УДК 551.465

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОСЫХ ИЗГИБНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ СТУПЕНЧАТОГО ДНА

С. Пол, С. Де*

Технический колледж, 713206 Дургапур, Индия
* Университет Калькутты, 700009 Калькутта, Индия
E-mails: sandippaulmac@gmail.com, soumenisi@gmail.com

Предложена линеаризованная модель задачи о рассеянии изгибных гравитационных волн над ступенчатым океанским дном. Для решения краевой задачи используется метод разложения решения по собственным функциям. Решение задачи сведено к решению интегральных уравнений. Построены кривые зависимости коэффициентов отражения и прохождения от волнового числа при различных значениях параметров задачи. Точность вычислений подтверждается выполнением энергетического тождества. Проведено сравнение полученных результатов с известными данными.

Ключевые слова: ступенчатое дно, изгибные гравитационные волны, обобщенные собственные функции, разложение Галеркина, интегральные уравнения, коэффициенты отражения и прохождения.

DOI: 10.15372/PMTF20220203

Введение. Задачи о рассеянии изгибных гравитационных волн над неровным океанским дном являются классическими задачами волновой гидродинамики. Одна из таких задач — задача о распространении волн над ступенчатым дном [1–4]. В работе [1] с использованием приближения мелкой воды получено решение этой задачи в результате предельного перехода в решении задачи в приближении длинных волн. С помощью длинноволнового приближения в [2] построено интегральное уравнение для задачи о движении слоя жидкости произвольной толщины. В работе [3] с использованием разложения решения по собственным функциям изучено отражение и прохождение волн малой амплитуды над дном с бесконечным числом ступенек. С помощью вариационного принципа в [4] решена задача о дифракции косых гравитационных волн на ступеньке. Аналогичный подход применялся в работе [5] при решении задачи о распространении вертикальной ступенчатой волны. Задача сведена к двум интегральным уравнениям, которые решены методом Галеркина с использованием ортогональных ультрасферических многочленов Гегенбауэра. В [6] получены решения интегрального уравнения первого и второго порядков в задаче о распространении волн над ступенькой. Задача о рассеянии волн конструкцией, плавающей над ступенчатым дном, изучена в работе [7]. В [8] исследована задача о рассеянии волн над неровным дном вблизи жесткого дока. Во всех указанных выше работах толщина слоя жидкости полагается постоянной и различной по обе стороны от ступеньки. С использованием приближения мелкой воды в работе [9] изучено распространение волны над дном с одной ступенькой. Решение задачи при наличии одной ступеньки далее используется для решения задачи при наличии нескольких ступенек. В работе [9] не учитываются особенности течения вблизи угла прямоугольных ступенек. Задача о рассеянии волн над дном, представляющим собой два горизонтальных участка, соединенных неровным участком, решена в [10] вариационным методом.

В ряде работ исследуется задача о рассеянии волн, распространяющихся над препятствием под плавающей упругой пластиной. При решении многих практических задач препятствие рассматривается как тонкая упругая пластина (искусственные большие плавучие платформы, плавающие волнорезы, плавучий док, плавающий ледяной покров и пр.). В работе [11] изучена задача о падении косых волн малой амплитуды на упругую пластину, плавающую на свободной поверхности жидкости. В [12] методом Винера — Хопфа решена задача о дифракции поверхностных волн на плавающей полубесконечной пластине. С использованием линейной теории мелкой воды в [13] решена задача о рассеянии волн на плите произвольной формы, плавающей на мелководье. С помощью модели тонкой упругой пластины в работе [14] изучены характеристики отражения и прохождения волн, нормально падающих на край берегового припая морского льда. В [15] методом сопряженных градиентов решена задача о распространении косой волны. В [16] изучена задача о рассеянии длинных волн на горизонтальном круглом цилиндре, находящемся в глубокой воде под тонким ледяным покровом, моделируемым тонкой упругой пластиной, а также проанализированы аппроксимации коэффициентов отражения и прохождения первого и второго порядков. Модель ледяного покрова рассматривается в работах [17–19].

В данной работе исследуется распространение волн над конечным числом прямоугольных ступенек. Поверхность жидкости ограничена тонким бесконечным ледяным покровом. Для сведения задачи к системе сингулярных интегральных уравнений используется метод обобщенных собственных функций, для решения интегральных уравнений — метод Галеркина с соответствующими базисными функциями (см. [5, 20]).

1. Математическая формулировка задачи. Рассматривается однородная жидкость с постоянной плотностью ρ_w. Предположим, что ледяной покров с плотностью ρ_i и толщиной d_i плавает на всей поверхности жидкости. Выбирается декартова система координат (x, y, z), в которой ось y направлена вертикально вниз, а плоскость $y = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью жидкости. Предполагается, что неровность дна представляет собой s ступенек (рис. 1). Область, занимаемая жидкостью, делится на $s+1$ подобластей Ω_q:

$$\Omega_q = \{(x, y, z)\colon \quad x_q < x \leqslant x_{q+1}, \quad 0 \leqslant y \leqslant h_q, \quad -\infty < z < \infty\}, \qquad q = 0, 1, \ldots, s,$$

где $x_0 = -\infty$; $x_{s+1} = \infty$.

Предположим, что волна падает на ступеньку $x = x_1$ из отрицательной бесконечности под углом $\theta \in [0, \pi/2]$ к оси x. В линейной теории гармоническое движение с частотой $\sigma/(2\pi)$ описывается потенциалом скорости $\Phi(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\varphi(x, y)\,\mathrm{e}^{i\mu z - i\sigma t}]$, где функция $\varphi(x, y)$ в области, занятой жидкостью, удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\varphi = \mu^2\varphi. \qquad (1)$$

Эффективная изгибная жесткость ледяного покрова вычисляется по формуле

$$\mu = \frac{Ed_i^3}{12(1-\nu^2)},$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Если толщина ледяного покрова d_i мала по сравнению с толщиной слоя жидкости h_q ($q = 0, 1, \ldots, s$), то его можно моделировать тонкой упругой пластиной. В этом случае граничное условие на поверхности жидкости имеет вид

$$\{D(\partial_x^2 - \mu^2)^2 + 1 - \delta\}\varphi_y + K\varphi = 0, \qquad y = 0, \qquad (2)$$

где $\delta = (\rho_i d_i/\rho_w)K$; $D = \mu/(\rho_w g)$; $K = \sigma^2/g$; g — ускорение свободного падения.

