяющего получать временные записи наибольшей толщины пленки. Кроме того, методом электродиффузии измерялось локальное напряжение сдвига на стенке. В [16] рассмотрены течения ручейков на вертикальной пластине при варьировании ширины ручейка (от 8 до 20 мм), свойств жидкости и смачиваемости стенки. В [17] проводили сходные эксперименты на ручейках различной ширины, стекающих по наклонной пластине под углом 30° и 60° к горизонту. В двух последних работах трехмерная форма волновой поверхности была получена методом лазерно-индуцированной флюоресценции (ЛИФ) (подробное описание этого метода можно найти в [18]). Во всех экспериментах регулярные волны возбуждались путем наложения пульсаций расхода жидкости, что позволило исследовать изменение формы волны и ее основных параметров в зависимости от частоты возбуждения.

Теоретическое моделирование волнового ручейкового течения выполнялось в следующих недавних работах. В статье [19] нелинейные волны моделировались численно в трехмерной постановке, результаты сравнивались с экспериментальными формами волн из [16]. Трехмерный подход требует больших вычислительных ресурсов, поэтому с целью ускорения расчетов была разработана упрощенная двумерная модель. В этой модели считается, что форма поперечного сечения ручейка остается самоподобной, при этом толщина слоя жидкости изменяется в соответствии с фазой волны. Такой подход был применен для ручейка на нижней поверхности наклонного цилиндра [20], на вертикальной пластине [21, 22] и на наклонной пластине [17]. Во всех случаях проводилось сравнение экспериментальных и теоретических профилей волн в центральном продольном сечении ручейка. Двумерная модель хорошо воспроизводит изменение профилей волн и изменение их параметров с увеличением частоты.

В настоящей работе проводится сопоставление полной трехмерной модели и упрощенной двумерной модели путем сравнения расчетов с экспериментом для различных продольных сечений ручейка. Целью такого сравнения является определение условий применимости обоих подходов.

1. Описание экспериментов

В статье [17] подробно описаны экспериментальная установка (рис. 1) и методика измерений. Краткое описание приведено ниже. Рабочий участок представляет собой стеклянную пластину длиной 70 см и шириной 20 см. Угол наклона пластины к горизонту θ составлял в экспериментах 30° и 60° и контролировался с точностью до $0,05^\circ$. Для поддержания прямолинейности ручейка и задания определенной толщины его русло ограничивалось нанесением двух полос гидрофобного лака шириной 1,5 мм и толщиной 20 мкм. Использовались три значения ширины ручейка $d = 6, 10$ и 18 мм. Эксперименты проводились для трех значений числа Рейнольдса жидкости $Re = 68, 138$ и 252. Число Рейнольдса определяется как $Re = Q/\nu d$, где Q — объемный расход жидкости, d — ширина ручейка, ν — кинематическая вязкость рабочей жидкости. В качестве рабочей жидкости использовалась дистиллированная вода ($\nu = 0,96 \cdot 10^{-6}$ м²/с), плотность $\rho = 998$ кг/м³,

