УДК 539.3+517.977

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ТОНКИХ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

В. В. Щербаков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: sherbakov87@gmail.com

Исследована задача оптимального управления для трехмерного упругого тела, содержащего тонкое жесткое включение в виде поверхности. Предполагается, что включение отслаивается, поэтому между упругой областью и включением имеется трещина. Рассмотрены краевые условия на берегах трещины, исключающие взаимное проникание точек тела и включения. Используется функционал качества, характеризующий отклонение вектора поверхностных сил от заданной на внешней границе функции, при этом в качестве функции управления рассматривается форма включения. Доказано существование решения сформулированной задачи.

Ключевые слова: тонкое жесткое включение, трещина, нелинейные краевые условия, вариационное неравенство, оптимальное управление.

Введение. Интерес к проблеме оптимального проектирования формы и внутренней структуры упругих конструкций, содержащих включения и трещины (разрезы), обусловлен необходимостью исследования свойств композиционных материалов, применяемых в технике. Традиционный подход к описанию трещин, в том числе трещин отслоения, возникающих между упругой областью и включением, заключается в задании на берегах трещины краевых условий типа равенств. Известно, что получаемые для таких моделей решения краевых задач обладают следующим недостатком: противоположные берега трещины могут проникать друг в друга [1]. В последнее время возрос интерес к исследованию задач о равновесии упругих тел с жесткими включениями и трещинами при нелинейных краевых условиях, исключающих взаимное проникание берегов (см. работы [2, 3] и библиографию к ним, а также [4, 5]). Задачи, в которых учитываются условия непроникания при отыскании оптимальных форм и структуры конструкций, являются более сложными, поскольку формулируются в виде задач оптимального управления для краевых задач с неизвестными границами.

Широкий класс задач оптимального управления для тел с различными уравнениями состояния при наличии ограничений на множество решений рассмотрен в [2]. В работах [6, 7] доказано существование экстремальных форм трещин для модели трехмерного упругого тела и пластины Тимошенко, причем в [6] целевой функционал совпадает с производной функционала энергии по параметру возмущения трещины, а в [7] характеризует

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13-01-00017, 14-01-31182) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук (код проекта МД-3123.2015.1).

норму разности между полем перемещений, найденным в результате решения задачи равновесия, и функцией, заданной в выбранной подобласти. Анализ влияния формы объемных и тонких жестких включений на возможное развитие трещины с использованием критерия разрушения Гриффитса проведен в [8, 9]. Классический способ оптимизации упругих тел рассмотрен в работах [10, 11].

В настоящей работе изучаются уравнения, описывающие равновесие трехмерного упругого тела, содержащего отслоившееся тонкое жесткое включение в виде гладкой двумерной поверхности. Отслоение моделируется путем задания нелинейных краевых условий в виде равенств и неравенств на границе между жестким включением и упругой матрицей. Приведена вариационная формулировка задачи равновесия. Предложена точная интерпретация всех краевых условий на берегах трещины отслоения в подходящих функциональных пространствах. Доказано существование экстремальной формы тонкого жесткого включения, минимизирующей среднеквадратичное интегральное отклонение вектора поверхностных сил от заданной на внешней границе функции. Полученный результат может служить основой для дальнейшего теоретического анализа обратной задачи идентификации формы тонкого включения в упругом теле.

1. Задача равновесия. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей Γ класса C^∞, а $\gamma \subset \Omega$ — гладкая поверхность без самопересечений, такая что $\bar{\gamma} \cap \Gamma = \emptyset$. Будем считать, что область Ω можно разбить на две подобласти D_1 и D_2 с липшицевыми границами ∂D_1 и ∂D_2 соответственно, причем $\gamma \subset \partial D_1 \cap \partial D_2$, $\operatorname{meas}(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$, $i = 1, 2$. Это условие является достаточным для выполнения первого неравенства Корна [3] в нелипшицевой области $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Дифференциальная постановка задачи о равновесии упругого тела Ω_γ с тонким жестким включением γ, которое отслаивается на положительной стороне γ^+, состоит в следующем [4]: для заданного вектора внешних массовых сил $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega)^3$ найти поле перемещений $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, функцию $\boldsymbol{\rho}_0 \in R(\gamma)$, тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, 3$, такие что