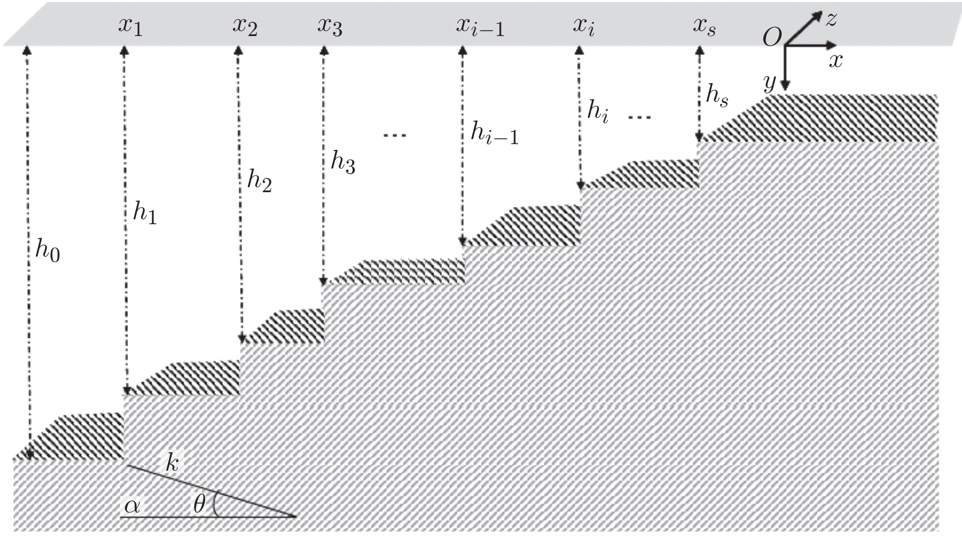

Рис. 1. Схема задачи

В областях Ω_q $(q = 0, 1, \ldots, s)$ потенциал $\varphi(x, y)$ при $y = h_q$ удовлетворяет условию

$$\varphi_y = 0 \quad \text{при} \quad x_q < x < x_{q+1}, \quad q = 0, 1, \ldots, s \tag{3}$$

и условию на стенке $x = x_q$:

$$\varphi_x = 0 \quad \text{при} \quad h_q < y \leqslant h_{q-1}, \quad q = 1, \ldots, s. \tag{4}$$

Кроме того, вблизи края каждой ступеньки в точках (x_q, h_q), $q = 1, 2, \ldots, s$ функция $\varphi(x, y)$ должна удовлетворять условию

$$r^{1/3}\, \nabla\varphi(x, y) \quad \text{ограничена при} \quad r \to 0, \tag{5}$$

где $r = \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2}$ — расстояние от рассматриваемой точки до края ступеньки.

1.1. *Построение собственных функций.* В каждой подобласти полное множество потенциалов можно построить методом разделения переменных. Эти потенциалы являются решениями уравнения (1) с краевыми условиями (2)–(4). В подобластях Ω_q $(q = 0, 1, \ldots, s)$ r-й потенциал может быть записан в виде

$$\exp\,\left(i\sqrt{k_{q,r}^2 - \mu^2}\; x\right) \psi_{q,r}(y), \qquad (x, y) \in (x_q, x_{q+1}) \times (0, h_q),$$

где $\psi_{q,r}(y)$ — собственная функция, зависящая от координаты y:

$$\psi_{q,r}(y) = \frac{\operatorname{ch} k_{q,r}(h_q - y)}{\operatorname{ch} k_{q,r} h_q},$$

$k_{q,r}$ — волновое число, удовлетворяющее дисперсионному уравнению

$$\Delta_q(u) \equiv (Du^4 + 1 - \delta)u \operatorname{tgh} u h_q - K = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_q. \tag{6}$$

Корни уравнения (6) представляют собой множества

$$\mathbb{S}_q = \{k \in \mathbb{C}\colon \quad \Delta_q(k) = 0, \quad -\pi/2 < \operatorname{Arg}(k) \leqslant \pi/2\},$$

в каждом из которых $\mathbb{S}_q$ $(q = 0, 1, 2, \ldots, s)$ содержится два вещественных корня $\pm k_{q,0}$ $(k_{q,0} > 0)$, пары комплексно-сопряженных корней $\pm k_{q,r}$ $(r = -2, -1)$ с положительной вещественной частью и бесконечное число чисто мнимых корней $\pm i k_{q,r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Вследствие наличия ледяного покрова функции $\psi_{q,r}$ не являются ортогональными. Для этих функций выполняются соотношения [21]

$$I_q(r_1,r_2)=\int\limits_0^{h_q}\psi_{q,r_1}(y)\psi_{q,r_2}(y)\,dy+\frac{D}{K}\,(k_{q,r_1}^2+k_{q,r_2}^2)\psi'_{q,r_1}(0)\psi'_{q,r_1}(0)=$$

$$=\begin{cases} C_{q,r}, & r_1=r_2=r,\\ 0, & r_1\ne r_2,\end{cases} \qquad (7)$$

где штрих обозначает производную первого порядка,

$$C_{q,r}=\frac{1}{2}\,\{h_q\operatorname{sech}^2 k_{q,r}h_q+K^{-1}(5Dk_{q,r}^4+1-\delta)\operatorname{th}^2k_{q,r}h_q\}.$$

1.2. *Общее выражение для функции* $\varphi(x,y)$. Для рассматриваемой задачи существенными являются моды $k_{q,r}$ ($r=-2,-1,0,\ldots$). Из бесконечного множества несущественных мод можно взять только конечное число M первых мод. Точное решение получается при $M=\infty$. Введем следующие обозначения:

$$\alpha_{q,r}=\begin{cases}\sqrt{k_{q,r}^2-\mu^2}\,, & r=-2,-1,0,\\[4pt] \sqrt{k_{q,r}^2+\mu^2}\,, & r=1,2,3,\ldots,M,\end{cases}$$

$$\psi_{q,r}(y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch}k_{q,r}(h_q-y)}{\operatorname{ch}k_{q,r}h_q}, & r=-2,-1,0,\\[8pt] \dfrac{\cos k_{q,r}(h_q-y)}{\cos k_{q,r}h_q}, & r=1,2,3,\ldots,M.\end{cases}$$