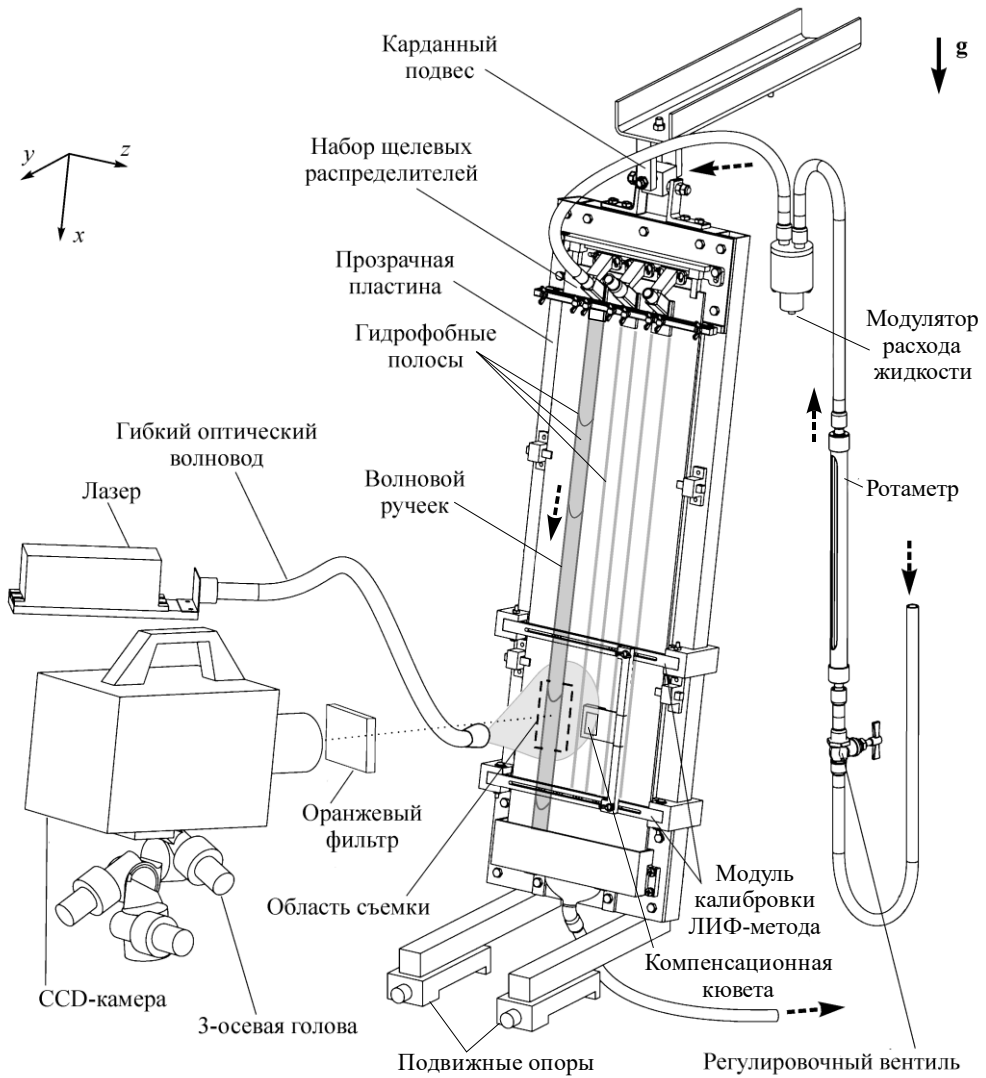


Рис. 1. Схема экспериментальной установки и системы ЛИФ-измерений.

коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Регулярные волны возбуждались периодическими пульсациями расхода жидкости, накладываемыми электродинамическим модулятором. Частота возбуждения f изменялась в диапазоне от 3 до 50 Гц.

Измерения локальной мгновенной толщины ручейка проводились с использованием метода лазерно-индуцированной флуоресценции на основе яркости (BBLIF). Локальная мгновенная яркость флуоресценции может быть пересчитана в локальную мгновенную толщину ручейка с использованием интегральной формы закона Ламберта – Бера [18]. Погрешность измерения толщины пленки методом ЛИФ не превышает 5 %. Область измерений находилась на расстоянии 30–40 см от распределителя. Она охватывала 120 мм длины ручейка и всю ширину. Данные о толщине слоя жидкости записывались в виде массивов $h(x, z, t)$, где h — толщина ручейка, t — время, x — координата вдоль потока, z — поперечная координата. Для каждой комбинации параметров эксперимента (θ , d , Re) для невозмущенного ручейка (при отсутствии возбужденных волн) была получена

его средняя толщина $\langle h(x,z) \rangle$ путем усреднения массива по времени; среднее поперечное сечение $\langle h(z) \rangle$ получено путем усреднения $\langle h(x,z) \rangle$ по x . Основным результатом каждого эксперимента был усредненный профиль волны при фазовом осреднении профилей, полученных в разные моменты времени. Такая процедура производилась только в случае, когда возбуждаемые волны были стационарными в области наблюдения, и позволила подавить шум, присущий отдельным профилям, построив «обобщенный портрет» волны.

2. Теоретическая модель волнового ручейкового течения

Рассмотрим течение ривулета постоянной ширины $d = 2b_{riv}$ вдоль пластины, наклоненной под углом θ к горизонту. Введем декартову систему координат $Oxyz$ так, что ось Ox направлена вниз, а ось Oy — по нормали к пластине (рис. 2). Будем считать, что толщина слоя жидкости $h(x, z, t)$ много меньше характерной длины волны возмущения и полуширины ручейка b_{riv} .

Модель [23] адаптируем для длинноволновых трехмерных возмущений в пленке жидкости применительно к ручейковому течению. Уравнения модели получаются интегрированием уравнений Навье – Стокса по толщине слоя жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h u w dy &= gh \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{h\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h w dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u w dy &= -gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial z} - \nu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{h\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В модели [23] предполагается, что профиль скорости описывается полиномом второй степени от безразмерной переменной $\eta = y/h$, который удовлетворяет граничным условиям на стенке и на поверхности жидкости. При этом компоненты скорости по осям Ox и Oz имеют вид

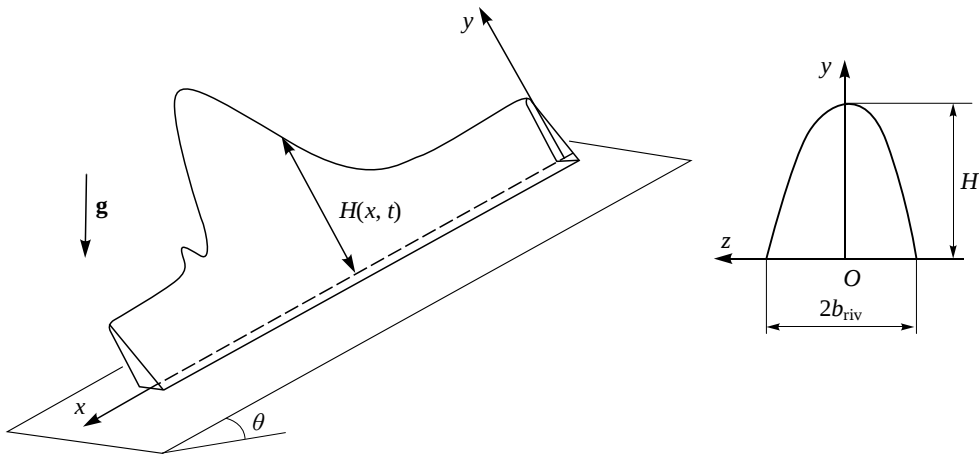


Рис. 2. Схема ручейкового течения.

