

УДК 622.831

**ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ МУЛЬД
СДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
С ВЫСОКИМИ ГРАДИЕНТАМИ ОСЕДАНИЙ**

А. А. Барях, Н. А. Самоделкина

*Горный институт УрО РАН, E-mail: bar@mi-perm.ru,
ул. Сибирская, 78а, 614007, г. Пермь, Россия*

В рамках упругопластической модели предложена методика теоретического описания мультсдвигания земной поверхности с высокими градиентами оседаний. Подход основан на снижении модуля сдвига породного массива, приуроченного к краевой части мультсдвигания. Предпосылкой к ослаблению модуля сдвига на этих участках является повышенная техногенная нагрузка, которая обуславливает формирование зон нарушенности, увеличение дефектности горных пород за счет раскрытия микротрещин, межзеренных контактов и т. д. Методика определения коэффициента техногенного ослабления модуля сдвига базируется на сопоставительном анализе наклонов земной поверхности. Реализация данного подхода позволяет достоверно отразить в расчетах процесс сдвигания земной поверхности с высокими градиентами оседаний и обеспечивает адекватные оценки напряженно-деформированного состояния подработанного массива, включая локализацию зон пластического деформирования.

Разработка месторождений, оседания земной поверхности, мультсдвигания, породный массив, математическое моделирование, напряженно-деформированное состояние

DOI: 10.15372/FTPRPI20240302
EDN: IWUABE

При разработке месторождений полезных ископаемых формируются мультсдвигания земной поверхности с высокими градиентами оседаний в краевых частях выработанного пространства. Это происходит как при камерной, так и при столбовой системе разработки [1 – 3]. При отработке длинными очистными забоями такой характер развития сдвигания отмечается уже в процессе движения очистного фронта, а при камерной высокие градиенты оседаний, как правило, приурочены к временно или длительно остановленным границам горных работ. Значительные градиенты оседаний возникают также в аварийных ситуациях и в процессе ликвидации шахт и рудников [4 – 7].

Методика исследований разработана при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-77-30008), пример практической реализации выполнен при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (рег. номер 124020500031-4).

Контроль процесса сдвижения на месторождениях полезных ископаемых обычно проводится методами инструментальных маркшейдерских наблюдений [4, 8, 9], используются спутниковые навигационные системы [10–12], все шире применяются радарные интерферометрические технологии [13–14].

В настоящее время в России и за рубежом для описания развития процесса сдвижения активно применяются методы математического моделирования, основанные на различных моделях деформирования и алгоритмах их численной реализации [15–19]. При формировании мульд со значительными градиентами оседаний отражение такого характера деформаций земной поверхности вызывает определенные сложности [1, 20]. Это затрудняет прогнозные оценки негативного воздействия горных работ на объекты, расположенные на земной поверхности и испытывающие максимальную техногенную нагрузку именно на участках с высокими градиентами оседаний, на что обращалось внимание многими исследователями [21–23].

Логично предположить, что формирование мульд сдвижения с высокими градиентами оседания земной поверхности связано с уменьшением модуля сдвига подработанного массива в краевых частях выработанного пространства. Предпосылками к этому служат концентрация на участках горизонтальных деформаций растяжения и развитие зон пластичности, которые в физическом отношении ассоциируются с образованием трещин сдвига [1]. Кроме того, в интервалах геологического разреза, где не происходит локализация пластических деформаций, отмечается уменьшение модуля сдвига вследствие увеличения дефектности горных пород за счет раскрытия микротрещин, межзеренных контактов и т. д.

Достоверное описание развития процесса сдвижения — важный элемент оценки напряженно-деформированного состояния подработанного массива, свидетельствующий о правильности геомеханических расчетов.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Математическое описание мульд сдвижения с высокими градиентами оседаний проводилось на примере Верхнекамского месторождения солей (ВКМС), где накоплен обширный фактический материал в области сдвижения земной поверхности под воздействием подземной разработки. Необходимость тотального контроля деформаций земной поверхности на ВКМС, наряду с охраной зданий и сооружений, связана с проблемой защиты калийных рудников от прорыва пресных вод в горные выработки [1, 5, 7]. Оседания земной поверхности лежат в основе инженерных критериев, определяющих сохранность водозащитной толщи, и включены в параметрическое обеспечение оценки ее состояния методами математического моделирования [1, 24, 25].