Функция $\varphi(x,y)$ представляется в виде конечной суммы собственных функций

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} e^{i\alpha_{0,0}x}\,\psi_{0,0}(y)+\sum\limits_{r=-2}^{M}R_{0,r}\,e^{-i\alpha_{0,r}(x-x_1)}\,\psi_{0,r}(y) & \text{в } \Omega_0,\\ \sum\limits_{r=-2}^{M}[R_{q,r}\cos\alpha_{q,r}(x-x_q)+T_{q,r}\sin\alpha_{q,r}(x_{q+1}-x)]\psi_{q,r}(y) & \text{в } \Omega_q,\ q\ne 0,s,\\ \sum\limits_{r=-2}^{M}T_{s,r}\,e^{i\alpha_{s,r}(x-x_s)}\,\psi_{s,r}(y) & \text{в } \Omega_s,\end{cases} \qquad (8)$$

где $R_{q,r}$, $T_{q,r}$ — неизвестные коэффициенты отражения и прохождения, соответствующие r-му волновому числу в подобласти Ω_q.

2. Решение задачи. Неизвестные коэффициенты в соотношении (8), число которых равно $2s(M+3)$, определяются из условий непрерывности давления и горизонтальной составляющей скорости при $x=x_q$ ($q=1,2,\ldots,s$):

$$\varphi(x_q-,y)=\varphi(x_q+,y),\qquad y\in(0,h_q);$$
$$\varphi_x(x_q-,y)=\varphi_x(x_q+,y),\qquad y\in(0,h_q). \qquad (9)$$

Предположим, что при $x=x_q$ неизвестная горизонтальная составляющая скорости как функция y определяется равенством

$$f_q(y)=\varphi_x(x_q-,y)=\varphi_x(x_q+,y),\qquad y\in(0,h_q),\quad q=1,2,\ldots,s. \qquad (10)$$

Следовательно,

$$\varphi_x(x_q-,y)=\begin{cases} f_q(y), & 0<y<h_q,\\ 0, & h_q<y<h_0.\end{cases}$$

Условия (5) в угловой точке ступеньки сводятся к следующим условиям:

$$f_q(y)\sim O(|h_q-y|^{-1/3}),\qquad q=1,2,\ldots,s. \tag{11}$$

Из соотношений (10) следуют $2s$ уравнений. Применяя к каждому из этих уравнений соотношение (7), определим $2s(M+3)$ неизвестных коэффициента:

$$R_{0,r}=\delta_{0r}\,\mathrm{e}^{i\alpha_{0,r}x_1}+i\,\frac{\langle f_1(y),\psi_{0,r}(y)\rangle}{\alpha_{0,r}C_{0,r}},$$

$$R_{q,r}=-\frac{\operatorname{cosec}\alpha_{q,r}l_q}{\alpha_{q,r}C_{q,rn}}\,[\langle f_{q+1}(y),\psi_{q,r}(y)\rangle-\sec\alpha_{q,r}l_q\langle f_q(y),\psi_{q,r}(y)\rangle],\quad q\neq 0,s, \tag{12}$$

$$T_{q,r}=-\frac{\sec\alpha_{q,r}l_q}{\alpha_{q,r}C_{q,r}}\,\langle f_q(y),\psi_{q,r}(y)\rangle,\qquad T_{s,r}=-\frac{i}{\alpha_{s,r}C_{s,r}}\,\langle f_s(y),\psi_{s,r}(y)\rangle.$$

Здесь δ_{qr} — дельта-функция Кронекера; $l_q=x_{q+1}-x_q$ ($q=1,2,\ldots,s-1$, $r=-2,-1,0,1,\ldots,M$). Внутренние произведения в равенстве (12) определяются следующим образом:

$$\langle f_q(y),\psi_{q,r}(y)\rangle=\int\limits_0^{h_q} f_q(y)\psi_{q,r}(y)\,dy\qquad\forall q,r.$$

Имея полный набор функций $f_q(y)$ ($q=1,2,\ldots,s$), нетрудно найти неизвестные коэффициенты.

2.1. *Построение интегральных уравнений.* Из условий (9) следуют интегральные уравнения

$$\sum_{q=1}^{s}\int\limits_0^{h_q} M_{pq}(y,u)f_q(u)\,du=\chi_p(y),\qquad y\in(0,h_p),\quad p=1,2,\ldots,s, \tag{13}$$

ядра которых являются вещественными величинами. Матрица M_{pq} симметрична, т. е. $M_{pq}(u,y)=M_{qp}(u,y)\ \ \forall p$ ($q=1,2,\ldots,s$), и определяется соотношениями

$$M_{pq}(u,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{r=-2}^{\infty}\{\mathcal{L}_{q-1,r}(u,y)+\mathcal{L}_{q,r}(u,y)\}, & p=q,\\ \displaystyle\sum_{r=-2}^{\infty}\mathcal{T}_{p,r}(u,y), & q=p+1,\\ 0, & q>p+1,\end{cases}$$

где

$$\mathcal{L}_{q,r}(u,y)=\begin{cases}0, & q=0,s,\quad r=0,\\ -\dfrac{i}{\alpha_{q,r}C_{q,r}}\,\psi_{q,r}(u)\psi_{q,r}(y), & q=0,s,\quad r\neq 0,\\ \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha_{q,r}l_q}{\alpha_{q,r}C_{q,r}}\,\psi_{q,r}(u)\psi_{q,r}(y), & q\neq 0,s,\end{cases}$$

$$\mathcal{T}_{q,r}(u,y) = -\frac{\operatorname{cosec}\alpha_{q,r}l_q}{\alpha_{q,r}C_{q,r}}\,\psi_{q,r}(u)\psi_{q,r}(y) \qquad \forall q,r,$$

$$\chi_1(y) = (\mathrm{e}^{i\alpha_{0,0}x_1} + R_{00})\psi_{0,0}(y),\ \chi_2(y) = \chi_3(y) = \ldots = \chi_{s-1}(y) = 0,\ \chi_s(y) = -T_{s,0}\psi_{s,0}(y).$$

