## ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейланд В. Я.** К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1969.— № 4.
2. **Stewartson K., Williams P. G.** Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1969.— V. 312, N 1509.
3. **Messiter A. F.** Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math.— 1970.— V. 18, N 1.
4. **Smith F. T.** Steady and unsteady boundary-layer separation // Annual Rev. Fluid Mech.— Palo Alto, Calif., 1986.— V. 18.
5. **Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л.** Асимптотическая теория отрывных течений.— М.: Наука, 1987.
6. **Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.** О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 6.
7. **Ryzhov O. S., Terent'ev E. D.** Vortex spots in the boundary layer // Fluid Dynam. Trans.— Warszawa, 1987.— V. 13.
8. **Рыжов О. С., Савенков И. В.** Асимптотическая теория волнового пакета на пластинке // ПММ.— 1987.— Т. 51, вып. 5.
9. **Рыжов О. С., Савенков И. В.** Пространственные возмущения, вносимые гармоническим осциллятором в пограничном слое на пластинке // ЖВММФ.— 1988.— Т. 28, № 4.
10. **Ryzhov O. S.** Asymptotic methods in transonic flow theory // Proc. IUTAM Symp. Transsonicum III, Göttingen, 1988.— Berlin et al.: Springer, 1989.
11. **Жук В. И., Рыжов О. С.** Об асимптотике решений уравнения Орра — Зоммерфельда, задающих неустойчивые колебания при больших значениях числа Рейнольдса // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 6.
12. **Жук В. И.** Об асимптотике решений уравнения Орра — Зоммерфельда в областях, примыкающих к двум ветвям нейтральной кривой // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 4.
13. **Bodonyi R. J., Smith F. T.** The upper branch stability of the Blasius boundary layer, including non-parallel flow effect // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1981.— V. 375, N 1760.
14. **Stewartson K.** The theory of laminar boundary layers in compressible fluids.— Oxford: Clarendon Press, 1964.
15. **Козлов В. В., Рыжов О. С.** Восприимчивость пограничного слоя: асимптотическая теория и эксперимент // Сообщения по прикладной математике.— М.: ВЦ АН СССР, 1988.


*г. Москва* *Поступила 8/VI 1989 г.*

---

УДК 532.526

*Г. И. Бурдэ*

# ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассматривается один из случаев, когда решение уравнения Фокнера — Скэн и его осесимметричного аналога получается в замкнутой форме.

1. Для стационарного ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости со степенным распределением скорости на внешней границе слоя $U = cx^m$ при задании выражений для компонент скорости $u$ и $v$ в виде

$$u = cx^m f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\nu c\alpha}\, x^\nu \left(f + \frac{\gamma}{\alpha}\eta f'\right), \tag{1.1}$$

$$\eta = \sqrt{\alpha c/\nu}\, y x^\nu, \quad \alpha = (m+1)/2, \quad \gamma = (m-1)/2$$

приходим к известному уравнению Фокнера—Скэн [1]

$$f''' + ff'' = \beta(f'^2 - 1), \quad \beta = 2m/(m+1) \tag{1.2}$$

при граничных условиях

$$f = f_0, \ f' = 0(\eta = 0), \ f' = 1(\eta = \infty), \tag{1.3}$$

где $f_0$ связана со скоростью $v_0$ отсоса ($f_0 > 0$) или вдува ($f_0 < 0$) через поверхность: $v_0 = -\sqrt{\nu c \alpha x^\gamma} f_0$.

Далее рассмотрим случай $m = -1/3$, когда уравнение (1.2) непосредственно интегрируется 2 раза:

$$f' + (f^2 - \eta^2)/2 = A\eta + B \tag{1.4}$$

($A$ и $B$ — постоянные интегрирования). Заменой переменных

$$f = (\eta + A)\left[2\frac{w'(z)}{w(z)} - 1\right], \quad z = (\eta + A)^2/2 \tag{1.5}$$

уравнение (1.4) преобразуется к вырожденному гипергеометрическому

$$zw'' + (b - z)w' - aw = 0; \tag{1.6}$$

$$a = (1/4)(1 + B - A^2/2), \ b = 1/2, \tag{1.7}$$

общее решение которого имеет вид [2]

$$w = c_1 M(a, b, z) + c_2 U(a, b, z). \tag{1.8}$$

Здесь $c_1$ и $c_2$ — произвольные постоянные, причем решение (1.5) зависит только от их отношения $H = c_1/c_2$.