Подработанный в условиях ВКМС породный массив моделировался слоистой изотропной средой, однородной по латерали и отражающей основные особенности геологического разреза: наличие терригенно-карбонатной и соляно-мергельной толщ, а также различные литотипы соляных пород (карналлиты, сильвиниты, каменная соль) [25]. Деформирование отработанных камерной системой разработки рабочих пластов определялось переменными во времени модулями деформаций, алгоритм расчета которых приведен в [1]. В качестве определяющего уравнения нелинейной связи напряжений и деформаций принималась идеальная упругопластическая модель, которая является обобщением упругой и жесткопластической среды с внутренним трением. Решение упругопластической задачи базировалось на методе начальных напряжений [26]. В качестве условия пластичности при математическом моделировании использовался трехмерный критерий, предложенный в [27]. Численная реализация основывалась на алгоритмах метода конечных элементов [28, 29].

Пусть вследствие ведения горных работ на земной поверхности сформировалась мульда сдвижения, краевая часть которой (L) характеризуется значительными наклонами (рис. 1, кривая 1). Непосредственное решение задачи без ослабления модуля сдвига пород G в краевой части выработанного пространства не позволяет с приемлемой точностью обеспечить распределение наклонов мульды сдвижения и описать ее форму (рис. 1, кривая 2).

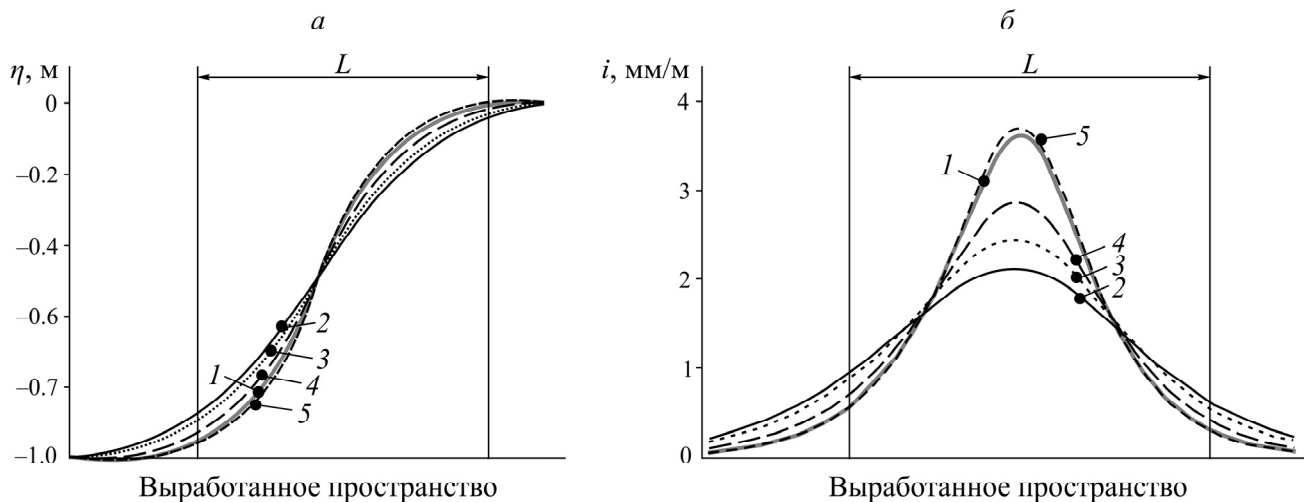


Рис. 1. Мульды сдвижения (a) и распределение наклонов земной поверхности (b): 1 — фактическая; 2–5 — расчетные (2 — $k=1.0$; 3 — $k=0.75$; 4 — $k=0.5$; 5 — $k=0.3$)

Допустим, что в краевой части подработанного массива происходит снижение модуля сдвига пород:

$$G^T = kG, \quad (1)$$

где k — коэффициент техногенного ослабления.

Введение в расчет соотношения (1) без пропорционального уменьшения модуля деформаций (упругости) приводит к нарушению закона Гука для изотропной среды, поэтому предлагается разделить деформации сдвига на техногенные γ^T , реализованные за счет ослабления модуля сдвига, и на деформации сдвига $\gamma - \gamma^T$, определяющие сдвиговые напряжения $\tau = G(\gamma - \gamma^T)$.

В этом случае в трехмерной постановке закон Гука для касательных напряжений примет следующий вид:

$$\tau_{ij} = (\gamma_{ij} - \gamma_{ij}^T)G. \quad (2)$$

С учетом предположения об уменьшении модуля сдвига породного массива, приуроченного к краевой части мульды сдвижения, реализация математического моделирования основывалась на итерационной процедуре метода начальных деформаций [30], в качестве начальных приняты техногенные деформации. На первой итерации $\gamma_{ij}^{T(1)} = 0$, а на последующих i -х итерациях техногенные деформации находятся из соотношения

$$\gamma_{ij}^{T(i+1)} = 0.5 \left[\gamma_{ij}^{T(i)} + (\gamma_{ij}^{(i)} - \gamma_{ij}^{T(i)}) \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \right], \quad (3)$$

где $\gamma_{ij}^{T(i)}$ и $\gamma_{ij}^{(i)}$ — соответственно техногенная и общая деформация на предыдущей итерации.