Рассмотрим функции

$$f_q(y) = k_{0,0}C_{0,0}(\mathrm{e}^{i\alpha_{0,0}x_1} + R_{00})f_q^{(1)}(y) - k_{s,0}C_{s,0}T_{s,0}f_q^{(s)}(y), \qquad q = 1,2,\ldots,s. \tag{14}$$

Уравнения (13) сводятся к уравнениям

$$\sum_{q=1}^{s}\int\limits_0^{h_q} M_{pq}(y,u)f_q^{(j)}(u)\,du = \delta_{jp}\bar{\chi}_p(y), \qquad y \in (0,h_p), \quad p = 1,2,\ldots,s, \quad j = 1,s, \tag{15}$$

где

$$\bar{\chi}_1(y) = \frac{\psi_{0,0}(y)}{k_{0,0}C_{0,0}}, \qquad \bar{\chi}_s(y) = \frac{\psi_{s,0}(y)}{k_{s,0}C_{s,0}}, \qquad \bar{\chi}_p(y) = 0, \qquad p = 2,3,\ldots,s-1.$$

2.2. *Коэффициенты отражения и прохождения.* Поскольку рассматривается задача о рассеянии волн, функция $\varphi(x,y)$, удовлетворяющая уравнению (1), должна также удовлетворять некоторым условиям дальнего поля. Для падающей волны единичной амплитуды, угол падения которой относительно оси x равен θ ($0 \leqslant \theta < \pi/2$), условия дальнего поля имеют вид

$$\varphi(x,y) \sim \begin{cases} (\mathrm{e}^{i\alpha_{0,0}x} + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\,\mathrm{e}^{-i\alpha_{0,0}(x-x_1)})\psi_{0,0}(y), & x \to -\infty, \\ \mathcal{C}_{\mathcal{T}}\,\mathrm{e}^{i\alpha_{s,0}(x-x_s)}\,\psi_{s,0}(y), & x \to \infty, \end{cases}$$

где $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ — коэффициенты отражения и прохождения соответственно. С учетом (12) из уравнения (8) следует

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}} \equiv R_{0,0} = \mathrm{e}^{i\alpha_{0,0}x_1} + i\,\frac{\langle f_1(y),\psi_{0,0}(y)\rangle}{\alpha_{0,0}C_{0,0}}, \qquad \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \equiv T_{s,0} = -i\,\frac{\langle f_s(y),\psi_{s,0}(y)\rangle}{\alpha_{s,0}C_{s,0}}.$$

С учетом (14) получаем систему алгебраических уравнений

$$\Big(b_{01} + i\,\frac{\alpha_{0,0}}{k_{0,0}}\Big)\mathcal{C}_{\mathcal{R}} - i\,\frac{k_{s,0}C_{s,0}b_{02}}{k_{0,0}C_{0,0}}\,\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = -\Big(b_{01} - i\,\frac{\alpha_{0,0}}{k_{0,0}}\,\mathrm{e}^{i\alpha_{0,0}x_1}\Big) - b_{s1}\mathcal{C}_{\mathcal{R}} +$$
$$+ \frac{k_{s,0}C_{s,0}}{k_{0,0}C_{0,0}}\Big(b_{s2} + i\,\frac{\alpha_{s,0}}{k_{s,0}}\Big)\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \mathrm{e}^{i\alpha_{0,0}x_1}\,b_{s1},$$

где

$$b_{0j} = \langle f_1^{(j)}(y),\psi_{0,0}(y)\rangle, \qquad b_{sj} = \langle f_s^{(j)}(y),\psi_{s,0}(y)\rangle, \quad j = 1,s.$$

Для определения коэффициентов отражения и прохождения необходимо решить интегральные уравнения (15) относительно неизвестных функций $f_q^{(j)}(u)$. Вследствие наличия сингулярности в неизвестных функциях далее используется многочленное приближение Галеркина с соответствующим базисом функций.

2.3. *Определение неизвестных функций.* Пусть

$$f_q^{(j)} \approx \sum_{n_2=0}^{N} a_{qj}^{(n_2)}\tilde{f}_q^{(j)}(y), \qquad j = 1,s, \tag{16}$$

где $a_{qj}^{(n_2)}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению; $\tilde{f}_q^{(j)}$ — известные функции, которые должны быть выбраны в соответствии с данной задачей.

Базисную функцию, удовлетворяющую граничным условиям (11), можно записать через ультрасферические многочлены Гегенбауэра порядка 1/6 (т. е. $C_{2n_2}^{1/6}(\theta)$) с подходящими весами [5]. Из (15) с учетом (16) следует система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^{s}\sum_{n_2=0}^{N} M_{pq}^{(n_1n_2)}a_{qj}^{(n_2)} = \frac{\delta_{jp}d_j^{(n_1)}}{\alpha_{j,0}C_{j,0}}, \tag{17}$$
$$n_1 = 0,1,2,\ldots,N, \qquad p = 1,2,\ldots,s, \qquad j = \overline{1,s},$$