Три произвольные постоянные $A$, $B$, $H$, содержащиеся в решении (1.5), (1.7), (1.8), должны, вообще говоря, определяться тремя граничными условиями (1.3). Однако структура решения такова, что условие $f' = 1$ при $\eta \to \infty$ удовлетворяется независимо от значений постоянных $A$, $B$, $H$. Действительно, вычисляя $f'$ из (1.4), (1.5) и используя асимптотические и дифференциальные свойства вырожденных гипергеометрических функций [2], получим

$$f' = 4z\frac{w'}{w}\left(1 - \frac{w'}{w}\right) + 4a - 1, \tag{1.9}$$

$$\frac{w'}{w} \approx \frac{1 - a(b-a)/z}{1 + (1-a)(b-a)/z} \approx 1 - \frac{b-a}{z},$$

откуда с использованием (1.7) следует $f' \approx 1$. Таким образом, решение краевой задачи (1.2), (1.3) при $m = -1/3$ неединственно, как и при других $m < 0$ [3, 4].

После определения постоянных $B$ и $H$ из двух первых условий (1.3) имеем семейство решений, зависящих при заданном $f_0$ от $A$ как от параметра. Выделяя прежде всего из этого семейства те решения, которым соответствуют безотрывные течения, из условия $f''(0) > 0$ находим, что надо рассматривать только значения $A > 0$.

Дальнейшее сужение семейства решений может быть осуществлено путем выделения решений, удовлетворяющих требованию монотонности возрастания продольной составляющей скорости (величины $f'(\eta)$, см. (1.1)) поперек сечения пограничного слоя. Необходимое (но недостаточное) условие монотонности состоит в том, чтобы $f' \to 1$ при $\eta \to \infty$ со стороны значений $f' < 1$. Для применения этого условия вычислим $f'$, используя асимптотические выражения для вырожденных гипергеометрических функций, с учетом следующих (по сравнению с (1.9)) членов по $z^{-1}$:

$$f' \approx 1 + \left[w\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} z^{b-a} \exp(-z)\right]^{-2} \frac{1-2a}{z}. \tag{1.10}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Из этого выражения с учетом (1.3), (1.4), (1.7) необходимое условие монотонности получаем в виде $(1/4)(1 + f_0^2/2 - A^2/2) \geqslant 1/2$, откуда вытекает, что решения с монотонным изменением скорости поперек слоя могут существовать лишь при $|f_0| \geqslant 2$. При обтекании непроницаемой поверхности ($f_0 = 0$) таких решений нет, что находится в соответствии с теоремой, доказанной в [4]. Полученное выше условие монотонности не дает возможности отдельного рассмотрения случаев $f_0 > 0$ и $f_0 < 0$, однако решение для них имеет различный характер, поскольку $f_0$ входит также в выражение для постоянной $H$. Численное табулирование решения (1.5), (1.7), (1.8) показывает, что решения с $f_0 < 0$ (вдув через поверхность) отвечают немонотонному изменению $f'$: при увеличении $\eta$ она проходит через максимум в области $f' > 1$ и через минимум в области $f' < 1$, лишь затем приближаясь к $f' = 1$.

При $f_0 > 0$ и значениях $A$, заключенных в интервале $0 < A \leqslant \leqslant \sqrt{f_0^2 - 2}$, у всех решений, удовлетворяющих (1.3), (1.4), зависимость $f'(\eta)$ является монотонной и для выделения единственного решения надо воспользоваться критерием, впервые введенным в [3] и состоящим в том, что выбирается решение с наибольшей скоростью приближения $f'$ к единице при $\eta \to \infty$. В [4] дана другая формулировка принципа выделения единственного решения, в которой «свободная» постоянная определяется за счет постановки граничного условия $f' = 1$ при некотором конечном $\eta = k$ с дальнейшим предельным переходом $k \to \infty$ в полученных таким образом выражениях — в результате также выделяется решение с наибольшей скоростью приближения $f'$ к единице. В [5] проведено обоснование этого критерия путем исследования устойчивости автомодельного решения по отношению к неавтомодельным возмущениям.

