

3. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974.
4. Селезнева И. К. Сферически-симметричный оптический разряд как аналог диффузионного горения в смеси горючих газов. — В сб.: Горение и взрыв. М.: Наука, 1971.
5. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени. — ПМТФ, 1962, № 4.
6. Mucha Z., Peradzynski Z., Baranowski A. Instability of continuous optical discharge. — Bull. de l'academie polonaise des sciences, 1977, vol. 25, N 4.
7. Барановский А., Муха З., Перадзыньский З. Неустойчивость непрерывного оптического разряда в газах. — Успехи механики, 1978, т. 1, вып. 3/4.
8. Райзер Ю. П. Дозвуковое распространение световой искры и пороговые условия для поддержания плазмы излучением. — ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 2127.
9. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
10. Махвиладзе Г. М., Новожилов Б. В. О двумерной устойчивости горения конденсированных систем. — ПМТФ, 1971, № 5.

УДК 536.25

ТЕПЛООБМЕН ЦИЛИНДРА ПРИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

В. Б. Репин

(Казань)

Известно, что воздействие звуковым полем интенсифицирует тепломассообменные процессы [1—3], что эффект интенсификации обусловлен наличием стационарных вторичных течений, образующихся вблизи твердой поверхности [4]. Однако имеющиеся теоретические рекомендации по этому вопросу ограничены случаем высокочастотных колебаний, в то время как ситуация, когда толщина слоя Стокса сравнима с размером тела или больше его, является не менее важной. Такая ситуация реализуется, например, в топочных устройствах, работающих в режиме высокочастотной неустойчивости и использующих распыленное жидкое или твердое топливо. Эти задачи важны, в частности, для термоанемометрии.

В работе на примере круглого цилиндра изучается вопрос о влиянии низкочастотных колебаний на локальные и интегральные характеристики процесса теплообмена. Условие низкочастотности означает, что размер слоя Стокса ($\delta_{\text{ак}} \sim (\nu/\omega)^{0.5}$) сравним с размером цилиндра или больше его.

Пусть круглый цилиндр радиуса a и бесконечной длины помещен в безграничную вязкую жидкость, которая на бесконечном удалении от цилиндра колеблется по гармоническому закону с циклической частотой ω . Температура поверхности цилиндра $\tilde{T}_w$ и окружающей среды $\tilde{T}_\infty$ считается постоянной, при этом разность температур $(\tilde{T}_w - \tilde{T}_\infty)$ полагается настолько малой, что изменением физических свойств жидкости и естественной конвекцией можно пренебречь. Пренебрегая также диссипативными эффектами, запишем уравнение энергии в виде [3]:

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon}{1+r} \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(r, \theta)} = \frac{H^2}{\text{Pr}} \nabla^2 T$$

с граничными условиями

$$(2) \quad T = 1 \text{ при } r = 0, \quad T = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Безразмерные величины в уравнениях (1), (2) определены следующим образом:

$$r = (\tilde{r} - a)/a, \quad \psi = \tilde{\psi}/Ba, \quad \tau = \tilde{\tau}\omega, \quad T = (\tilde{T} - \tilde{T}_\infty)/(\tilde{T}_w - \tilde{T}_\infty),$$

где $\varepsilon = S/a$; $H = \delta_{ак}/a$; $\delta_{ак} = \sqrt{\nu/\omega}$; S — амплитуда акустического смещения среды; $B = S\omega$ — амплитуда пульсаций скорости. Тильдой обозначены размерные величины.

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon \ll 1$ (аналогичное предположение использовалось при решении гидродинамической части задачи [4]). Тогда, воспользовавшись методом возмущений, представим решение уравнения (1) в виде ряда

$$(3) \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + O(\varepsilon^2).$$

Аналогично представим и поле скорости

$$(4) \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + O(\varepsilon^2).$$

Напомним, что, согласно [4], ψ_0 является периодической функцией от времени с частотой ω и не содержит не зависящей от времени составляющей, в то время как ψ_1 состоит из двух частей — стационарной $\psi_1^{ст}$ и периодической ψ_1^a , изменяющейся с циклической частотой 2ω .

Поскольку нас интересует влияние низкочастотных колебаний на процесс теплообмена круглого цилиндра, будем в дальнейшем полагать, что $H = O(1)$.