где

$$M_{pq}^{(n_1n_2)} = \begin{cases} \sum\limits_{r=-2}^{0}(L_{q-1,r}^{(n_1n_2)} + L_{q,r}^{(n_1n_2)}) - 4(-1)^{n_1+n_2}\sum\limits_{r=1}^{\infty}(L_{q-1,r}^{(n_1n_2)} + L_{q,r}^{(n_1n_2)}), & p = q, \\ \sum\limits_{r=-2}^{0}T_{p,r}^{(n_1n_2)} - 4(-1)^{n_1+n_2}\sum\limits_{r=1}^{\infty}T_{p,r}^{(n_1n_2)}, & q = p+1, \\ 0, & q > p+1, \end{cases}$$

$$L_{q,r}^{(n_1n_2)} = \begin{cases} -i\,\dfrac{I_{2n_1+1/6}(k_{q,r}h_q)I_{2n_2+1/6}(k_{q,r}h_q)}{\alpha_{q,r}C_{q,r}(k_{q,r}h_q)^{1/3}}, & q = 0,s, \quad r < 0, \\ 0, & q = 0,s, \quad r = 0, \\ -\frac{J_{2n_1+1/6}(k_{q,r}h_q)J_{2n_2+1/6}(k_{q,r}h_q)}{\alpha_{q,r}C_{q,r}(k_{q,r}h_q)^{1/3}}, & q = 0,s, \quad r > 0, \\ \dfrac{\operatorname{ctg}(\alpha_{q,r}l_q)I_{2n_1+1/6}(k_{q,r}h_q)I_{2n_2+1/6}(k_{q,r}h_q)}{\alpha_{q,r}C_{q,r}(k_{q,r}h_q)^{1/3}}, & q \neq 0,s, \quad r \leqslant 0, \\ -\dfrac{\operatorname{cth}(\alpha_{q,r}l_q)J_{2n_1+1/6}(k_{q,r}h_q)J_{2n_2+1/6}(k_{q,r}h_q)}{\alpha_{q,r}C_{q,r}(k_{q,r}h_q)^{1/3}}, & q \neq 0,s, \quad r > 0, \end{cases}$$

$$T_{p,r}^{(n_1n_2)} = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{cosec}(\alpha_{q,r}l_q)I_{2n_1+1/6}(k_{q,r}h_p)I_{2n_2+1/6}(k_{q,r}h_q)}{\alpha_{q,r}C_{q,r}(k_{q,r})^{1/3}(h_ph_q)^{1/6}}, & r \leqslant 0, \\ \dfrac{\operatorname{cosech}(\alpha_{q,r}l_q)J_{2n_1+1/6}(k_{q,r}h_p)J_{2n_2+1/6}(k_{q,r}h_q)}{\alpha_{q,r}C_{q,r}(k_{q,r})^{1/3}(h_ph_q)^{1/6}}, & r > 0, \end{cases}$$

$$d_j^{(n_1)} = \frac{I_{2n_1+1/6}(k_{j,0}h_j)}{(k_{j,0}h_j)^{1/6}}.$$

Алгебраическая система (17) может быть решена любым стандартным методом. В результате получаем

$$b_{0j} = \sum_{n_1=0}^{N} a_{1j}^{(n_1)}d_j^{(n_1)}, \qquad b_{sj} = \sum_{n_1=0}^{N} a_{sj}^{(n_1)}d_s^{(n_1)}, \quad j = \overline{1,s}.$$

3. Анализ результатов. Анализ выполнен при различных значениях безразмерных параметров: толщины ледяного покрова d_i/h_0, высоты ступенек h_q/h_0 ($q = 1,2,\ldots,s$), ширины ступенек l_q/h_0 и угла падения волны θ. Ниже приведены результаты, полученные при максимальном значении параметра s ($s = 4$), но настоящая модель применима при любом конечном значении $s \geqslant 1$. Исследуем сходимость приближения (16) для неизвестных функций $f_q^{(j)}$, $j = \overline{1,s}$. В табл. 1 приведены значения коэффициента отражения при наличии

Таблица 1

Значения коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$
при $d_i/h_0 = 0{,}002$, $l_q/h_0 = 0{,}2$, $h_1/h_0 = 0{,}4$, $h_2/h_0 = 0{,}3$, $h_3/h_0 = 0{,}1$, $M = 10$, $\theta = 30°$

k_0h_0	$\lvert\mathcal{C}_\mathcal{R}\rvert$				
	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
0,155	0,465 683	0,465 023	0,465 011	0,465 012	0,465 013
0,925	0,327 323	0,314 991	0,314 813	0,314 865	0,314 923
2,157	0,114 904	0,097 962	0,097 837	0,097 897	0,097 971
3,697	0,140 943	0,138 337	0,138 163	0,138 053	0,138 030
4,313	0,164 485	0,170 878	0,170 779	0,170 649	0,170 618
4,929	0,187 978	0,201 361	0,201 276	0,201 129	0,201 096
5,699	0,221 952	0,238 953	0,238 699	0,238 509	0,238 474

Таблица 2

Значения величин $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$, $|\mathcal{C}_\mathcal{T}|$, $|J|$
при $d_i/h_0 = 0{,}002$, $l_q/h_0 = 0{,}2$, $h_1/h_0 = 0{,}4$, $h_2/h_0 = 0{,}3$, $h_3/h_0 = 0{,}1$, $\theta = 30°$

k_0h_0	$\lvert\mathcal{C}_\mathcal{R}\rvert$	$\lvert\mathcal{C}_\mathcal{T}\rvert$	$\lvert J\rvert$	$\lvert\mathcal{C}_\mathcal{R}\rvert^2 + \lvert J\rvert\,\lvert\mathcal{C}_\mathcal{T}\rvert^2$
0,001	0,469 988	1,469 990	0,360 555	1,0000
0,771	0,356 512	1,377 340	0,460 129	1,0000
0,233	0,232 650	1,237 980	0,617 168	1,0000
0,849	0,121 189	1,055 410	0,884 565	1,0000
0,619	0,093 041	0,926 470	1,154 950	1,0000
0,235	0,114 553	0,887 364	1,253 310	1,0000
0,313	0,170 618	0,894 519	1,213 360	1,0000
0,929	0,201 096	0,919 287	1,135 460	1,0000
0,853	0,247 459	0,952 901	1,025 230	1,0000

трех ступенек. При $N = 4$ результаты точны до четырех знаков после запятой. Ниже рассматриваются результаты, полученные при $M = 10$.

Далее волновые числа $k_{q,0}$ обозначаются через k_q ($q = 0, 1, \ldots, s$).

Коэффициенты отражения и прохождения удовлетворяют соотношению энергетического баланса

$$|\mathcal{C}_\mathcal{R}|^2 + J|\mathcal{C}_\mathcal{T}|^2 = 1, \qquad J = \frac{\alpha_{s,0}C_{s,0}}{\alpha_{0,0}C_{0,0}}. \tag{18}$$

Выполнение равенства (18) было проверено для случая трех ступенек (табл. 2).

