с однократным или неоднократным переходом через напряжение σ_0 приводит к одностороннему отклонению ($1 < A < 2$) от принципа линейного суммирования парциальных времен.

Заметим, что если условие разрушения (4) заменить на

$$\min(\omega, \Omega) = 1, \tag{12}$$

то с помощью модели (3), (12) можно описать отклонения от условия (2) в сторону $A < 1$.

Поступила 10 II 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Robinson E. L.** Effect of temperature variation on the creep strength of steels.— Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1938, vol. 60, p. 253.
2. **Одинг И. А., Бурдукский В. В.** Влияние переменного силового режима на длительную прочность стали.— В сб.: Исследования по жаропрочным сплавам. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
3. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ О НАБЕГАНИИ ВОЛН НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ШТАМП

В. А. Бабешко, Ж. Ф. Зинченко, А. В. Смирнова

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о движении жесткого массивного круглого штампа с плоским основанием под действием набегающей волны нормальных давлений. Штамп предполагается контактирующим без трения с упругой средой. Считается, что волна давлений является плоской и приходит из бесконечности. Путем снятия нормальных давлений с поверхности среды решением краевой задачи при отсутствии штампа (несмешанная задача) исходная краевая задача сводится к следующей смешанной: по экранированной от нормального давления поверхности среды бежит волна, которая взаимодействует со штампом. Добавив к решению этой смешанной задачи решение, отвечающее несмешанной, получим решение исходной задачи. Учитывая, что решение несмешанной задачи с помощью интегралов Фурье и Лапласа не представляет труда, в работе основное внимание уделено отмеченной смешанной задаче с экранированной вне штампа поверхностью.

1. Изучается задача о взаимодействии с упругой слоистой средой жесткого штампа массы m, занимающего круговую в плане область Ω радиуса a. Предполагается, что контакт осуществляется без трения, а на штамп действует равномерно движущийся импульс нормального давления $p(x, y, t)$. Требуется найти нормальную составляющую контактных напряжений $q(x, y, t)$, вертикальное смещение центра штампа $\delta(t)$, а также углы его поворота относительно горизонтальных осей $\omega(t)$ и $\theta(t)$; $q(x, y, t)$ определяем, решив динамические уравнения Ламэ

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{U} - \rho \partial^2 \mathbf{U}/\partial t^2 = 0$$

с граничными условиями смешанного типа и начальными условиями. В частности, в случае нестационарного воздействия штампа на упругое однородное полупространство ($z \leqslant 0$) граничные условия имеют вид

$$\tau_{xz}(x, y, 0, t) = \tau_{yz}(x, y, 0, t) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty,$$
$$w(x, y, 0, t) = f(x, y, t), \quad x, y \in \Omega,$$
$$\sigma_{zz}(x, y, 0, t) = 0, \quad x, y \notin \Omega,$$

при $z \to -\infty$ $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t) \to 0$, где $f(x, y, t)$ — перемещение точки жесткого штампа с плоским основанием, имеющей координаты $(x, y, 0)$. В декартовой системе координат, начало которой совмещено с центром штампа, а положительное направление оси Oz совпадает с направлением внешней нормали к поверхности среды, $f(x, y, t)$ описывается следующей формулой:

$$f(x, y, t) = \delta(t) + \omega(t)y - \theta(t)x.$$

Начальные условия предполагаются нулевыми, т. е.

$$u(x, y, z, 0) = v(x, y, z, 0) = w(x, y, z, 0) = 0,$$
$$u_t'(x, y, z, 0) = v_t'(x, y, z, 0) = w_t'(x, y, z, 0) = 0.$$

Применением преобразования Фурье по координатам и Лапласа по времени указанная задача сводится к решению интегрального уравнения, зависящего от параметра преобразования Лапласа s:

$$\frac{1}{4\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\alpha, \beta, s)\, e^{-i(\alpha x+\beta y)} d\alpha d\beta \iint_{\Omega} \bar{q}(\xi, \eta, s)\, e^{i(\alpha\xi+\beta\eta)} d\xi d\eta = \bar{f}(x, y, s). \tag{1.1}$$

Здесь $\bar{q}(\xi, \eta, s)$ — преобразование Лапласа по времени от контактных давлений $q(\xi, \eta, t)$; $\bar{f}(x, y, s)$ — преобразованный по Лапласу закон вертикального движения штампа $f(x, y, t)$. Отметим, что подынтегральная функция $K_0(\alpha, \beta, s)$ для различных типов слоистых сред имеет тот же вид, что и в соответствующих задачах об установившихся колебаниях [1] при замене частоты колебаний ω на is (i — мнимая единица). Переходя в (1.1) к полярным координатам и разлагая функции

$$F(r, \varphi, s) = \bar{f}[x(r, \varphi), y(r, \varphi), s], \quad Q(\rho, \gamma, s) = \bar{q}[\xi(\rho, \gamma), \eta(\rho, \gamma), s]$$