Рассмотрим случай, когда $Pr = O(1)$. Подставив соотношения (3), (4) в уравнение (1) и собрав члены при одинаковых степенях ε , получим следующие уравнения:

$$(5a) \quad \frac{\partial T_0}{\partial \tau} = \frac{H^2}{Pr} \nabla^2 T_0;$$

$$(5b) \quad \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{1}{1+r} \frac{\partial (\psi_0, T_0)}{\partial (r, \theta)} = \frac{H^2}{Pr} \nabla^2 T_1.$$

Обратимся к уравнению (5a). Представим T_0 в виде суммы стационарной и пульсирующей компонент

$$T_0 = T_0^{ст} + T_0^a$$

и запишем отдельно уравнения для каждой компоненты

$$(6a) \quad \frac{\partial T_0^a}{\partial \tau} = \frac{H^2}{Pr} \nabla^2 T_0^a;$$

$$(6b) \quad \nabla^2 T_0^{ст} = 0.$$

Поскольку в граничных условиях (2) отсутствует зависимость от времени, то $T_0^a = 0$. Следовательно, поле температур T_0 не зависит от времени, и, как это следует из уравнения (6b), процесс теплоотдачи определяется только теплопроводностью (для цилиндра в этом случае $Nu \equiv 0$). Нас же интересует ситуация, когда процесс теплоотдачи при низкочастотных колебаниях является конвективным, т. е. определяется структурой вторичных течений, образующихся при колебаниях. Для этого необходимо, увеличив число Прандтля Pr , уменьшить вклад кондуктивных членов в процесс теплоотдачи.

Рассмотрим случай, когда $Pr = O(\varepsilon^{-1})$, т. е. $(\varepsilon Pr) = O(1)$. Тогда, подставив соотношения (3), (4) в уравнение (1) и собрав члены при одинаковых степенях ε , получим, учитывая, что $(\varepsilon Pr) = O(1)$,

$$(7a) \quad \partial T_0 / \partial \tau = 0;$$

$$(7b) \quad \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{1}{1+r} \frac{\partial (\psi_0, T_0)}{\partial (r, \theta)} = \frac{H^2}{\varepsilon Pr} \nabla^2 T_0.$$

Из уравнения (7a) следует, что, как и в случае $Pr = O(1)$, поле температур с точностью до членов порядка ε не зависит от времени. Учитывая это,

усредним уравнение (76) за период колебаний. Тогда, принимая во внимание, что $\psi_0 \sim \cos \tau$, получим $\nabla^2 T_0 = 0$, т. е. и при умеренно больших числах Прандтля процесс теплообмена при низкочастотных колебаниях цилиндра также является кондуктивным.

Рассмотрим случай $(\varepsilon^2 \text{Pr}) = O(1)$. Используя уравнения (1), (3), (4) и повторив ту же процедуру, что и при выводе уравнений (7), получим с точностью до членов порядка ε^2

$$(8a) \quad \partial T_0 / \partial \tau = 0;$$

$$(8b) \quad \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{1}{1+r} \frac{\partial (\psi_0, T_0)}{\partial (r, \theta)} = 0;$$

$$(8в) \quad \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + \frac{1}{1+r} \left[\frac{\partial (\psi_1, T_0)}{\partial (r, \theta)} + \frac{\partial (\psi_0, T_1)}{\partial (r, \theta)} \right] = \frac{H^2}{\varepsilon^2 \text{Pr}} \nabla^2 T_0.$$

Обратимся к уравнению (8б). Поскольку T_0 не зависит от времени, а $\psi_0 \sim \cos \tau$, то

$$T_1 = T_{10}(r, \theta) + T_{11}(r, \theta) \sin \tau.$$

Тогда, применив к уравнению (8в) операцию осреднения по времени за период колебаний, получим

$$(9) \quad \left\langle \frac{1}{1+r} \left[\frac{\partial (\psi_1, T_0)}{\partial (r, \theta)} + \frac{\partial (\psi_0, T_1)}{\partial (r, \theta)} \right] \right\rangle = \frac{H^2}{\varepsilon^2 \text{Pr}} \nabla^2 T_0.$$

Второе слагаемое в левой части уравнения (9) равно нулю, так как функции, описывающие зависимость от времени ψ_0 и T_1 , являются ортогональными на промежутке $[0, 2\pi]$. Учитывая это, уравнение (9) запишем в виде

$$(10) \quad \frac{1}{1+r} \frac{\partial (\psi_1^{\text{ст}}, T_0)}{\partial (r, \theta)} = \frac{H^2}{\varepsilon^2 \text{Pr}} \nabla^2 T_0,$$

где $\psi_1^{\text{ст}}$ — стационарная составляющая функции тока.