Численные эксперименты показали, что при использовании соотношения (3) при значениях $k \geq 0.5$ итерационный процесс достаточно быстро сходится: отличие смещений на 2-й и 10-й итерациях не превышает 0.8 %, а отличие между 9-й и 10-й менее 0.0001 %. При значениях коэффициента техногенного ослабления модуля сдвига $k < 0.5$ итерационный процесс при использовании соотношения (3) может расходиться. В этой связи предложена процедура последовательного расчета техногенных деформаций:

$$\gamma_{ij}^{T(i+1)} = \frac{(n-1)\gamma_{ij}^{T(i)} + (\gamma_{ij}^{(i)} - \gamma_{ij}^{T(i)})\left(\frac{1}{k} - 1\right)}{n}. \quad (3^*)$$

Здесь параметр n , зависящий от значения k , определяет количество итераций, обеспечивающих сходимость итерационного процесса: $i \geq n$. При $n=2$ соотношение (3*) соответствует выражению (3).

На рис. 2 представлена зависимость $n=f(k)$, полученная на основе многовариантного математического моделирования. При значительном снижении модуля сдвига наблюдается резкое увеличение количества итераций. Построенную эмпирическую кривую можно аппроксимировать выражением $n = 1/k + 1$, которая вследствие заведомо большего числа итераций обеспечит сходимость процесса.

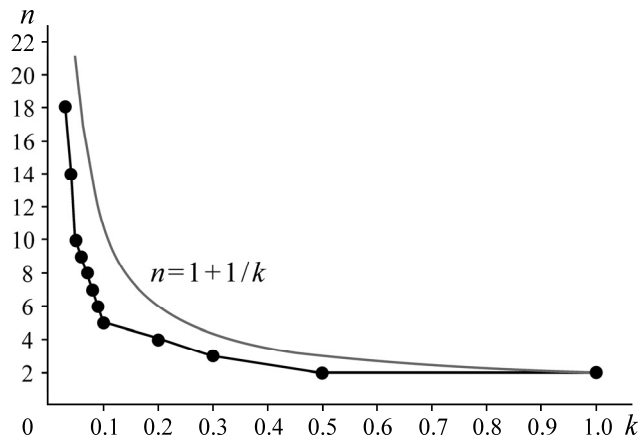


Рис. 2. Зависимость параметра n от уменьшения модуля сдвига в краевой части выработанного пространства

Варьируя коэффициент техногенного ослабления модуля сдвига, можно достаточно точно описать мульду сдвижения с высокими градиентами оседания (см. рис. 1).

Необходимый коэффициент ослабления модуля сдвига может быть получен из анализа фактического распределения наклонов мульды сдвижения. На рис. 3 приведена построенная по результатам математического моделирования зависимость

$$k = f(i^*) = f \frac{i_{\max}^{(k)}}{i_{\max}^{(1)}}, \quad (4)$$

где $i_{\max}^{(k)}$ и $i_{\max}^{(1)}$ — соответственно максимальные значения наклона при заданном коэффициенте техногенного ослабления модуля сдвига k , которые формально отождествляются с фактическими или прогнозными деформациями земной поверхности, и при отсутствии ослабления $k=1$ (рис. 3). При построении зависимости (4) максимальные оседания земной поверхности $\eta_{\max}$ варьировались в диапазоне 1–4 м. Как видно, коэффициент ослабления модуля сдвига практически не зависит от $\eta_{\max}$, а полностью определяется соотношением наклонов.

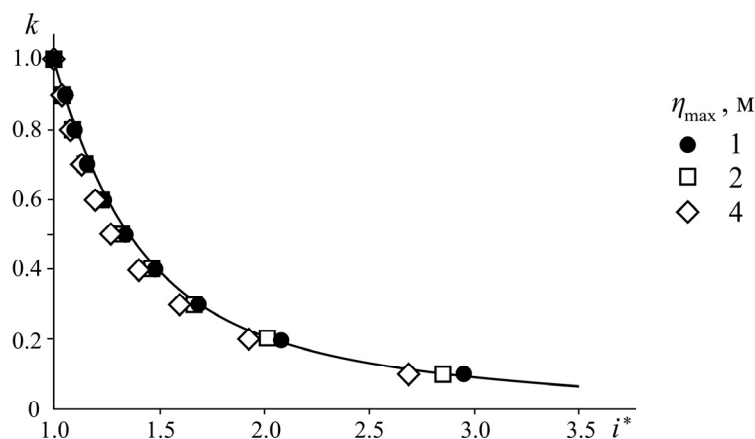


Рис. 3. Зависимость коэффициента ослабления модуля сдвига от наклона земной поверхности