На рис. 2 приведена зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 падающей волны. Очевидно, что количество ступенек оказывает влияние на коэффициент отражения. С увеличением количества прямоугольных ступенек амплитуда высших волновых мод уменьшается. Зависимость коэффициента прохождения $|\mathcal{C}_\mathcal{T}|$ от волнового числа можно определить с использованием энергетического тождества, поэтому в данной работе она не приводится. На рис. 3 представлена зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 падающей волны при наличии трех ступенек и различной толщине ледяного покрова. В расчете толщина слоя жидкости принята равной $h_0 = 500$ м, толщина льда — $d_i = 0$, 1,0; 1,5 м. Незначительное изменение толщины льда оказывает существенное влияние на движение волны. При распространении волны с большой скоростью (соответствующей малому значению k_0h_0) коэффициент отражения уменьшается с увеличением толщины льда. Если скорость волны

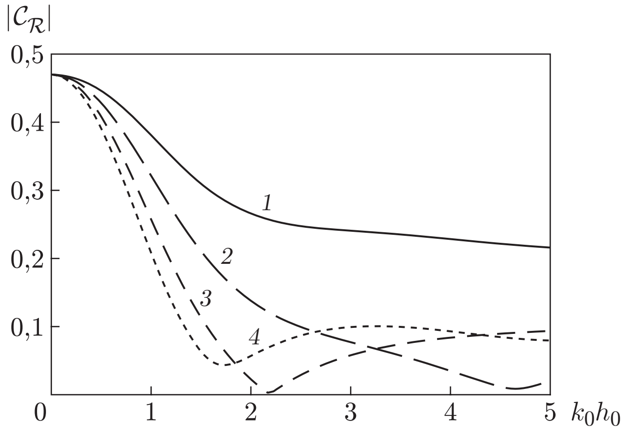

Рис. 2

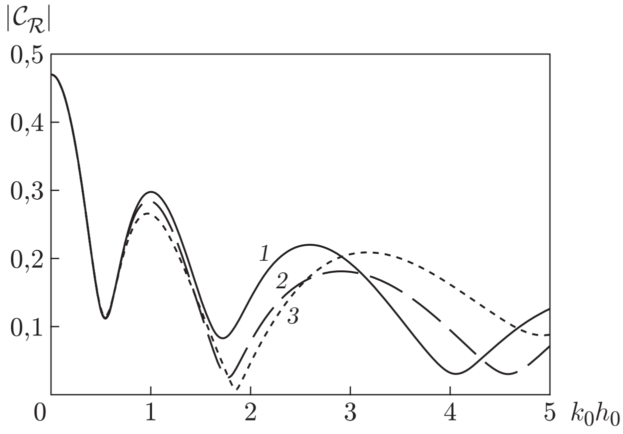

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 при $d_i/h_0 = 0{,}002$, $l_q/h_0 = 0{,}2$, $\theta = 30°$ и различных значениях параметра s:
1 — $s = 1$, *2* — $s = 2$, *3* — $s = 3$, *4* — $s = 4$

Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 при $l_1/h_0 = 0{,}5$, $l_2/h_0 = 1$, $\theta = 30°$, $s = 3$ и различных значениях толщины ледяного покрова d_i/h_0:
1 — $d_i/h_0 = 0$, *2* — $d_i/h_0 = 0{,}002$, *3* — $d_i/h_0 = 0{,}003$

достаточно мала (соответствует большим значениям k_0h_0), имеет место обратная зависимость. Аналогичные зависимости приведены в работе [16].

На рис. 4 приведена зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 падающей волны при $h_0 = 500$, 1000, 2000 м. Видно, что с увеличением значения h_0 коэффициент отражения увеличивается. На рис. 5 представлена зависимость величины $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 падающей волны при значениях ширины ступенек $l_q = 100$, 250, 500 м, $q = 1, 2, 3$. С увеличением ширины ступенек увеличиваются осцилляции коэффициента отражения. Более того, при $k_0h_0 \approx 2$ наблюдается резонанс отраженной волны.

На рис. 6 показана зависимость величины $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от угла падения волны θ при различных значениях угловой частоты. Видно, что с увеличением угловой частоты коэффициент отражения уменьшается и в интервале $54° < \theta < 75°$ обращается в нуль. Угол θ, при котором коэффициент отражения обращается в нуль, уменьшается при увеличении угловой частоты.

На рис. 7 приведены зависимости величин $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ и $|\mathcal{C}_\mathcal{T}|$ от безразмерного волнового числа k_1h_1 при $d_i/h_1 = 0$, $h_0/h_1 = 10$, $\theta = 0°$ в случае одной ступеньки. Эти зависимости качественно согласуются с зависимостями, приведенными на рис. 2 в работе [6]. На рис. 8 представлена зависимость величины $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 падающей волны при $d_i/h_0 = 0$, $h_1/h_0 = 0{,}25$, $\theta = 0°$. Кривые этих зависимостей совпадают с кривыми, приведенными на рис. 4 в работе [10]. На рис. 9 показаны зависимости величин $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ и $|\mathcal{C}_\mathcal{T}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 при наличии одной ступеньки и тонкого ледяного покрова толщиной 1 м над слоем жидкости толщиной 500 м. Кривые этих зависимостей аналогичны кривым, приведенным на рис. 5 в работе [9].