Из соотношения (1.10) вытекает, что решение с наибольшей скоростью приближения $f'$ к единице при $\eta \to \infty$ соответствует $a = 1/2$ (или $A = \sqrt{f_0^2 - 2}$). Численное табулирование подтверждает этот результат. Поскольку при $a = b = 1/2$ уравнение (1.6) решается в квадратурах

$$w = \exp(z)\left[c_1 + c_2 \int z^{-1/2} \exp(-z)\, dz\right],$$

решение задачи (1.2), (1.3) при $m = -1/3$ ($\beta = -1$) может быть представлено в замкнутой форме

$$f = \tau\sqrt{2}(g + 1), \; f' = 1 - \tau^2 g(g + 2), \; \tau = (\eta + A)/\sqrt{2},$$

$$g(\tau) = \tau^{-1}\exp(-\tau^2)\left[H + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(\tau)\right]^{-1},$$

$$H = \frac{\sqrt{2}\exp(-A^2/2)}{f_0 - A} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(A/\sqrt{2}), \; A = \sqrt{f_0^2 - 2}.$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл вероятностей. Указанное решение существует лишь при $f_0 \geqslant 2$, что является подтверждением теоремы [6], согласно которой единственное решение задачи (1.2), (1.3) при $\beta < -0{,}199$, выделяемое на основе критерия [3], существует при скорости отсоса, превышающей критическое значение.

**2.** Рассмотрим аналог уравнения Фокнера — Скэн для осесимметричных пограничных слоев, образующихся на продольно обтекаемых тонких телах вращения. Удлинение предполагается достаточно большим: угол между касательной к меридианной кривой поверхности и осью тела — малая величина. Для тонких тел, когда толщина пограничного слоя сравнима по порядку величины с радиусом кривизны тела, уравнения пограничного слоя имеют вид [7]

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = UU' + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r}\right), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0,$$

где $x$ и $r$ — цилиндрические координаты (ось $x$ совпадает с осью тела).

Представляя автомодельное решение уравнений (2.1) как

$$v_x = cx^m f'(\eta), \; v_r = -\frac{2\nu}{r}[f + (m - 1)\eta f'], \; \eta = \frac{cr^2}{4\nu x^{1-m}}, \tag{2.2}$$

приходим к краевой задаче

$$mf'^2 - ff'' = m + (\eta f'')'; \tag{2.3}$$

$$f = f_0,\ f' = 0(\eta = \eta_0),\ f' = 1(\eta = \infty), \tag{2.4}$$
$$\eta_0 = ca^2/(4\nu),$$

соответствующей степенному распределению скорости на внешней границе слоя $U = cx^m$ и заданию формы поверхности тела соотношением $r_0 = ax^{(1-m)/2}$.

Заметим, что данное сочетание зависимостей $U(x)$ и $r_0(x)$ обусловлено только требованием автомодельности решения и не связано с закономерностями невязкого обтекания. Вследствие малости угла наклона поверхности тела к его оси продольная компонента скорости потенциального течения вблизи поверхности (на внешней границе слоя) приближенно совпадает со скоростью потенциального течения на бесконечности. Поэтому распределение скорости $U(x)$ можно считать заданным независимо от формы поверхности $r_0(x)$. В частности, рассматриваемый далее случай $m = -1$ можно трактовать как пограничный слой на тонком конусе ($r_0 = ax$, $a \ll 1$), помещенном внутрь плоского диффузора ($U = c/x$).

При $m = -1$ уравнение (2.3) двукратным интегрированием приводится к уравнению первого порядка

$$\eta f' + (f^2 - \eta^2)/2 - f + A\eta + B = 0 \tag{2.5}$$

($A$ и $B$ — постоянные). Подстановкой

$$f = b - \eta + 2\eta \frac{w'(\eta)}{w(\eta)},\ b = 1 \pm \sqrt{1 - 2B} \tag{2.6}$$

это уравнение сводится к вырожденному гипергеометрическому

$$\eta w'' + (b - \eta)w' - aw = 0,\ a = (b - A)/2; \tag{2.7}$$

$$w = c_1 M(a, b, \eta) + c_2 U(a, b, \eta). \tag{2.8}$$

Из формул преобразования гипергеометрических функций следует, что $f$ не зависит от выбора знака в выражении (2.6) для $b$.