Зависимость (4) может быть аппроксимирована степенной функцией

$$k = (i^*)^{-2.25}. \quad (5)$$

Таким образом, определение значения коэффициента техногенного ослабления модуля сдвига в краевой части подработанного массива проводится по следующей схеме:

— для фактической, полученной по данным маркшейдерских наблюдений, или прогнозной мульды сдвижения вычисляется значение максимальных наклонов $i_{\max}^{(k)}$;

— на основе математического моделирования строится мульда сдвижения в отсутствии техногенного ослабления модуля сдвига ($k = 1$) и рассчитывается соответствующее значение наклона $i_{\max}^{(1)}$;

— по значению i^* (рис. 3) или по формуле (5) находится численное значение коэффициента ослабления модуля сдвига $k = k^*$;

— для полученного оценочного значения k^* выполняется уточняющий расчет напряженно-деформированного состояния подработанного массива.

ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Рассматривался участок одного из шахтных полей ВКМС, в пределах которого под воздействием камерно-столбовой системы разработки на земной поверхности сформировалась мульда сдвижения с высокими градиентами оседаний. В соответствии с методикой [1] выполнено математическое моделирование напряженно-деформированного состояния подработанного массива с оценкой оседаний земной поверхности и локализацией зон пластичности, которые идентифицируются с областями разрушения.

При математическом моделировании учитывались основные особенности строения подработанного массива. Граничные условия определялись следующим образом: на боковых границах горизонтальные смещения, а на нижней границе вертикальные — принимались равными нулю. Верхняя граница свободна от усилий. Расчетная схема представлена на рис. 4. Исходное напряженное состояние ненарушенного горными работами соляного массива принималось литостатическим. Решение задачи выполнялось в постановке плоской деформации. Принятый к анализу геологический разрез включал: отработанные рабочие пласты (сильвинитовые КрП, АБ и карналлитовый В), терригено-карбонатную (ТКТ) и соляно-мергельную (СМТ) толщи. В интервале водозащитной толщи (ВЗТ) выделены карналлит-сильвинитовая зона (ВЗТ₁), по-

кровная каменная соль (ВЗТ₂) и переходная пачка (ВЗТ₃). Размеры расчетной области составляли: по латерали 2000 м, по вертикали 450 м. Средняя глубина горных работ принималась равной 300 м. Параметры камерной системы разработки варьировались в диапазоне: пласт КрII — ширина камер 15–16 м, ширина целиков 11–12 м, вынимаемая мощность 5.1–6.4 м; пласт АВ — ширина камер 15–16 м, ширина целиков 11–12 м, вынимаемая мощность 3.4–4.1 м; пласт В — ширина камер 8 м, ширина целиков 19 м, вынимаемая мощность 9.4–10.5 м. В расчетах принимались средние механические свойства пород, развитых в геологическом разрезе ВКМС [30].

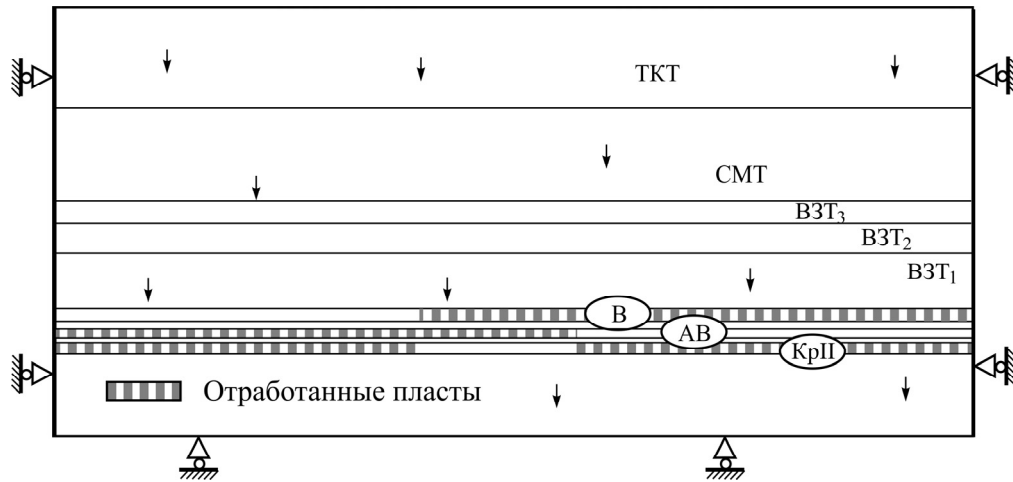


Рис. 4. Принципиальная схема расчета подработанного массива

В рамках упругопластической постановки решение задачи основывалось на трехмерном критерии прочности [28]:

$$F = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_{сж}\sigma_{раст}, \quad (6)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $\sigma_{сж}, \sigma_{раст}$ — соответственно пределы на одноосное сжатие и растяжение.