$$-\operatorname{div}\sigma = \boldsymbol{f} \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{1}$$

$$\sigma - A\varepsilon(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}^- = \boldsymbol{\rho}_0 \quad \text{на} \quad \gamma; \tag{4}$$

$$[\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant 0, \quad \sigma_\nu^+ \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\tau}}^+ = \boldsymbol{0}, \quad \sigma_\nu^+[\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma; \tag{5}$$

$$\int\limits_\gamma [\sigma\boldsymbol{\nu}]\cdot\boldsymbol{\rho} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in R(\gamma). \tag{6}$$

Здесь $R(\gamma)$ — пространство инфинитезимальных жестких перемещений, которое определяется следующим образом:

$$R(\gamma) = \{\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)\colon \quad \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + C, \quad \boldsymbol{x} \in \gamma\},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1, c_2, c_3), \quad b_{ij} = \text{const}, \quad c_i = \text{const}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ — тензор деформаций,

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2,$$

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\tau}} = \sigma\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\tau}} = (\sigma_{\tau 1}, \sigma_{\tau 2}, \sigma_{\tau 3}),$$

$A = \{a_{ijkl}\}$ $(i,j,k,l = 1,2,3)$ — тензор модулей упругости; $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0,$$

выражение в скобках $[v] = v^+ - v^-$ означает скачок функции v на поверхности γ; знаки "+" и "−" соответствуют значениям функции v на положительной и отрицательной сторонах поверхности γ относительно единичной нормали $\boldsymbol{\nu}$; все двухиндексные величины полагаются симметричными; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

В приведенной постановке уравнения (1) представляют собой уравнения равновесия, соотношения (2) — линейный закон Гука. Однородные условия Дирихле (3) описывают закрепление тела на границе. Наличие отслоения на γ^+ означает существование трещины между упругим телом и тонким включением. Для описания отслоения используется набор нелинейных краевых условий (5). Нелокальное краевое условие (6) обеспечивает равенство нулю главного вектора сил и главного момента сил, действующих на включение γ. Сформулированная задача относится к классу задач с неизвестной границей: точки контакта упругой матрицы и включения заранее не задаются и подлежат определению.

Для того чтобы записать вариационную формулировку задачи (1)–(6), введем пространство функций Соболева $H^1(\Omega_\gamma)$, суммируемых с квадратом вместе с первыми обобщенными производными в Ω_γ, и его подпространство $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)$, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе Γ. Определим также выпуклое замкнутое (и, следовательно, слабозамкнутое) в $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^3 = H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) \times H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) \times H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)$ множество допустимых перемещений

$$K = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^3\colon \quad [\boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \text{ на } \gamma; \quad \boldsymbol{v}|_{\gamma^-} \in R(\gamma)\}.$$

Задача (1)–(6) эквивалентна минимизации функционала энергии

$$\Pi(\Omega_\gamma, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\boldsymbol{v})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$$

на множестве K и может быть записана в виде следующего вариационного неравенства:

$$\boldsymbol{u} \in K, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \geqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in K. \qquad (7)$$

Вариационное неравенство (7) имеет решение, поскольку минимизируемый функционал коэрцитивен и слабополунепрерывен снизу на множестве K. Единственность решения следует из строгой выпуклости функционала Π.

Выбирая $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{\varphi}$, где $\boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^3$, из (7) получаем уравнения равновесия (1), выполненные в смысле обобщенных функций. Чтобы пояснить, в каком смысле выполняются краевые условия (5), (6) для решения вариационного неравенства (7), введем дополнительное предположение о регулярности поверхности γ, а именно: поверхность γ может быть продолжена до замкнутой поверхности Σ класса $C^{1,1}$, делящей область Ω на две подобласти Ω_1, Ω_2 с границами $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma$. Введем пространство функций $H^{1/2}(\Sigma)$ с нормой

$$\|v\|^2_{H^{1/2}(\Sigma)} = \|v\|^2_{L^2(\Sigma)} + \iint\limits_{\Sigma\,\Sigma} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^3}\,dx\,dy.$$