$$u = \frac{3q}{2h}(2\eta - \eta^2), \quad w = \frac{3m}{2h}(2\eta - \eta^2), \quad (2)$$

где $q(x, z, t) = \int_0^h u dy$ и $m(x, z, t) = \int_0^h w dy$ — расходы жидкости в направлении осей Ox

и Oz соответственно. С учетом (2) уравнения (1) в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{6}{5b} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{qm}{h} \right) &= \frac{3}{R} \left(h \sin \theta - h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{q}{h^2} \right) + Weh \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right), \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{6}{5b} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{m^2}{h} \right) + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qm}{h} \right) &= \frac{We}{b} h \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right) - \frac{3}{R} \left(\frac{m}{h^2} + \frac{\cos \theta}{b} h \frac{\partial h}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial m}{\partial \xi} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь в качестве масштаба расстояния выбрана толщина на оси симметрии невозмущенного ручейка H_m , масштаб расхода $q_m = gH_m^3/3\nu$, масштаб времени $t_m = H_m^2/q_m$, масштаб скорости $u_m = q_m/H_m$. Вместо координаты z использована безразмерная переменная $\xi = z/b_{riv}$. Уравнения (3) содержат следующие безразмерные параметры:

$R = gH_m^3/3\nu^2$ — безразмерная толщина ручейка, $We = (3Fi/R^5)^{1/3}$ — число Вебера, $b = b_{riv}/H_m$ — безразмерная ширина ручейка. Здесь $Fi = \sigma^3/(\rho^3 g \nu^4)$ — число Капицы.

Отметим, что h и q — четные функции переменной ξ , в то время как m — нечетная функция переменной ξ . Уравнения (3) следует дополнить условиями на контактной линии:

$$h = q = m = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1. \quad (4)$$

Невозмущенное ручейковое течение. В этом случае частные производные по x и t , а также поперечный расход m равны нулю, поэтому правые части первых двух уравнений (3) тоже равны нулю. Из первого уравнения (3) находим невозмущенный расход: $q_0 = gh_0^3 \sin \theta / 3\nu$. Невозмущенную размерную толщину запишем в виде $h_0 = H_m f_0(\xi)$, где f_0 — безразмерный профиль поперечного сечения невозмущенного ручейка. Найдем f_0 из второго уравнения (3), приравняв его правую часть к нулю. Получаем

$$-\frac{3 \cos \theta}{R} f_0' + \frac{We}{b^2} f_0''' = 0, \quad (5)$$

здесь штрих означает дифференцирование по переменной ξ .

Интегрируя (5) по ξ , получаем

$$f_0 - \frac{1}{\omega^2} f_0'' = \text{const},$$

где $\omega^2 = \frac{3b^2 \cos \theta}{WeR} = \frac{b_{riv}^2 \rho g \cos \theta}{\sigma}$.

Учитывая четность функции $f_0(\xi)$ и условия (4) на контактной линии, решением этого уравнения будет

$$f_0(\xi) \equiv \frac{\text{ch}(\omega) - \text{ch}(\omega\xi)}{\text{ch}(\omega) - 1}. \quad (6)$$

На рис. 3 приведены экспериментальные профили поперечного сечения невозмущенного (без волн) ручейка для $\theta = 30^\circ$ и различных значений Re , d в сравнении с теоретическими кривыми. Расчетные профили хорошо согласуются с экспериментальными.

Поиск решения в двумерном и трехмерном подходах. В двумерном подходе поиск решения ведется методом взвешенной невязки. При этом считается, что форма поперечного сечения ручейка остается самоподобной, а изменяется только толщина слоя жидкости в соответствии с фазой волны. В трехмерном подходе численное моделирование проведено на основе исходной системы уравнений (3) без какого-либо предположения о форме поперечного сечения волнового ручейка. Пространственное развитие возбужденных волн моделировалось решением уравнений (3) конечно-разностным методом. Уравнения решались по неявной схеме итерациями; сходимость итераций обеспечивалась малой величиной шага по времени. Для начала итераций брались переменные на предыдущем временном слое; итерации прекращались, когда относительная разность с предыдущей итерацией становилась менее 10^{-6} . Сходимость контролировалась измельчением сетки; шаги сетки варьировались в диапазоне 0,1–0,2 мм (по оси x) и 0,06–0,36 мм (по оси z). В начальный момент времени задавалось невозмущенное течение: $h = h_0(\xi)$, $q = q_0(\xi)$, $m = 0$. Возбужденные волны генерировались периодическим возмущением продольного расхода на входе участка счета, где задавались условия:

$$h|_{x=0} = h_0(\xi), \quad q|_{x=0} = q_0(\xi) \cdot (1 + Q_d \sin(2\pi \cdot f \cdot t)), \quad m|_{x=0} = 0,$$