При $F < 0$ напряженно-деформированное состояние соответствует упругой модели деформирования; при $F > 0$ — пластическая модель деформирования, при $F = 0$ выражение (6) определяет поверхность предельных напряжений.

Для случая плоского деформированного состояния $\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$ (ν — коэффициент Пуассона). Исключая из выражения (6) напряжение σ_2 , получим следующее аналитическое представление критерия: $A\sigma_1^2 + B\sigma_1 + C = 0$, где $A = 1 - \nu + \nu^2$; $B = \sigma_3(2\nu^2 - 2\nu - 1) + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})(1 + \nu)$; $C = \sigma_3^2(\nu^2 - \nu - 1) + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})(1 + \nu)\sigma_3 - \sigma_{сж}\sigma_{раст}$.

На первом этапе математическое моделирование выполнялось для варианта без введения техногенного ослабления модуля сдвига (рис. 5). Как видно, в этом случае не удастся адекватно описать фактические оседания земной поверхности, полученные по результатам маркшейдерских измерений. Обратим внимание также на характер распределения зон техногенной нарушенности в подработанном массиве. В интервале ВЗТ они развиты лишь в нижней ее части — ВЗТ₁.

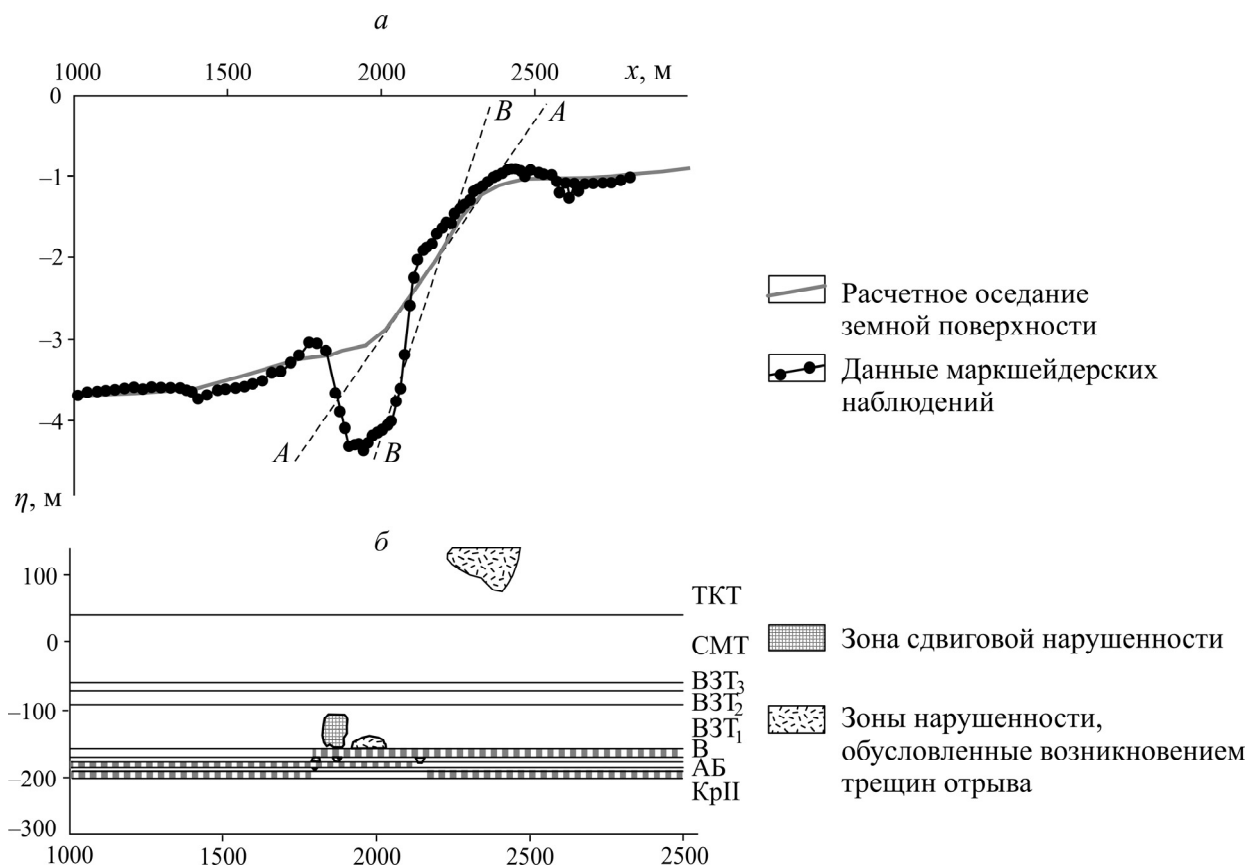


Рис. 5. Распределение оседаний земной поверхности (а) и зон техногенной нарушенности (б) без ослабления модуля сдвига