Заключение. В работе предложен полуаналитический метод решения задачи о рассеянии волн малой амплитуды по океанскому дну при наличии на нем ступенек. Жид-

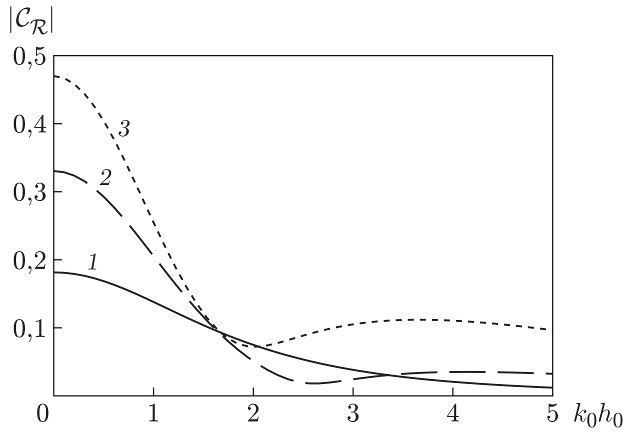

Рис. 4

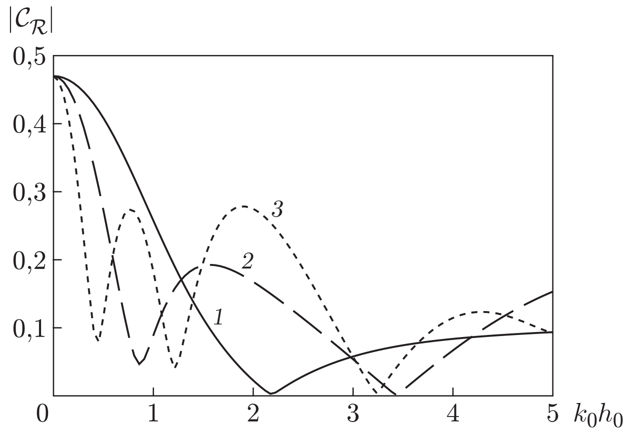

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 при $l_q/h_0 = 0{,}2$, $\theta = 30^\circ$, $s = 3$:
1 — $h_1/h_0 = 0{,}8$, $h_2/h_0 = 0{,}6$, $h_3/h_0 = 0{,}4$, $d_i/h_0 = 0{,}002$; *2* — $h_1/h_0 = 0{,}4$, $h_2/h_0 = 0{,}3$, $h_3/h_0 = 0{,}2$, $d_i/h_0 = 0{,}001$; *3* — $h_1/h_0 = 0{,}2$, $h_2/h_0 = 0{,}15$, $h_3/h_0 = 0{,}1$, $d_i/h_0 = 0{,}0005$

Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 при $d_i/h_0 = 0{,}002$, $h_1/h_0 = 0{,}3$, $h_2/h_0 = 0{,}2$, $h_3/h_0 = 0{,}1$, $\theta = 30^\circ$:
1 — $l_q/h_0 = 0{,}2$, *2* — $l_q/h_0 = 0{,}5$, *3* — $l_q/h_0 = 1{,}0$

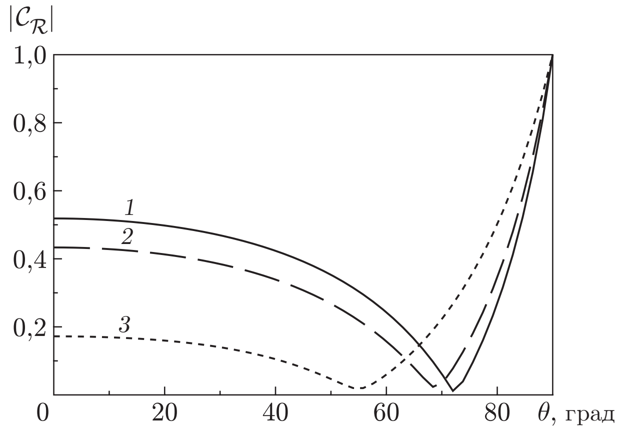

Рис. 6

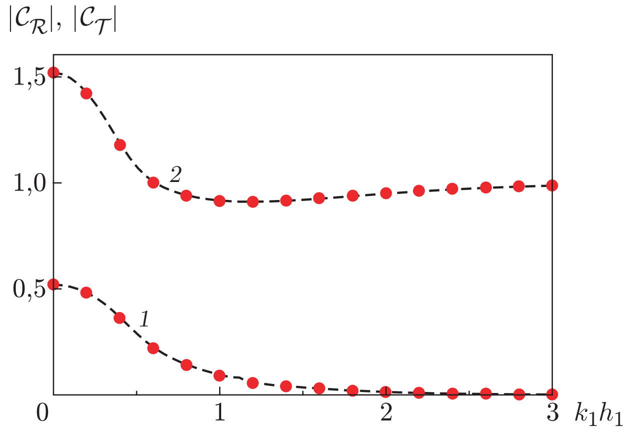

Рис. 7

Рис. 6. Зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ от угла падения волны θ при $d_i/h_0 = 0{,}002$, $l_q/h_0 = 0{,}2$, $h_1/h_0 = 0{,}4$, $h_2/h_0 = 0{,}3$, $h_3/h_0 = 0{,}1$:
1 — $\omega = 0{,}02\pi$, *2* — $\omega = 0{,}2\pi$, *3* — $\omega = 0{,}4\pi$

Рис. 7. Зависимости коэффициентов отражения $|\mathcal{C}_\mathcal{R}|$ (*1*) и прохождения $|\mathcal{C}_\mathcal{T}|$ (*2*) от безразмерного волнового числа k_1h_1 при $d_i/h_0 = 0$, $h_0/h_1 = 10$, $\theta = 0^\circ$:
линии — результаты расчета, полученные с использованием предлагаемого метода, точки — результаты расчета, полученные в работе [6]