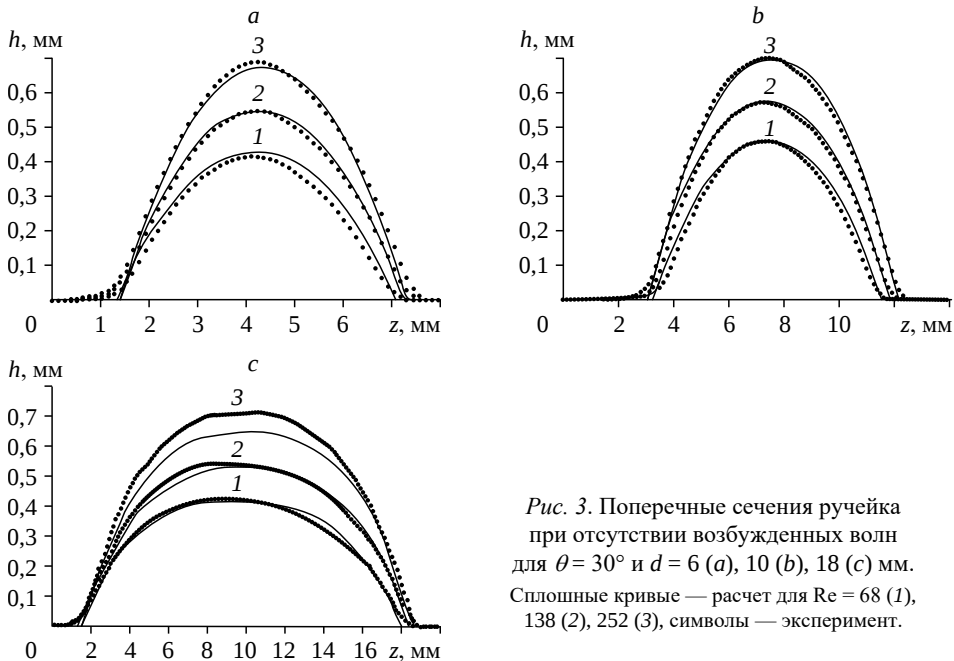


Рис. 3. Поперечные сечения ручейка при отсутствии возбужденных волн для $\theta = 30^\circ$ и $d = 6$ (a), 10 (b), 18 (c) мм. Сплошные кривые — расчет для $Re = 68$ (1), 138 (2), 252 (3), символы — эксперимент.

где Q_a — малая амплитуда, f — заданная частота колебаний. Такая постановка задачи хорошо соответствует экспериментальным условиям. Участок счета $0 < x < X_{\text{end}}$ выбирался достаточно протяженным, чтобы можно было проследить развитие волн вниз по потоку. Время счета выбиралось достаточно большим, чтобы на участке счета установились развитые стационарно бегущие волны. Об установлении волнового режима свидетельствует тот факт, что для любого значения координаты x расход и толщина ручейка периодически зависят от времени. Скорость распространения волн вычислялась по соотношению $C = \lambda \cdot f$ (где λ — длина волны).

В экспериментах фиксировалось число Рейнольдса $Re = Q/\nu d$, а для численного моделирования волн основным размерным параметром является толщина невозмущенного ручейка H_m , по которой определяется безразмерный параметр $R = gH_m^3/3\nu^2$. Значение Re связано с параметром R в уравнениях (3) простым соотношением. Действительно, полный расход жидкости в ручейке

$$Q = \int_{-b_{\text{riv}}}^{b_{\text{riv}}} q_0(z) dz = \frac{g \sin \theta}{3\nu} \int_{-b_{\text{riv}}}^{b_{\text{riv}}} h_0^3 dz = \frac{gH_m^3 \sin \theta}{3\nu} b_{\text{riv}} \int_{-1}^1 f_0^3 d\xi.$$

$$\text{Отсюда } Re = \frac{Q}{2b_{\text{riv}}\nu} = R \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \theta \cdot \int_{-1}^1 f_0^3 d\xi.$$

Значения эффективной ширины ручейка $2b_{\text{riv}}$ брались из экспериментального профиля поперечного сечения ручейка при отсутствии возбужденных волн.

3. Результаты и обсуждение

Для сравнения теоретических и экспериментальных данных был выбран следующий набор параметров: число Рейнольдса $Re = 68$, угол наклона пластины к горизонту $\theta = 30^\circ$, частота возбуждения $f = 6$ Гц. Теоретические модели, основанные на предположении о ламинарном течении ручейка, начинают отклоняться от экспериментальных результатов при высоких расходах жидкости, поэтому было выбрано наименьшее число Рейнольдса из доступных. Максимального проявления эффектов трехмерности можно ожидать при высокой амплитуде и сложной форме волн, что наблюдается при низких частотах возбуждения. По предварительным данным, угол наклона слабо влияет как на адекватность теоретических моделей, так и на трехмерность волн. Ожидается, что основным параметром, влияющим на трехмерность волн, является ширина ручейка.

На рис. 4 и 5 приведены примеры трехмерной формы волн для $Re = 68$, $\theta = 30^\circ$, $f = 6$ Гц. На рис. 4 представлен самый узкий ручеек ($d = 6$ мм), на рис. 5 — самый широкий ручеек ($d = 18$ мм). На каждом из рисунков показаны результаты расчета по двумерной (рис. 4a, 5a) и трехмерной (рис. 4b, 5b) моделям и экспериментальная форма волны (рис. 4c, 5c). Для большей наглядности на каждом рисунке из трехмерной поверхности волны вычтена толщина невозмущенного ручейка.