Заметим, что $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega_i)^3$, $\operatorname{div}\sigma \in L^2(\Omega_i)^3$, $i = 1, 2$, поэтому для любой функции $\boldsymbol{v} \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^3$ справедлива обобщенная формула Грина [3]

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) = -\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u})v_i - [\langle \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j, v_i\rangle_{1/2,\Sigma}] =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u})v_i - [\langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}), v_\nu\rangle_{1/2,\Sigma}] - [\langle \sigma_{\tau i}(\boldsymbol{u}), v_{\tau i}\rangle_{1/2,\Sigma}], \quad (8)$$

где запись $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1/2,\Sigma}$ означает двойственность сопряженных пространств $H^{-1/2}(\Sigma)$ и $H^{1/2}(\Sigma)$; $u_\nu = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu}$; $u_i = u_\nu\nu_i + u_{\tau i}$, $i = 1, 2, 3$. В (8) и далее нормаль $\boldsymbol{\nu}$ определена на Σ, причем считается, что на γ эта нормаль совпадает с ранее выбранной. Из (7) с учетом формулы Грина (8) и уравнений равновесия (1) получаем

$$[\langle \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j, v_i - u_i\rangle_{1/2,\Sigma}] =$$

$$= [\langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}), v_\nu - u_\nu\rangle_{1/2,\Sigma}] + [\langle \sigma_{\tau i}(\boldsymbol{u}), v_{\tau i} - u_{\tau i}\rangle_{1/2,\Sigma}] \leqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in K. \quad (9)$$

Определим весовое пространство функций [12]

$$H^{1/2}_{00}(\gamma) = \{v \in H^{1/2}(\gamma)\colon \quad vd^{-1/2} \in L^2(\gamma)\}$$

с нормой

$$\|v\|^2_{H^{1/2}_{00}(\gamma)} = \|v\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \|vd^{-1/2}\|^2_{L^2(\gamma)},$$

где $d(\boldsymbol{x}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\gamma)$. Обозначим через $\bar{v}$ продолжение нулем на $\Sigma\setminus\gamma$ функции v, заданной на γ. Как показано в [2], функция $\bar{v}$ принадлежит $H^{1/2}(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда v принадлежит $H^{1/2}_{00}(\gamma)$.

Пусть $\xi \in H^{1/2}_{00}(\gamma)$ — произвольная неотрицательная функция. Рассмотрим функцию $\boldsymbol{w} = \xi\boldsymbol{\nu}$ на поверхности γ. В этом случае $\boldsymbol{w}$ является элементом пространства $H^{1/2}_{00}(\gamma)^3$ и справедливо неравенство $w_\nu \geqslant 0$. Продолжая функцию $\boldsymbol{w}$ нулем на $\Sigma \setminus \gamma$, получаем функцию $\bar{\boldsymbol{w}}$ из пространства $H^{1/2}(\Sigma)^3$, которую в свою очередь можно продолжить в Ω_2 как функцию из пространства $H^1_\Gamma(\Omega_2)^3$. Найдем функцию $\boldsymbol{W} \in H^1_\Gamma(\Omega_2)^3$, такую что след $\boldsymbol{W}$ на γ совпадает с $\boldsymbol{w}$. Введем следующее обозначение:

$$\boldsymbol{w}^1 = \begin{cases} \boldsymbol{W} & \text{в } \Omega_2, \\ \boldsymbol{0} & \text{в } \Omega_1. \end{cases}$$

По построению $\boldsymbol{w}^1$ принадлежит K. Выбирая в неравенстве (9) в качестве пробной функции $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}^1$, получаем

$$\langle \sigma^+_\nu(\boldsymbol{u}), \bar{w}_\nu\rangle_{1/2,\Sigma} \leqslant 0.$$

Таким образом, точная интерпретация второго краевого условия в (5) имеет вид

$$\langle \sigma^+_\nu(\boldsymbol{u}), \xi\rangle^{00}_{1/2,\gamma} \leqslant 0 \quad \forall \xi \in H^{1/2}_{00}(\gamma), \quad \xi \geqslant 0,$$