в ряды Фурье по φ и γ, получим уравнения для определения коэффициентов Фурье:

$$F(r, \varphi, s) = c_0(s) + c_1(s)re^{i\varphi} + c_{-1}(s)re^{-i\varphi}, \tag{1.2}$$

$$\int_0^a k(r, \rho, s)\, Q_n(\rho, s)\, \rho d\rho = F_n(r, s), \quad 0 \leqslant r \leqslant a,$$

$$k(r, \rho, s) = \int_0^{\infty} K(u, s)\, I_n(ur)\, I_n(u\rho)\, u du, \quad n = -1, 0, 1,$$

где $F_{-1}(r, s) = c_{-1}(s)r$; $F_0(r, s) = c_0(s)$; $F_1(r, s) = c_1(s)r$; $c_0(s) \equiv \bar{\delta}(s)$; $c_1(s)$ и $c_{-1}(s)$ линейно связаны с углами поворота $\bar{\omega}(s)$ и $\bar{\theta}(s)$; $\bar{\delta}(s)$, $\bar{\omega}(s)$, $\bar{\theta}(s)$ — изображения по Лапласу от $\delta(t)$, $\omega(t)$, $\theta(t)$ соответственно. Функция $K(u, s)$ обладает свойствами, установленными в работе [2]. Решая уравнение (1.2) для фиксированных значений параметра s одним из хорошо развитых для его исследования методов [2], найдем

$$Q(r, \varphi, s) = \sum_{k=-1}^{1} c_k(s)\, Q_k(r, \varphi, s).$$

Далее, для решения задачи применим к уравнениям движения штампа преобразование Лапласа по времени при нулевых начальных условиях и осуществим переход к полярным координатам:

$$ms^2\bar{\delta}(s) = \iint_{\Omega} Q(r, \varphi, s)\, r dr d\varphi - \iint_{\Omega} P(r, \varphi, s)\, r dr d\varphi, \tag{1.3}$$

$$I_1 s^2 \bar{w}(s) = \iint_{\Omega} Q(r, \varphi, s)\, r^2 \sin\varphi dr d\varphi - \iint_{\Omega} P(r, \varphi, s)\, r^2 \sin\varphi dr d\varphi,$$

$$I_2 s^2 \bar{\theta}(s) = -\iint_{\Omega} Q(r, \varphi, s)\, r^2 \cos\varphi dr d\varphi + \iint_{\Omega} P(r, \varphi, s)\, r^2 \cos\varphi dr d\varphi,$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции штампа относительно горизонтальных осей; $P(r, \varphi, s)$ — преобразованный по Лапласу закон изменения внешнего воздействия на штамп $p(x, y, t)$ в полярных координатах. Подставляя в (1.3) найденные выражения для $Q(r, \varphi, s)$, получаем систему алгебраических уравнений, из которых полностью определяются постоянные $c_k(s)$:

$$ms^2c_0(s) = \sum_{k=-1}^{1} c_k(s) \iint_{\Omega} Q_k(r, \varphi, s)\, rdrd\varphi - \iint_{\Omega} P(r, \varphi, s)\, rdrd\varphi, \tag{1.4}$$

$$I_1 s^2 \sum_{m=1}^{2} \lambda_{1m} c_k(s) = \sum_{k=-1}^{1} c_k(s) \iint_{\Omega} Q_k(r, \varphi, s)\, r^2 \sin\varphi\, drd\varphi - M_{1p}(s),$$

$$I_2 s^2 \sum_{m=1}^{2} \lambda_{2m} c_k(s) = \sum_{k=-1}^{1} c_k(s) \iint_{\Omega} Q_k(r, \varphi, s)\, r^2 \cos\varphi\, drd\varphi - M_{2p}(s).$$

Здесь стоящие в левой части суммы — углы поворота штампа относительно осей x и y в преобразовании Лапласа; $M_{np}(s)$ — момент внешней силы относительно оси x $(n = 1)$ или y $(n = 2)$. Построив обращение преобразования Лапласа от $\overline{\delta}(s)$, $\overline{\omega}(s)$ и $\overline{\theta}(s)$, получим решение поставленной задачи.

2. В качестве примера рассмотрим задачу о движении круглого в плане жесткого штампа на упругом полупространстве $(z \leqslant 0)$ в случае действия на него плоской набегающей волны:

$$p(y, t) = \begin{cases} 0, \ t \geqslant 2a/V, \\ Ae^{-\alpha(Vt-y-a)}[\alpha(Vt - y - a)]^n. \end{cases}$$

Уравнения (1.4) в этом случае приводятся к виду

$$ms^2c_0(s) - 2\pi \int_0^a c_0(s)\, Q_0(r, s)\, rdr - 2\pi \int_0^a P_0(r, s)\, rdr, \tag{2.1}$$

$$ma^2s^2ic_1(s) = -\frac{2\pi}{i} \int_0^a P_1(r, s)\, r^2dr + \frac{2\pi}{i} \int_0^a c_1(s)\, Q_1(r, s)\, r^2dr.$$

Функции $P_0(r, s)$ и $P_1(r, s)$ определяются на основании известных свойств преобразований Лапласа и Фурье и имеют вид