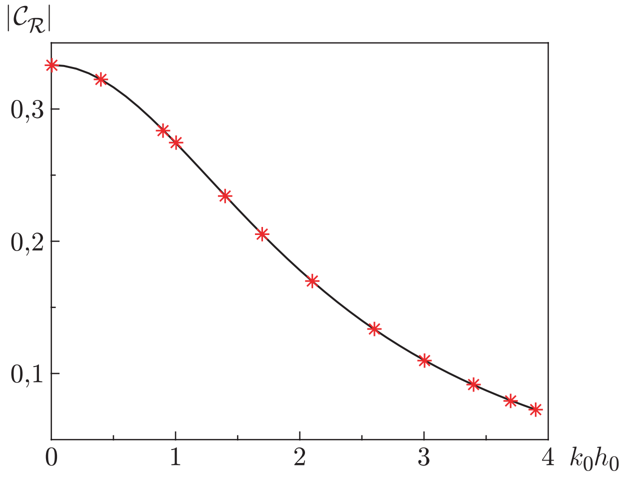

Рис. 8

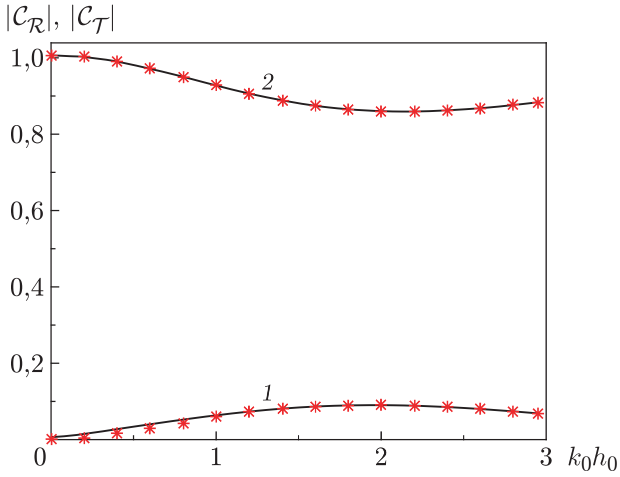

Рис. 9

Рис. 8. Зависимость коэффициента отражения $|\mathcal{C}_{\mathcal{R}}|$ от безразмерного волнового числа k_0h_0 при $d_i/h_0 = 0$, $h_1/h_0 = 0{,}25$, $\theta = 0°$:
линия — результаты расчета, полученные с использованием предлагаемого метода, точки — результаты расчета, полученные в работе [10]

Рис. 9. Зависимости коэффициентов отражения $|\mathcal{C}_{\mathcal{R}}|$ (*1*) и прохождения $|\mathcal{C}_{\mathcal{T}}|$ (*2*) от безразмерного волнового числа k_0h_0 при $d_i/h_0 = 0{,}002$, $h_1/h_0 = 0{,}5$, $\theta = 54°$:
линии — результаты расчета, полученные с использованием предлагаемого метода, точки — результаты расчета, полученные в работе [9]

кость ограничена сверху тонким ледяным покровом равномерной толщины. Область, занятая жидкостью, делится на конечное число подобластей, в которых слой жидкости имеет равномерную толщину. В каждой подобласти вычисляются потенциалы скорости. С использованием метода сопряжения собственных функций краевая задача сведена к системе интегральных уравнений. Краевые условия используются для определения коэффициентов в аппроксимациях Галеркина искомых функций. Приведены зависимости коэффициентов отражения и прохождения от волнового числа при различных значениях безразмерных параметров задачи.

Установлено, что при увеличении числа ступенек осцилляции коэффициентов отражения увеличиваются, а при увеличении волнового числа — уменьшаются. При наличии нескольких широких ступенек возможно возникновение резонанса Брэгга. Изменение толщины льда оказывает существенное влияние на изгибные гравитационные волны. Угол падения волны оказывает значительное влияние на отраженные волны. В интервале значений угла падения волны $54° < \theta < 75°$ коэффициент отражения обращается в нуль.

Предложенный метод может быть использован для решения исследованной задачи при наличии произвольного числа прямоугольных ступенек.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lamb H.** Hydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932.
2. **Bartholomeusz E. F.** The reflexion of long waves at a step // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1958. V. 54. P. 106–118.
3. **Newman J. N.** Propagation of water waves over an infinite step // J. Fluid Mech. 1965. V. 23. P. 399–415.

4. **Miles J. W.** Surface-wave scattering matrix for a shelf // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. P. 755–767.
5. **Porter R.** Complementary methods and bounds in linear water waves: PhD thesis. Bristol: Univ. of Bristol, 1995.
6. **Rhee J. P.** On the transmission of water waves over a shelf // Appl. Ocean Res. 1997. V. 19. P. 161–169.
7. **Bhattacharjee J., Soares C. G.** Oblique wave interaction with a floating structure near a wall with stepped bottom // Ocean Engng. 2011. V. 38. P. 1528–1544.
8. **Dhillon H., Banerjea S., Mandal B. N.** Water wave scattering by a finite dock over a step-type bottom topography // Ocean Engng. 2016. V. 113. P. 1–10.
9. **Karmakar D., Bhattacharjee J., Sahoo T.** Oblique flexural gravity-wave scattering due to changes in bottom topography // J. Engng Math. 2010. V. 66. P. 325–341.
10. **Porter R., Porter D.** Water wave scattering by a step of arbitrary profile // J. Fluid Mech. 2000. V. 411. P. 131–164.
11. **Sturova I. V.** Oblique incidence of surface waves on an elastic plate // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1999. V. 40, N 4. P. 604–610.
12. **Tkacheva L. A.** Surface wave diffraction on a floating elastic plate // Fluid Dynamics. 2001. V. 36. P. 776–789.
13. **Sturova I. V.** The diffraction of surface waves by an elastic platform floating on shallow water // J. Appl. Math. Mech. 2001. V. 65. P. 109–117.
14. **Fox C., Squire V. A.** Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95. P. 11629–11639.
15. **Fox C., Squire V. A.** On the oblique reflection and transmission of ocean waves at shore fast sea ice // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 347. P. 185–218.
16. **Das D., Mandal B. N.** Oblique wave scattering by a circular cylinder submerged beneath an ice-cover // Intern. J. Engng Sci. 2006. V. 44. P. 166–179.
17. **Sturova I. V.** Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 373–395.
18. **Tkacheva L. A.** Behavior of a semi-infinite ice cover under a uniformly moving load // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2018. V. 59, N 2. P. 258–272.
19. **Paul S., Sasmal A., De S.** Oblique wave scattering by a symmetric trench submerged beneath an ice cover // J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Engng. 2020. V. 146. 04019030.
20. **Paul S., Sasmal A., De S.** Interaction of oblique waves with an ice sheet over an asymmetric trench // Ocean Engng. 2019. V. 193. 106613.
21. **Lawrie J. B., Abrahams I. D.** An orthogonality relation for a class of problems with higher order boundary conditions: Applications in sound-structure interaction // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1999. V. 52. P. 161–181.

Поступила в редакцию 18/XII 2020 г.,
после доработки — 22/I 2021 г.
Принята к публикации 1/III 2021 г.