Таким образом, при низкочастотных колебаниях конвективный перенос тепла становится существенным только для случая больших чисел Прандтля $\text{Pr} = O(\varepsilon^{-2})$. Кроме того, как это следует из уравнения (10), пульсационные составляющие скорости и температуры не оказывают никакого влияния на стационарное поле температур. Аналогичный результат для случая высокочастотных колебаний был впервые получен в работе [1].

Из структуры уравнения (10) также следует, что в том случае, когда $(\varepsilon^2 \text{Pr}) \gg 1$, вблизи поверхности цилиндра образуется тепловой пограничный слой, толщина которого (учитывается, что вблизи поверхности $\psi_1^{\text{ст}} \sim r^2$, а также, что $H = O(1)$) порядка $O[a(\varepsilon^2 \text{Pr})^{-1/3}]$. Тогда, вводя переменные, соответствующие тепловому пограничному слою,

$$y = k^{-1}r, \quad t_0(y, \theta) = T_0(r, \theta), \quad k = (\varepsilon^2 \text{Pr})^{-1/3},$$

а также разложив функцию тока $\psi_1^{\text{ст}}$ и температуру в ряд по k

$$\psi_1^{\text{ст}} = k^2 \beta_1 + k^3 \beta_2 + O(k^4), \quad t_0 = t_{00} + k t_{01} + O(k^2)$$

и подставив в уравнение (10), получим, ограничившись членами первого порядка по k :

$$(11) \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \frac{\partial t_{00}}{\partial \theta} - \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} \frac{\partial t_{00}}{\partial y} = H^2 \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial y^2},$$

где
$$\beta_1 = \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_1^{\text{ст}}}{\partial y^2} \right)_{y=0}; \quad \beta_2 = \frac{1}{6} y^3 \left(\frac{\partial^3 \psi_1^{\text{ст}}}{\partial y^3} \right)_{y=0}.$$

Определим явный вид функции β_1 . Для этого воспользуемся решением гидродинамической части задачи, приведенным в работе [4]:

$$(12) \quad \psi_1^{\text{вн}} = \frac{1}{4\Delta} \left\{ \gamma \frac{a^2}{r^2} [\ker_2'' \gamma \ker_0 \gamma - \ker_2'' \gamma \ker_0 \gamma] + \right. \\ \left. + \gamma [\ker_0 \gamma \ker_0'' \gamma - \ker_0 \gamma \ker_0'' \gamma] + \right. \\ \left. + 2 \left[\ker_2 \left(\frac{\tilde{r}^2}{a^2} \right) \ker_0 \gamma - \ker_2 \left(\frac{\tilde{r}^2}{a^2} \right) \ker_0 \gamma \right] \right\} \sin 2\theta,$$

где $\Delta = \ker_0^2 \gamma + \ker_2^2 \gamma$; $\ker_2'' x = d/dx \ker_2 x$; $\gamma = H^{-1}$; $\ker_n x$, $\ker_n x$ — функции Томсона.

Используя (12), получим

$$\beta_1 = \frac{1}{4H^2} y^2 \sin 2\theta.$$

Тогда уравнение (11) перепишем в виде

$$(13) \quad y \sin \varphi \frac{\partial t_{00}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} y^2 \cos \varphi \frac{\partial t_{00}}{\partial y} = H^4 \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial y^2},$$

где $\varphi = 2\theta$ и отсчитывается от линии, совпадающей с направлением колебаний цилиндра. Вводя переменную

$$x = \left(\frac{1}{9H^4} \right)^{1/3} y \frac{\sin^{1/2} \varphi}{\left[\int_0^\varphi \sin^{1/2} \chi d\chi \right]^{1/3}},$$

уравнение (13) сведем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 t_{00}}{dx^2} + 3x^2 \frac{dt_{00}}{dx} = 0,$$