В двумерной модели фаза волны не меняется вдоль координаты z , поэтому волна является плоской. Трехмерная модель свободна от этого ограничения, что позволяет ей адекватно воспроизвести искривление фронта волны в плоскости (x, z) . Форма фронта волны похожа на параболу, движущуюся вершиной вперед. При этом положение гребня (локального максимума) волны не повторяет форму фронта. Вблизи краев ручейка

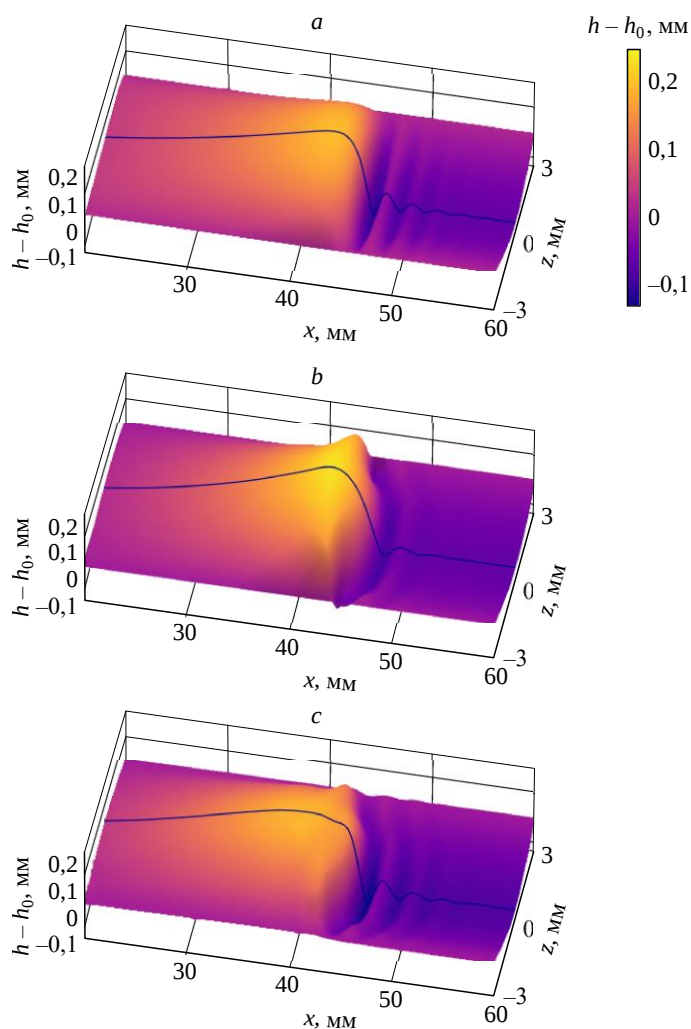


Рис. 4. Волна частотой 6 Гц при $\theta = 30^\circ$, $Re = 68$; ширина ручейка $d = 6$ мм.

Расчеты по 2D- и 3D-моделям (a, b) в сравнении с экспериментом (c).

гребень волны расположен значительно ближе к переднему краю волны по сравнению с центральной частью. Вблизи контактных линий волна имеет более крутой боковой склон, чем следовало бы из самоподобной формы. Таким образом, трехмерность формы волны не сводится к «сворачиванию» плоского фронта в параболу, имеет место сложное взаимодействие краев фронта волны с контактной линией.

Для широкого ручейка центральная часть гребня волны существенно выдвинута вперед по сравнению с его периферийной частью (на краях ручейка). Эти особенности на качественном уровне воспроизводятся в трехмерной модели.

На рис. 6 приведены экспериментальная и расчетная формы фронта трехмерной волны на плоскости (x, z) . Форма фронта определяется по координате x локального минимума толщины пленки перед волной при данном z . Для узкого ручейка (см. рис. 6a) расчетная и экспериментальная формы хорошо согласуются на большей части ширины ручейка. В диапазоне $|z| \leq 2$ мм эта форма хорошо описывается параболой $x = az^2$ с коэффициентом $a = 0,21 \text{ мм}^{-1}$ (аппроксимация показана линией 2). В диапазоне $2 \text{ мм} \leq |z| \leq 2,5 \text{ мм}$