где запись $\langle\cdot,\cdot\rangle^{00}_{1/2,\gamma}$ означает двойственность пространств $H^{-1/2}_{00}(\gamma)$ и $H^{1/2}_{00}(\gamma)$. Выясним, в каком смысле выполняется третье условие в (5). С этой целью выберем функцию $\boldsymbol{\eta} \in H^{1/2}_{00}(\gamma)^3$, для которой $\eta_\nu = 0$, и проведем для нее рассуждения, аналогичные использованным при построении $\boldsymbol{w}^1$. В результате получаем

$$\langle \sigma^+_{\tau i}(\boldsymbol{u}), \bar{\eta}_i\rangle_{1/2,\Sigma} = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\langle \sigma^+_{\tau i}(\boldsymbol{u}), \eta_i \rangle^{00}_{1/2,\gamma} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H^{1/2}_{00}(\gamma)^3, \quad \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0.$$

Выберем функции $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v}^1$, где $\boldsymbol{v}^1 \in H^1_\Gamma(\Omega)^3$, $\boldsymbol{v}^1 = \boldsymbol{\rho}$ на γ, $\boldsymbol{\rho} \in R(\gamma)$, в качестве пробных функций в (9). Тогда (6) выполняется в виде

$$\langle [\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j], \zeta_i \rangle_{1/2,\Sigma} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in H^{1/2}(\Sigma)^3, \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\rho} \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{11}$$

Заметим, что соотношение (11) справедливо для любой замкнутой поверхности Σ, удовлетворяющей сформулированным выше требованиям. Последовательно подставляя $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$ в (9) и проводя сравнение полученных неравенств, находим

$$0 = \langle \sigma^-_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j, u^-_i \rangle_{1/2,\Sigma} - \langle \sigma^+_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j, u^+_i \rangle_{1/2,\Sigma} = \\ = -\langle [\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j], u^-_i \rangle_{1/2,\Sigma} - \langle \sigma^+_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j, [u_i] \rangle_{1/2,\Sigma}. \tag{12}$$

Поскольку $\boldsymbol{u}^- = \boldsymbol{\rho}_0$ на γ, с учетом (10), (11) получаем равенство

$$0 = \langle \sigma^+_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j, [u_i] \rangle_{1/2,\Sigma} = \langle \sigma^+_\nu(\boldsymbol{u}), [u_\nu] \rangle_{1/2,\Sigma}.$$

Однако $[u_\nu] = 0$ на $\Sigma \setminus \gamma$, поэтому

$$\langle \sigma^+_\nu(\boldsymbol{u}), [u_\nu] \rangle^{00}_{1/2,\gamma} = 0. \tag{13}$$

Соотношение (13) представляет собой точную интерпретацию последнего краевого условия в (5).

2. Задача оптимального управления. Предположим, что выполнены условия гладкости коэффициентов тензора модулей упругости и вектора внешних массовых сил:

$$a_{ijkl} \in C^1(\bar\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \qquad \boldsymbol{f} \in C^1(\bar\Omega)^3.$$

Пусть $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к Γ, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\omega$. Обозначим через $H^3(\omega)$ пространство функций Соболева, имеющих обобщенные производные в ω вплоть до третьего порядка, суммируемые с квадратом. Тогда $H^3_0(\omega)$ — замыкание бесконечно гладких финитных функций в норме $H^3(\omega)$. Пусть $\Psi \subset H^3_0(\omega)$ — непустое выпуклое замкнутое ограниченное множество. Будем считать, что каждая поверхность γ, задаваемая графиком функции $\psi \in \Psi$, находится в области $\tilde\Omega$, строго внутренней по отношению к Ω:

$$\gamma = \{(x_1, x_2, x_3)\colon \quad x_3 = \psi(x_1, x_2), \ (x_1, x_2) \in \omega\} \subset \tilde\Omega \Subset \Omega.$$

Задача оптимального управления формой тонкого жесткого включения γ состоит в том, чтобы среди элементов множества допустимых управлений Ψ выбрать такой, при котором отклонение вектора поверхностных сил $\sigma\boldsymbol{n}$ от заданной функции $\boldsymbol{p}_* \in L^2(\Gamma)^3$ является наименьшим. Иными словами, требуется решить задачу

$$\inf_{\psi \in \Psi} J(\psi) \tag{14}$$

с функционалом качества $J(\psi) = \|\sigma(\psi)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}_*\|_{L^2(\Gamma)^3}$.