решение которого, удовлетворяющее граничным условиям

$$t_{00} = 1 \text{ при } x = 0, \quad t_{00} = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

имеет вид

$$(14) \quad t_{00} = 1 - \frac{3}{\Gamma(1/3)} \int_0^x e^{-\xi^3} d\xi,$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Используя (14), получим, что локальный тепловой поток от цилиндра равен

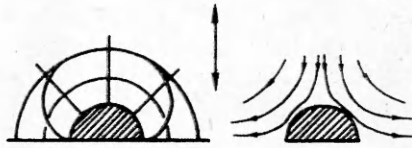
$$q = -\lambda \left(\frac{\partial t_{00}}{\partial r} \right)_{\tilde{r}=a} (\tilde{T}_w - \tilde{T}_\infty) = 0,85 \frac{\lambda}{a} (\text{PrRe}_n^2)^{1/3} \frac{\sin^{1/2} \varphi}{\left[\int_0^\varphi \sin^{1/2} \chi d\chi \right]^{1/3}}.$$

Тогда выражение для локального безразмерного коэффициента теплоотдачи, подсчитанного по диаметру цилиндра, примет вид

$$(15) \quad \text{Nu} = 0,85 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_n^{2/3} \frac{\sin^{1/2} \varphi}{\left[\int_0^\varphi \sin^{1/2} \chi d\chi \right]^{1/3}},$$

где $\text{Re}_n = Ud/\nu$ — число Рейнольдса, подсчитанное по среднеквадратичной скорости пульсаций ($U = B/\sqrt{2}$) и диаметру цилиндра.

На фигуре представлено рассчитанное по формуле (15) распределение локального коэффициента теплообмена вдоль поверхности цилиндра. Там же приведена заимствованная из работы [4] структура вторичных течений, образующихся вблизи цилиндра при низкочастотных колебаниях. Как следует из фигуры, распределение локального коэффициента теплообмена по поверхности цилиндра не является равномерным. Так, в точке набегающих вторичных течений на поверхность цилиндра, которая лежит на линии, совпадающей с направлением колебаний, локальный коэффициент теплообмена достигает максимального значения, уменьшаясь по мере продвижения к точке схода вторичных течений с поверхности, причем в этой точке $Nu = 0$. Аналогичное распределение для случая высокочастотных колебаний цилиндра впервые было получено в работе [1].



Используя (15), вычислим среднее по поверхности выражение для безразмерного коэффициента теплообмена $\overline{Nu} = 0,73 Pr^{1/3} Re_d^{2/3}$ или

$$(16) \quad \overline{Nu} = 0,73 (Ud / \sqrt{D\nu})^{2/3}.$$

Таким образом, при низкочастотных колебаниях цилиндра безразмерный коэффициент теплообмена пропорционален величине скорости пульсаций $U^{2/3}$ и размеру цилиндра $d^{2/3}$, обратно пропорционален коэффициенту температуропроводности $D^{-2/3}$ и кинематической вязкости среды $\nu^{-1/3}$ и в отличие от случая высокочастотных колебаний не зависит от частоты.

В работе [5] приведены результаты экспериментального исследования по теплоотдаче цилиндра диаметром $1,98 \cdot 10^{-2}$ м, колеблющегося в высоковязкой жидкости (мазут, автол, веретенное масло). Частота колебаний изменялась в диапазоне $1,7 - 27,0$ Гц, кинематическая вязкость жидкости $\nu = (66,2 - 1,28) \cdot 10^{-4}$ м²/с, число Прандтля $Pr = (150 - 1,4) \cdot 10^2$, амплитуда смещения цилиндра $S = (0,25 - 2,0) \cdot 10^{-2}$ м, т. е. выполнялось большинство допущений, принятых нами при теоретическом решении задачи, за исключением условия малости амплитуды смещения среды.

Экспериментальная формула этих авторов имеет вид

$$\overline{Nu} = 0,146 Re_d^{0,67} Pr^{0,51},$$

т. е. показатель степени при числе Рейнольдса практически совпадает с теоретическим значением, однако зависимость от числа Прандтля более сильная, нежели это предсказывает теория.