Используя фактическую мульд оседания земной поверхности, выполним оценку коэффициента ослабления модуля сдвига в соответствии с вышеприведенной методикой. На рис. 5а прямая AA соответствует наклону расчетных оседаний земной поверхности $i_{\max}^{(1)} = 5.34 \cdot 10^{-3}$. Поскольку фактическая мульда оседания земной поверхности имеет сложный вид и значительно отличается от мульды в краевой части отработанного пространства, определение наклона проводилось по осредненной прямой BB : $i_{\max}^{(k)} = 11.53 \cdot 10^{-3}$. Тогда коэффициент ослабления модуля сдвига k по формуле (5) примет значение 0.177. Варьируя значение k в диапазоне 0.15–0.25, получим, что при коэффициенте $k = 0.2$ расчетная мульда сдвижения практически точно отражает процесс деформации земной поверхности.

При оценке техногенной нарушенности по критерию (6) необходимо учитывать, что в зонах с уменьшенным модулем сдвига прочностные характеристики ($\sigma_{сж}^*$, $\sigma_{раст}^*$) также будут снижены. В этих зонах предлагается ввести коэффициент ослабления прочностных свойств f , определяемый соотношением

$$f = \sigma_i / \sigma_i^*, \quad (7)$$

где σ_i — интенсивность напряжений в рассматриваемой точке для рассчитанного поля напряжений $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}$. Здесь τ_{ij} находится из соотношения (2); σ_i^* — интенсивность напряжений в рассматриваемой точке для скорректированного поля напряжений $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}^*, \tau_{yz}^*, \tau_{zx}^*\}$, $\tau_{ij}^* = G\gamma_{ij}$.

Тогда

$$\sigma_{сж}^* = f \sigma_{сж}, \quad \sigma_{раст}^* = f \sigma_{раст}. \quad (8)$$

Введение в расчетную схему зоны с ослабленным модулем сдвига позволяет не только адекватно описать мульду сдвижения земной поверхности, соответствующую фактическим данным, но и существенно уточнить оценку напряженно-деформированного состояния подработанного массива. В частности, в отличие от расчетов, приведенных на рис. 5, зоны локализации пластических деформаций охватывают (рис. 6) весь разрез ВЗТ, что свидетельствует о значительной степени нарушения ее сплошности и реальной опасности прорыва пресных вод в горные выработки.