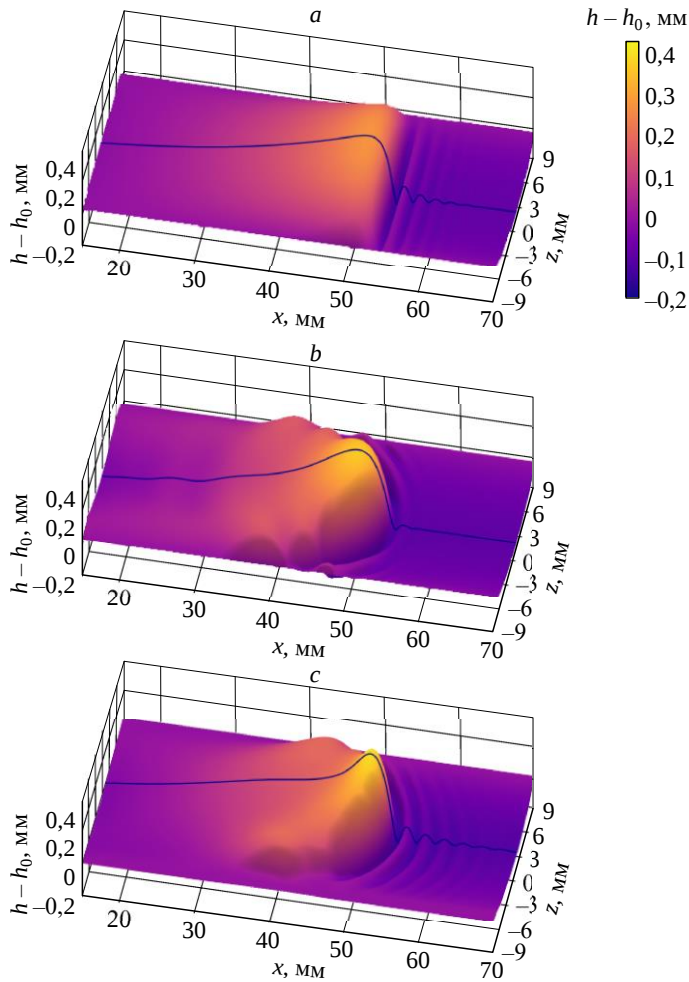


Рис. 5. Волна частотой 6 Гц при $\theta = 30^\circ$, $Re = 68$; ширина ручейка $d = 18$ мм.
Расчеты по 2D- и 3D-моделям (a, b) в сравнении с экспериментом (c).

зависимость $x(z)$ становится более крутой, при этом сохраняется соответствие между теорией и экспериментом. Вблизи контактных линий ($|z| \geq 2,5$ мм) фронт волны в эксперименте разворачивается поперек потока и становится практически плоским. Менее сильный разворот фронта наблюдается и в трехмерной модели, хотя и на большем расстоянии. Для широкого ручейка (см. рис. 6b) форма фронта хорошо аппроксимируется параболической зависимостью по всей ширине ручейка. При этом теоретическая модель дает более сильное искривление фронта по сравнению с экспериментом: для модели старший коэффициент параболы равен $0,15 \text{ мм}^{-1}$, для эксперимента — $0,11 \text{ мм}^{-1}$. Для широкого ручейка искривление фронта волны слабее, чем для узкого. Разворот фронта волны вблизи контактных линий на широком ручейке мало заметен. Форма фронта волны для узкого ручейка имеет сходство с подковообразными волнами, которые реализуются при малых Re на вертикальной пленке, тогда как для широкого ручейка форма фронта более сходна с так называемыми λ -солитонами [24], которые характерны для вертикальных пленок при больших Re . Таким образом, влияние контактной линии на деформацию фронта волны сильнее проявляется для узкого ручейка.

Для обоих значений ширины ручейка трехмерная модель предсказывает более сильную деформацию фронта волны, чем в эксперименте, хотя различие для широкого

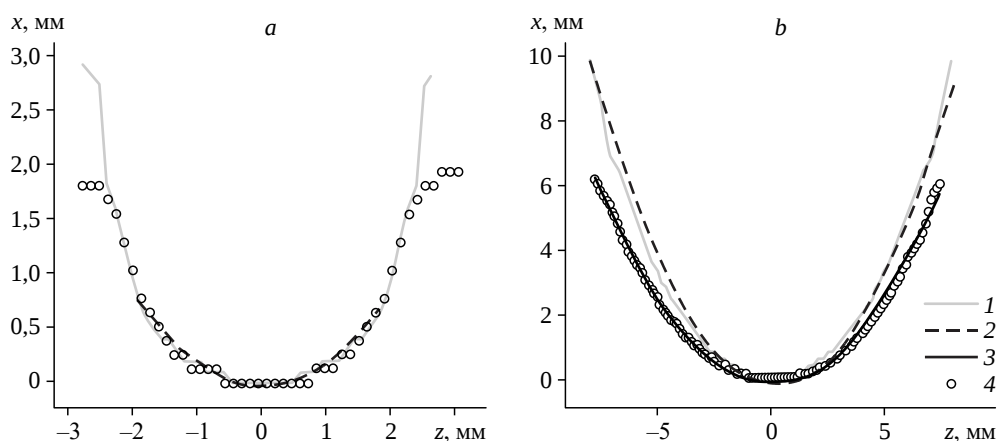


Рис. 6. Трехмерная форма фронта волны

(x -координата минимума толщины пленки перед волной в зависимости от z).

Волна частотой 6 ГГц при $\theta = 30^\circ$, $Re = 68$; $d = 6$ (а) и 18 (б) мм;

серая линия (1) — расчет по трехмерной модели, символы 4 — эксперимент; черные линии — параболическая аппроксимация теоретической кривой (2) и экспериментальных данных (3).

ручейка больше. Основное различие между моделью и экспериментом наблюдается в области высоких градиентов dx/dz (на краях ручейка). По-видимому, такой скошенный фронт менее устойчив, чем фронт, перпендикулярный направлению движения, и в реальной системе его выравнивание происходит раньше, чем в модели.

На рис. 7 представлены продольные сечения поверхностей, показанных на рис. 4 и 5, для трех значений поперечной координаты $z = 0, 0,5b_{riv}$ и $0,75b_{riv}$ (где b_{riv} — полуширина ручейка). На рис. 7а и 7д видно, что обе модели достаточно хорошо воспроизводят форму волны в центральном продольном сечении. Также в центральном сечении трехмерная модель сильнее занижает амплитуду капиллярной ряби перед волной. На рис. 7б, 7с и 7е–7ф приведено сравнение для нецентральных продольных сечений. Видно, что трехмерная модель достаточно хорошо воспроизводит форму волны на качественном и количественном уровне. Двумерная модель не только не отражает смещение продольных профилей волны назад по мере удаления от центрального сечения, но даже качественно искажает форму нецентральных сечений. Расхождения усиливаются с удалением от центра.