Замечание. Задача (14) возникает при изучении обратной задачи идентификации, в которой наряду с полем перемещений $\boldsymbol{u}$ и тензором напряжений σ неизвестной является форма ψ включения γ, а дополнительная информация о решении задана известным значением $\boldsymbol{p}_*$ вектора поверхностных сил $\sigma\boldsymbol{n}$ на внешней границе Γ.

Теорема. *Существует решение задачи оптимального управления* (14).

Доказательство. Согласно известным данным о регулярности решений эллиптических систем уравнений [13, 14] существует приграничная полоса $\Omega^h = \{\boldsymbol{x} \in \Omega\colon \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \Gamma) < h\}$, $h > 0$, в которой решение $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\psi)$ задачи равновесия вида (1)–(6) обладает свойством $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega^h)^3$. Следовательно, функционал J определен корректно.

Пусть $\psi^m \in \Psi$ — минимизирующая последовательность в задаче (14), для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\psi^m) = \inf_{\psi\in\Psi} J(\psi).$$

Поскольку Ψ — ограниченное слабозамкнутое множество рефлексивного пространства $H^3(\omega)$, можно предположить, что при $m \to \infty$

$$\psi^m \to \psi_0 \quad \text{слабо} \quad \text{в } H^3_0(\omega), \quad \psi_0 \in \Psi.$$

Более того, в силу теоремы вложения

$$\psi^m \to \psi_0 \quad \text{сильно} \quad \text{в } C^1(\bar{\omega}) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
$$\max_{i=1,2} |\lambda_{m,i}| < 1/m \quad \text{на } \omega, \quad \lambda_m = \psi^m - \psi_0.$$

Введем обозначение $\Omega_m = \Omega \setminus \bar{\gamma}_m$, где

$$\gamma_m = \{(x_1, x_2, x_3)\colon \quad x_3 = \psi^m(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in \omega\}.$$

Для каждого натурального m введем выпуклое замкнутое в $H^1_\Gamma(\Omega_m)^3$ множество допустимых перемещений

$$K^m = \bigl\{\boldsymbol{v} \in H^1_\Gamma(\Omega_m)^3\colon \quad [\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{\nu}^m \geqslant 0 \text{ на } \gamma_m; \quad \boldsymbol{v}\big|_{\gamma_m^-} \in R(\gamma_m)\bigr\},$$

где $\boldsymbol{\nu}^m$ — вектор единичной нормали к γ_m:

$$\boldsymbol{\nu}^m = \frac{(-\psi^m_{,1}, -\psi^m_{,2}, 1)}{\sqrt{1 + (\psi^m_{,1})^2 + (\psi^m_{,2})^2}}.$$

Аналогично определим поверхность γ_0, область Ω_0, единичную нормаль $\boldsymbol{\nu}_0$ и множество допустимых перемещений K_0, соответствующие графику функции $x_3 = \psi_0(x_1, x_2)$.

Задача минимизации

$$\inf_{\boldsymbol{v}\in K^m} \Pi(\Omega_m, \boldsymbol{v})$$

имеет единственное решение $\boldsymbol{u}^m = \boldsymbol{u}(\psi^m)$, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\boldsymbol{u}^m \in K^m, \quad \int\limits_{\Omega_m} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^m)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^m) - \int\limits_{\Omega_m} \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^m) \geqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in K^m. \tag{15}$$

Как отмечено выше, из вариационного неравенства (15) следует справедливость уравнений равновесия, поэтому

$$-\operatorname{div}\sigma(\boldsymbol{u}^m) = \boldsymbol{f} \quad \text{в } \Omega^h, \qquad \boldsymbol{u}^m = \boldsymbol{0} \quad \text{на } \Gamma. \tag{16}$$