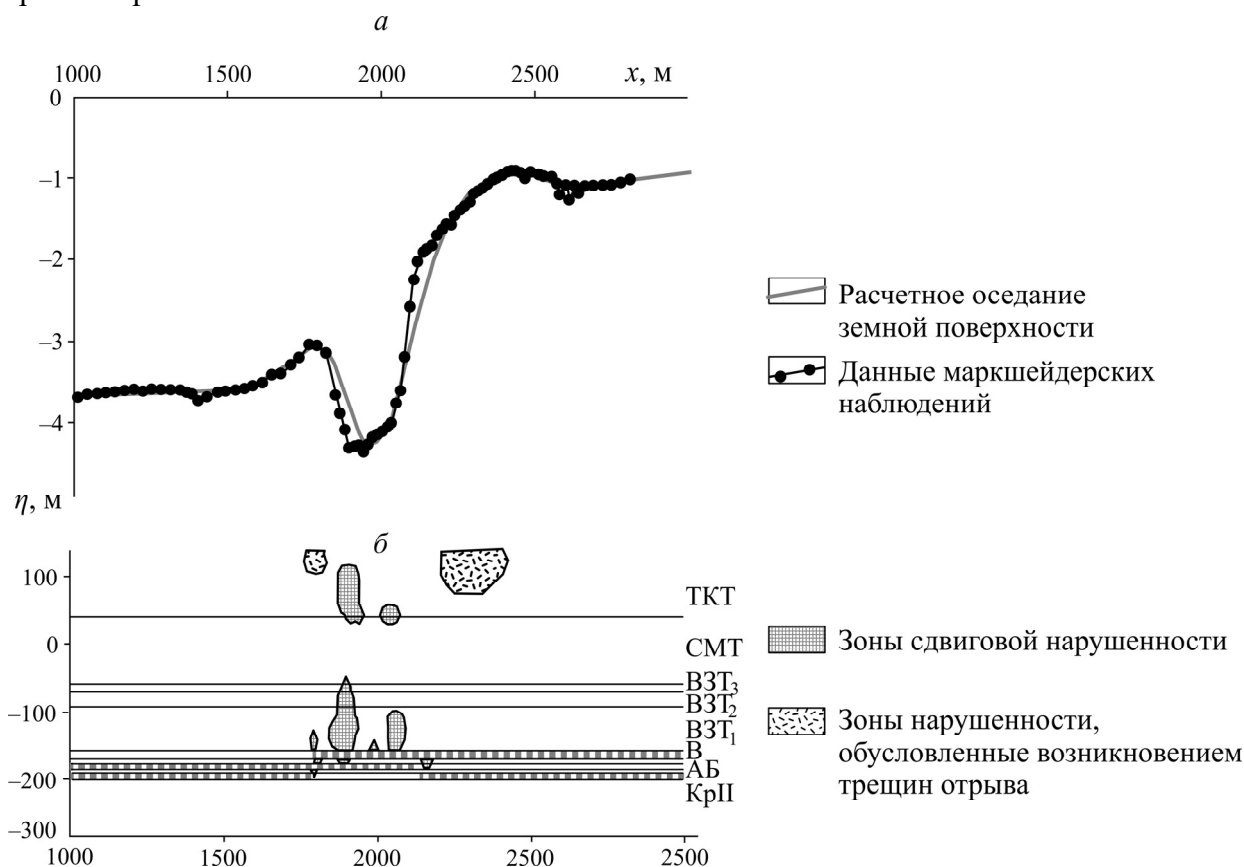


Рис. 6. Распределение оседаний земной поверхности (а) и зон техногенной нарушенности (б) при уменьшении модуля сдвига

Таким образом, предложенный подход к математическому описанию мульд сдвижения с высокими градиентами оседания, основанный на ослаблении модуля сдвига в краевой части выработанного пространства, характеризуется достаточно простой численной реализацией и обеспечивает для калийных рудников точные прогнозные оценки безопасных условий подработки водозащитной толщи.

ВЫВОДЫ

Предложена методика теоретического описания методом математического моделирования мульд сдвижения земной поверхности с высокими градиентами оседаний. Подход основан на снижении модуля сдвига породного массива, приуроченного к краевой части мульды сдвижения.

На конкретном практическом примере показано, что реализация данной методической схемы позволяет достоверно отразить сдвигание земной поверхности на участках с высокими градиентами оседаний земной поверхности и обеспечивает адекватные оценки напряженно-деформированного состояния подработанного массива, включая локализацию зон пластического деформирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baryakh A. A., Sanfirov I. A., Fedoseev A. K., Babkin A. I., and Tsayukov A. A. Seismic-geomechanical control of water-imperious strata in potassium mines, J. Min. Sci., 2017, Vol. 53, No. 6. — С. 981–992.
2. Кулибаба С. Б., Рожко М. Д. Характер развития процесса сдвижения земной поверхности после остановки очистного забоя // Маркшейдерский вестник. — 2007. — № 3 (61). — С. 63–65.
3. Baryakh A. A., Devyatkov S. Y., and Denkevich E. T. Mathematical modelling of displacement during the potash ores mining by longwall faces, J. Min. Inst., 2023, No. 259. — P. 13–20.
4. Харисова О. Д., Харисов Т. Ф. Анализ многолетних инструментальных наблюдений и прогноз развития аварийных событий на Сарановском месторождении // Проблемы недропользования. — 2020. — № 2 (25). — С. 134–143.
5. Барях А. А., Десятков С. Ю., Самоделкина Н. А. Теоретическое обоснование условий образования провалов на земной поверхности после аварийного затопления калийных рудников // ФТПРПИ. — 2016. — № 1. — С. 50–51.
6. Голубев Ф. М. Особенности параметров сдвижения многократно подработанной очистными выработками земной поверхности при ликвидации угледобывающих предприятий // Журн. теор. и прикл. механики. — 2020. — № 4 (73). — С. 62–69.
7. Рыбникова Л. С., Фельдман А. Л., Рыбников П. А. Инженерная защита гидросферы при отработке и ликвидации рудников // ГИАБ. — 2012. — № 10. — С. 301–306.
8. Инструкция по наблюдениям за сдвижением горных пород и земной поверхности при подземной разработке рудных месторождений. — М.: Недра, 1988. — 74 с.
9. Кутепов Д. В., Гордиенко М. В., Ребенок Е. В. Мониторинг сдвижений и деформаций над затопленными участками горных работ // Журн. теор. и прикл. механики. — 2020. — № 3 (72). — С. 65–71.
10. Спиридонов В. П., Бирюков Г. Н. Мониторинг деформаций земной поверхности, зданий и сооружений спутниковыми системами // Маркшейдерия и недропользование. — 2007. — № 1 (27). — С. 46–53.
11. Тагильцев С. Н., Панжин А. А. Геомеханические закономерности горизонтальных и вертикальных деформаций массива горных пород в районе Качканарского железорудного месторождения // ГИАБ. — 2020. — № 3-1. — С. 235–245.
12. Pakshyn M., Liaska I., Kablak N., and Yaremko H. Investigation of the mining departments influence of Solotvynsky salt mine SE on the Earth surface, buildings and constructions using satelite radar monitoring, Geodynamics, 2021, No. 2. — P. 41–52.
13. Буш В., Хебель Х.-П., Шаффер М., Вальтер Д., Барях А. А. Контроль оседаний подработанных территорий методами радарной интерферометрии // Маркшейдерия и недропользование. — 2009. — № 2 (40). — С. 38–43.
14. Мозер Д. В., Туякбай А. С., Толеубекова Ж. З. О состоянии подработанных территорий Карагандинского угольного бассейна по данным космического мониторинга // ФТПРПИ. — 2017. — № 2. — С. 170–176.