Наиболее интересное наблюдение состоит в том, что трехмерная модель воспроизводит возмущение заднего склона волны, наблюдаемое в эксперименте для широкого ручейка ($d = 18$ мм), в то время как в двумерной модели задний склон остается гладким. Это наблюдение подтверждает трехмерную природу возмущения поверхности и заслуживает дальнейшего исследования.

Выводы

Проведен сравнительный анализ двух теоретических моделей волнового течения ручейка по наклонной пластине. Исследовалась упрощенная двумерная модель, базирующаяся на предположении о самоподобии формы поперечного сечения ручейка, и трехмерная модель в полной постановке. Результаты моделирования сравнивались с мгновенной трехмерной формой поверхности ручейка, полученной экспериментально с использованием метода лазерно-индуцированной флюоресценции.

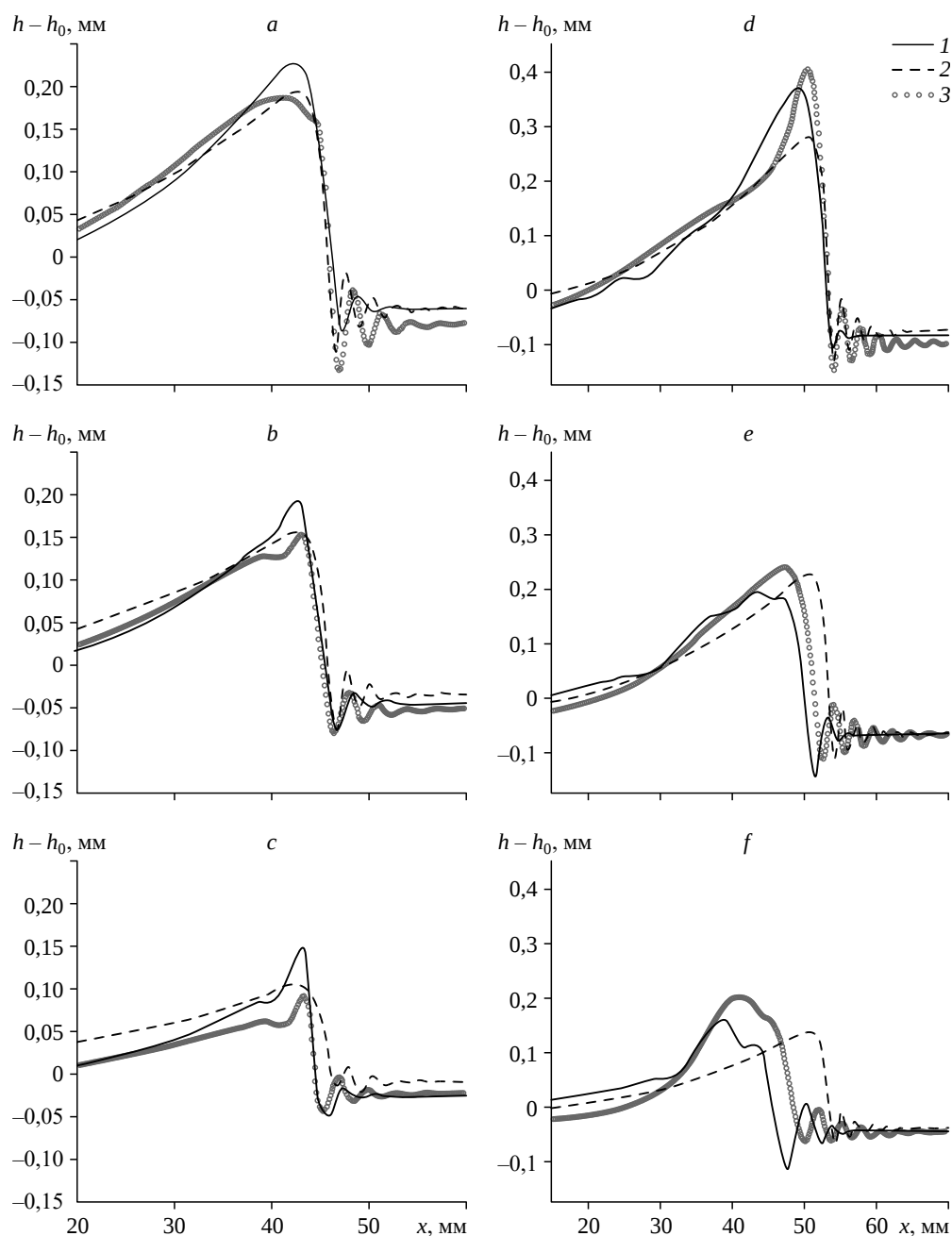


Рис. 7. Профили волны частотой 6 Гц при $\theta = 30^\circ$, $Re = 68$ для $d = 6$ (a–c) и 18 (d–f) мм.

$z/b_{div} = 0$ (a, d) (центральное продольное сечение); $z/b_{div} = 0,5$ (b, c), $0,75$ (c, f);

линии 1, 2 — расчет по 3D- и 2D-моделям соответственно, символы 3 — эксперимент.

Обе теоретические модели воспроизводят форму возбужденных волн в центральном продольном сечении ручейка. При этом двумерная модель не в состоянии воспроизвести изменение формы и положения профиля волны вблизи контактных линий. Трехмерная модель хорошо описывает трехмерную форму волн, включая искривление волнового фронта вследствие влияния контактных линий, более сложную деформацию гребня волны и коротковолновое возмущение заднего склона.