С помощью асимптотических разложений для $M(a, b, \eta)$ и $U(a, b, \eta)$ можно, как и в п. 1, показать, что решение (2.6)—(2.8) удовлетворяет граничному условию на бесконечности независимо от значений постоянных $A$, $B$ и $H = c_1/c_2$:

$$f' \approx 1 + \left[w \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} z^{b-a} \exp(-z)\right]^{-2} (b - a)(1 - a)/\eta^2. \tag{2.9}$$

Определяя постоянные $B$ и $H$ из первых двух условий (2.4), получим семейство решений, зависящих от $\eta_0$, $f_0$ и $A$, где параметры гипергеометрических функций $a$ и $b$ после исключения $B$ представляются следующим образом:

$$b = 1 \pm \sqrt{(f_0 - 1)^2 + \eta_0(2A - \eta_0)},\ a = (b - A)/2. \tag{2.10}$$

При выделении единственного решения воспользуемся теми же принципами, что и в п. 1. Условие безотрывности течения с использованием (2.4), (2.5) дает $A < \eta_0$. Решение, удовлетворяющее необходимому условию монотонности распределения $f'(\eta)$ и соответствующее наибольшей скорости приближения $f'$ к единице при $\eta \to \infty$, получается на основе (2.9) при $a = b$ либо при $a = 1$. Анализ с использованием формул (2.10) показывает, что эти два случая переходят один в другой при смене знака в выражении для $b$ и приводят к одному и тому же уравнению, определяющему два возможных значения $A$:

$$A = \eta_0 - 1 \pm \sqrt{(f_0 - 1)^2 - 2\eta_0}. \tag{2.11}$$

Численное табулирование решения указывает, что здесь надо выбрать нижний знак, поскольку это значение $A$ отвечает более быстро растущему решению. Условие безотрывности течения $A < \eta_0$ при этом выполняется для любых $\eta_0$ и $f_0$.

Из результатов численного табулирования вытекает также, что монотонность изменения продольной скорости поперек слоя имеет место только в случае, когда условие вещественности $A$ в (2.11) выбирается в виде $f_0 \geqslant 1 + \sqrt{2\eta_0}$ — в противном случае функция $f'(\eta)$ проходит через максимум и минимум, прежде чем достигает стационарного значения на бесконечности.

Выделенное таким образом единственное решение задачи (2.4), (2.5) может быть представлено в замкнутой форме ($a = b = -A$)

$$f = -A + \eta(G + 1), \quad f' = 1 + G(1 + A - \eta) - \eta G^2/2,$$
$$G(\eta) = 2\eta^A \exp(-\eta)[H + K(\eta)]^{-1},$$
$$H = \frac{2\eta_0^{A+1}\exp(-\eta_0)}{f_0 + A - \eta_0} - K(\eta_0), \quad K(\eta) = \int_0^\eta t^A \exp(-t)\, dt,$$
$$A = \eta_0 - 1 - \sqrt{(f_0 - 1)^2 - 2\eta_0}.$$

При дискретных положительных значениях $A = n$ (дискретных значениях интенсивности отсоса $f_0 = 1 + \sqrt{(n+1)^2 + \eta_0^2 - 2\eta_0 n}$ при условии $\eta_0 > n$) решение представляется в элементарных функциях:

$$K(\eta) = -\exp(-\eta)\left[\eta^n + \sum_{l=1}^{n} \frac{n!}{(n-l)!}\eta^{n-l}\right].$$

При дискретных отрицательных значениях $A = -n$ (дискретные $f_0 = 1 + \sqrt{(n-1)^2 + \eta_0^2 + 2\eta_0 n}$ при любых $\eta_0$) выражение для $K(\eta)$ содержит интегральную показательную функцию. При полуцелых значениях $A$ $K(\eta)$ выражается через интеграл вероятностей.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
2. **Справочник** по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица, И. М. Стиган.— М.: Наука, 1979.
3. **Hartree D. R.** On an equation occuring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer // Proc. Cambr. Phil. Soc.— 1937.— V. 33, pt 2.
4. **Stewartson K.** Further solutions of the Falkner — Skan equation // Proc. Cambr. Phil. Soc.— 1954.— V. 50, pt 3.
5. **Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.** О выборе автомодельного решения в теории пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1974.— № 4.
6. **Иглиш Р., Кемнитц Ф.** О встречающемся в теории пограничного слоя дифференциальном уравнении $f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$ для $\beta < 0$ и при известных законах вдувания и отсоса // Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи.— М.; Л.: Энергия, 1960.
7. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962.



*г. Пермь* *Поступила 27/VII 1988 г., в окончательном варианте — 12/XII 1988 г.*


---


УДК 532.526.3.013.4



*Н. А. Желтухин, Н. М. Терехова*


# ВОЗМУЩЕНИЯ ВЫСОКИХ МОД В СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕ


Излагаются трактовка и результаты численного моделирования одного малоизученного явления волновой природы, обнаруженного в струйных течениях. На теневых снимках сверхзвуковых струй, истекающих из круглого сопла на нерасчетно