В работе [6] на основе собственных результатов и результатов работы [5] рекомендуется использовать следующее эмпирическое выражение для расчета процесса теплообмена цилиндра при низкочастотных колебаниях:

$$(17) \quad \overline{Nu} = 0,182 Re_d^{0,64} Pr^{0,32},$$

в котором функциональная связь безразмерного коэффициента теплообмена с остальными параметрами процесса практически совпала с теоретическими рекомендациями.

Соотношение (17) также было получено в недавней экспериментальной работе [7].

Следует указать на некоторое завышение значений коэффициента теплообмена, вычисленных при использовании выражения (16), полученного аналитическим путем. Это несоответствие обусловлено, на наш взгляд, в первую очередь нарушением условия малости амплитуды смещения среды, а также тем фактом, что при решении тепловой части задачи использовался профиль скорости, полученный методом Озеена, который (метод) дает завышенные значения скорости вблизи поверхности цилиндра за счет

увеличения вклада конвективных членов в уравнения движения, что и обуславливает завышенные значения коэффициента теплообмена.

Автор выражает благодарность В. Е. Накорякову за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 30 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Болдарев А. М., Терлеев П. Н. Тепло- и массообмен в звуковом поле. Новосибирск: изд. ИТФ СО АН СССР, 1970.
2. Галицкий Б. М., Рыжов Ю. А., Якуш Е. В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977.
3. Галиуллин Р. Г., Репин В. В., Халитов Н. Х. Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле. Казань: изд. Казанск. ун-та, 1978.
4. Andres J. M., Ingard U. Acoustic streaming at low Reynolds numbers. — J. Acoust. Soc. Amer., 1953, vol. 25, N 5.
5. Калашников Н. В., Черников В. И. Виброподогрев вязких нефтепродуктов. М.: Гостехиздат, 1961.
6. Бузник В. М., Везломцев К. А. Некоторые результаты обобщения экспериментальных данных по интенсификации процессов конвективного теплообмена. — Изв. высш. учеб. заведений. Энергетика, 1959, № 8.
7. Аксельруд Г. А., Фиклисов И. Н., Троцкий В. И. Массообмен между твердыми частицами и пульсирующим потоком жидкости. — ИФЖ, 1978, т. 34, № 5.

УДК 532.72

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОДИФФУЗИИ НА СВОБОДНУЮ КОНВЕКЦИЮ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПОЛОСТИ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

М. И. Кислухин, А. Ю. Пинягин, А. Ф. Пшеничников
(Пермь)

Известно, что явление термодиффузии может существенно влиять на конвективную устойчивость бинарной смеси, состоящей из нереагирующих компонентов [1]. Изучению конвективной устойчивости равновесия жидкой бинарной смеси в плоском горизонтальном слое посвящены работы [2—9], в [3—7] получена петля гистерезиса в задаче Бенара для двухкомпонентной жидкости, в [3—5] проведено также экспериментальное исследование этой задачи. Влияние термодиффузии на конвективную устойчивость равновесия и конвективный тепло-массоперенос в вертикальной щели изучено в [1, 10, 11]. В [12] теоретически и экспериментально изучается влияние термодиффузии на теплопередачу через пограничный слой. Исследование свободной конвекции жидкой бинарной смеси в наклонной прямоугольной полости выполнено в работе [13].

В данной работе численно исследуется свободная конвекция бинарной смеси в квадратном горизонтальном цилиндре с учетом термодиффузии. Рассматривается подогрев сбоку. Считается, что термодиффузия является единственной причиной возникновения неоднородности концентрации. Исследование проведено для газовых смесей и водных растворов солей. Показано, что при слабой конвекции нормальная термодиффузия может привести к усилению скорости конвективного движения более чем в 2 раза, а аномальная — к ослаблению. При числах Рэлея порядка 10^3 отмечено появление вертикальной составляющей градиента концентрации в центре полости. В случае аномальной термодиффузии максимальное значение функции тока оказывается неоднозначной функцией числа Рэлея (наблюдается гистерезис). При числах Рэлея больше 10^4 влиянием термодиффузии на конвективное движение можно пренебречь.

Рассмотрим квадратный бесконечный горизонтальный цилиндр высотой a , заполненный жидкой бинарной смесью. Боковые границы непроницаемы и имеют различные температуры T_1 и T_2 . Верхняя и нижняя