Список литературы

1. **Iso Y., Chen X.** Flow transition behavior of the wetting flow between the film flow and rivulet flow on an inclined wall // *J. Fluids Eng.* 2011. Vol. 133, No. 9. P. 091101-1–091101-7.
2. **Singh R.K., Galvin J.E., Sun X.** Three-dimensional simulation of rivulet and film flows over an inclined plate: effects of solvent properties and contact angle // *Chem. Eng. Sci.* 2016. Vol. 142. P. 244–257.
3. **Bonart H., Marek A., Repke J.-U.** Experimental characterization of stable liquid rivulets on inclined surfaces: Influence of surface tension, viscosity and inclination angle on the interfacial area // *Chem. Eng. Res. Des.* 2017. Vol. 125. P. 226–232.
4. **Towell G.D., Rothfeld L.B.** Hydrodynamics of rivulet flow // *AIChE J.* 1966. Vol. 12, No. 5. P. 972–980.
5. **Perazzo C.A., Gratton J.** Navier–Stokes solutions for parallel flow in rivulets on an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 2004. Vol. 507. P. 367–379.
6. **Wilson S.K., Duffy B.R.** A rivulet of perfectly wetting fluid draining steadily down a slowly varying substrate // *IMA J. Appl. Math.* 2005. Vol. 70, No. 2. P. 293–322.
7. **Tanasijczuk A.J., Perazzo C.A., Gratton J.** Navier–Stokes solutions for steady parallel-sided pendent rivulets // *Euro. J. Mech. B/Fluids.* 2010. Vol. 29, No. 6. P. 465–471.
8. **Kuibin P.A.** An asymptotic description of the rivulet flow along an inclined cylinder // *Russ. J. Eng. Thermophys.* 1996. Vol. 6. P. 33–45.
9. **Jensen O.E.** The thin liquid lining of a weakly curved cylindrical tube // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 331. P. 373–403.
10. **Weiland R.H., Davis S.H.** Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 2. Long waves on flat rivulets // *J. Fluid Mech.* 1981. Vol. 107. P. 261–280.
11. **Myers T.G., Liang H.X., Wetton B.** The stability and flow of a rivulet driven by interfacial shear and gravity // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2004. Vol. 39, No. 8. P. 1239–1249.
12. **Benilov E.S.** On the stability of shallow rivulets // *J. Fluid Mech.* 2009. Vol. 636. P. 455–474.
13. **Bostwick J.B., Steen P.H.** Static rivulet instabilities: varicose and sinuous modes // *J. Fluid Mech.* 2018. Vol. 837. P. 819–838.
14. **Alekseenko S.V., Markovich D.M., Shtork S.I.** Wave flow of rivulets on the outer surface of an inclined cylinder // *Phys. Fluids.* 1996. Vol. 8, No. 12. P. 3288–3299.
15. **Alekseenko S.V., Bobylev A.V., Markovich D.M.** Rivulet flow on the outer surface of an inclined cylinder // *J. Eng. Thermophys.* 2008. Vol. 17, No. 4. P. 259–272.
16. **Алексеев С.В., Бобылев А.В., Гузанов В.В., Маркович Д.М., Харламов С.М.** Регулярные волны на вертикально стекающих ривулетах при разных углах смачивания // *Теплофизика и аэромеханика.* 2010. Т. 17, № 3. С. 371–384.
17. **Guzanov V., Aktershev S., Bobylev A., Kvon A., Cherdantsev A.** Experimental and theoretical study of stationary nonlinear three-dimensional wave regimes on a straight rivulet flowing down an inclined plane // *Int. J. Multiph. Flow.* 2024. Vol. 181, No. 1. P. 104990-1–104990-15.
18. **Cherdantsev A., Bobylev A., Guzanov V., Kvon A., Kharlamov S.** Measuring liquid film thickness based on the brightness level of the fluorescence: Methodical overview // *Int. J. Multiph. Flow.* 2023. Vol. 168. P. 104570-1–104570-22.
19. **Alekseenko S.V., Aktershev S.P., Bobylev A.V., Kharlamov S.M., Markovich D.M.** Nonlinear forced waves in a vertical rivulet flow // *J. Fluid Mech.* 2015. Vol. 770, No. 1. P. 350–373.
20. **Aktershev S.P., Alekseenko S.V., Bobylev A.V.** Waves in a rivulet falling down an inclined cylinder // *AIChE J.* 2021. Vol. 67, No. 1. P. e17002-1–e17002-20.
21. **Aktershev S.P., Alekseenko S.V.** Nonlinear waves in a rivulet falling down a vertical plate // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2023. Vol. 156. P. 104479-1–104479-12.
22. **Актершев С.П., Алексеев С.В., Бобылев А.В.** Двумерные стационарно-бегущие волны на поверхности вертикального ривулета // *Теплофизика и аэромеханика.* 2023. Т. 30, № 4. С. 737–750.
23. **Демехин Е.А., Шкадов В.Я.** О трехмерных нестационарных волнах в стекающей плёнке жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1984. № 5. С. 21–27.
24. **Demekhin E.A., Kalaidin E.N., Kalliadas S., Vlaskin S.Yu.** Three-dimensional localized coherent structures of surface turbulence. II. Λ solitons // *Phys. Fluids.* 2007. Vol. 19, No. 11. P. 114104-1–114104-15.

*Статья поступила в редакцию 10 января 2025 г.,
принята к публикации 18 апреля 2025 г.*