15. **Коряков А. Е., Копылов А. Б., Савин И. И.** Применение метода конечных элементов при моделировании сдвижения элементов горного массива // Изв. ТулГУ. Науки о Земле. — 2017. — Вып. 4. — С. 344–354.
16. **Кутепов Ю. Ю., Боргер Е. Б.** Численное моделирование процесса сдвижения породных массивов применительно к горно-геологическим условиям шахты имени Рубана в Кузбассе // ГИАБ. — 2017. — № 5. — С. 66–75.
17. **Jiránková E., Waclawik P., and Nemcik J.** Assessment of models to predict surface subsidence in the Czech part of the Upper Silesian Coal Basin — Case study, *Acta Geodyn. Geomat.*, 2020, Vol. 17, No. 4 (200). — P. 469–484.
18. **Hou Z., Yang K., Li Y. et al.** Dynamic prediction model of mining subsidence combined with D-InSAR technical parameter inversion, *Environ. Earth Sci.*, 2022, Vol. 81 (11), No. 307.
19. **Huang G., Kulatilake P. H. S. W., Shreedharan S., Cai S., and Song H.** 3-D discontinuum numerical EFRENCES of subsidence incorporating ore extraction and backfilling operations in an underground iron mine in China, *Int. J. Min. Sci. Technol.*, 2017, Vol. 27, No. 2. — P. 191–201.
20. **Корецкая Е. Г.** Моделирование оседаний земной поверхности в условиях подработки лавой № 35 вост. пл. h₈ шахты им. М. В. Фрунзе // Сб. науч. тр. ДонГТУ. — 2018. — № 12 (55). — С. 23–29.
21. **Bräuner G.** Subsidence due to underground mining. No. 8571-8572. US Department of the Interior, Bureau of Mines, 1973.
22. **Strzalkowski P. and Szafulera K.** Occurrence of linear discontinuous deformations in Upper Silesia (Poland) in conditions of intensive mining extraction — Case study, *Energies*, 2020, Vol. 13 (8). — P. 1897. <https://doi.org/10.3390/en13081897>.
23. **Florkowska L., Bryt-Nitarska I., and Kruczkowski J.** Deformation and damage to buildings caused by ground movements in mining areas (case study), *Inżynieria Bezpieczeństwa Obiektów Antropogenicznych*, 2021, No. 4, P. 52–63.
24. **Указания (мероприятия) по защите рудников ПАО “Уралкалий” от затопления и охране объектов на земной поверхности от вредного влияния подземных разработок на Верхнекамском месторождении солей. Ч. 1. Основные положения.** — Пермь–Березники, 2022.
25. **Барях А. А., Самоделкина Н. А.** Разрушение водоупорных толщ при крупномасштабных горных работах. Ч. II. // ФТПРПИ. — 2012. — № 6. — С. 12–20.
26. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.
27. **Барях А. А., Самоделкина Н. А.** Об одном критерии прочности горных пород // Чебышевский сб. — 2017. — Т. 18. — № 3 (63). — С. 72–87.
28. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., and Fox D.** The finite element method for solid and structural mechanics (seventh edition), Butterworth-Heinemann, 2014. — 672 p.
29. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 271 с.
30. **Барях А. А., Асанов В. А., Паньков И. Л.** Физико-механические свойства соляных пород Верхнекамского калийного месторождения. — Пермь: ПГНИУ, 2008. — 199 с.

Поступила в редакцию 08/IV 2024

После доработки 22/IV 2024

Принята к публикации 17/V 2024