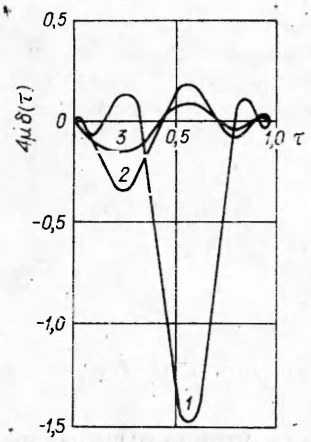
$$P_0(r, s) = k_1(s)J_0(irs/V) + k_2(s)J_0(i\alpha r) + k_3(s)J_1(i\alpha r)\alpha r/i,$$
$$P_1(r, s) = k_1(s)J_1(irs/V) - k_2(s)J_1(i\alpha r) + k_3(s) \times$$
$$\times\ [J_0(i\alpha r) - J_2(i\alpha r)]\alpha r/2i, \ k_1(s) = A\alpha V e^{-as/V}(s + \alpha V)^{-2},$$
$$k_2(s) = -Ae^{-\alpha a}(s + \alpha V)^{-1}[\alpha V(s + \alpha V)^{-1} + \alpha a]e^{-2as/V},$$
$$k_3(s) = A(s + \alpha V)^{-1}e^{-\alpha a}e^{-2as/V},$$

где $J_0(z)$, $J_1(z)$ и $J_2(z)$ — функции Бесселя, при этом

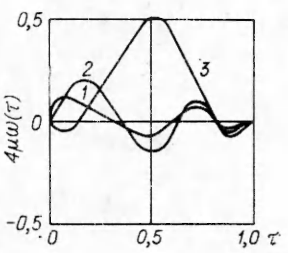
$$\int_0^a P_0(r, s)\, rdr = k_1(s)\, I_1(\alpha s/V)\, \alpha V/s + k_2(s)\, I_1(\alpha a)\, a/\alpha + k_3(s)\, a^2 I_2(\alpha a),$$

$$\int_0^a P_1(r,s)\, r^2dr = i\,\{k_1(s)\, a^2V/sI_2(as/V) - k_2(s)\, a^2/\alpha I_2(\alpha a) - k_3(s)\, a^3\,[I_1(\alpha a) - $$
$$- 3/\alpha a I_2(\alpha a)]\},$$

$I_1(z)$ и $I_2(z)$ — модифицированные функции Бесселя. Уравнение (1.2) решалось методом фиктивного поглощения [3], поскольку он позволяет аналитически выделить особенность контактных давлений на границе штампа, при этом интегралы от $Q_0(r, s)$ и $Q_1(r, s)$ в (2.1) берутся в квадратурах. Для построения функций $\delta(t)$ и $\omega(t)$, являющихся оригиналами для изображений по Лапласу $\overline{\delta}(s)$ и $\overline{\omega}(s)$ соответственно, использован ме-



Фиг. 1



Фиг. 2

тод регуляризации А. Н. Тихонова [4]. На ЭЦВМ проведен численный анализ поведения вертикального смещения центра штампа δ и угла его поворота относительно оси Ox ω во времени в зависимости от скорости V набегания волны давлений при следующих параметрах: $A = 1$, $\alpha = 1$, $n = 1$, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\mu = 7{,}2 \cdot 10^4$ кг/ /(м$\cdot$с^2), где ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность среды; μ — параметр Ламэ данной среды.

Результаты вычислений приведены на фиг. 1, 2. По вертикали отложены величины $\delta(\tau)$ и $\omega(\tau)$, умноженные на 4μ, при этом $\tau = t(1 + t)^{-1}$. Такая замена позволяет изучить поведение указанных функций на всем интервале времени. Кривые *1—3* соответствуют $V = 1$; 10 и 20 м/с.

Поступила 6 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ворович И. И., Бабешко В. А.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
3. **Бабешко В. А.** Новый метод в теории пространственных задач.— ДАН СССР, 1978, т. 242, № 1.
4. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

УДК 622.24.026.3.001+539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕНОК СКВАЖИН

Г. П. Черепанов

(Москва)

1. Введение. Научно-техническая проблема сверхглубокого бурения чрезвычайно сложна. Современная техника строительства скважин [1—3] состоит в многократном повторении цикла «сверление специальным долотом забоя скважины — вынос частиц разрушенной породы промывочной жидкостью — износ или слом бурового инструмента и его замена, включающая обычно подъемно-спусковые операции всей колонны бурильных труб».

Крепление стенок сверхглубокой скважины (свыше 6 км) обсадными колоннами становится технически весьма сложным из-за потери устойчивости стенок скважины, их обрушения и, как следствие, значительного увеличения поперечного сечения скважины по сравнению с начальным. При этом наличие гидравлического давления столба промывочной жидкости служит существенным стабилизирующим фактором. Глинистые и другие добавки в этой жидкости, забивая поры, приводят к образованию плотной корки на стенках и тем самым к герметизации скважин. В дальнейшем рассматриваются только вертикальные скважины, не защищенные обсадной колонной вблизи забоя на расстоянии, по меньшей мере, порядка ста диаметров скважины. Фильтрацией жидкости в породу пренебрегается.