Отобразим взаимно однозначно область Ω_0 на Ω_m. С этой целью рассмотрим бесконечно гладкую финитную в Ω функцию θ, равную единице в малой выпуклой окрестности множества

$$\bigcup_{\psi\in\Psi} \{(x_1, x_2, x_3)\colon \quad x_3 = \psi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega\}.$$

Определим координатное преобразование

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \frac{1}{m}\boldsymbol{V}_m(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega_m \tag{17}$$

с равномерно ограниченным векторным полем $\boldsymbol{V}_m = (0, 0, m\lambda_m\theta)$: $\|\boldsymbol{V}_m\|_{C^1(\Omega_0)^3} \leqslant c$. Для того чтобы преобразование (17) было определено корректно, будем полагать, что все функции множества допустимых управлений Ψ продолжены нулем вне области ω. Кроме того, число h будем считать настолько малым, что носитель функции θ не пересекается с множеством Ω^h. Якобиан

$$J_m = \Big|\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\Big| = 1 + \lambda_m\theta_{,3}$$

строго положителен для достаточно больших m. В (15) выполним замену области интегрирования Ω_m на Ω_0 в соответствии с (17). В результате получаем вариационное неравенство

$$\boldsymbol{u}_m \in K_m, \quad \int\limits_{\Omega_0} J_m a_{ijkl}(\boldsymbol{\Phi}_m) E_{kl}(\boldsymbol{\Phi}_m^{-1}; \boldsymbol{u}_m) E_{ij}(\boldsymbol{\Phi}_m^{-1}; \boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{u}_m) -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} J_m \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Phi}_m) \cdot (\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{u}_m) \geqslant 0 \qquad \forall \boldsymbol{v}_m \in K_m, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^m(\boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{x}))$; $E_{ij}(\boldsymbol{w}; \boldsymbol{u})$ — трансформированный тензор деформаций:

$$E_{ij}(\boldsymbol{w}; \boldsymbol{u}) = (u_{i,k}w_{k,j} + u_{j,k}w_{k,i})/2, \qquad i, j = 1, 2,$$

K_m — прообраз множества K^m в пространстве $H^1_\Gamma(\Omega_0)^3$:

$$K_m = \{\boldsymbol{v} \in H^1_\Gamma(\Omega_0)^3\colon \quad [\boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{\nu}_m \geqslant 0 \text{ на } \gamma_0;$$
$$\boldsymbol{v}\big|_{\gamma_0^-} = (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1 + b_{13}\lambda_m, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2 + b_{23}\lambda_m, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3)\}.$$

С учетом регулярности отображения $\boldsymbol{\Phi}_m$, вектора внешних массовых сил $\boldsymbol{f}$ и коэффициентов тензора модулей упругости A получаем асимптотические разложения для функций и интегралов, входящих в (18). Прежде всего заметим, что, используя свойство гладкости отображения (17), можно записать

$$\boldsymbol{\Phi}_m^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} - \frac{1}{m}\,\boldsymbol{V}_m(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{r}_1(m, \boldsymbol{y}), \qquad \|\boldsymbol{r}_1(m)\|_{W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^3)^3} = o(m^{-1}). \tag{19}$$

Из (19) следует, что компоненты трансформированного тензора деформаций допускают представление

$$E_{ij}(\boldsymbol{\Phi}_m^{-1}; \boldsymbol{u}) = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{m}\,E_{ij}(\boldsymbol{V}_m; \boldsymbol{u}) + r_2^{ij}(m, \boldsymbol{u}),$$
$$\|r_2^{ij}(m, \boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant o(m^{-1})\|\boldsymbol{u}\|_{H^1_\Gamma(\Omega_0)^3}. \tag{20}$$

Коэффициенты тензора модулей упругости можно представить в виде

$$a_{ijkl}(\boldsymbol{\Phi}_m) = a_{ijkl} + \frac{1}{m}\,(\boldsymbol{V}_m \cdot \nabla a_{ijkl}) + r_3^{ijkl}(m), \qquad \|r_3^{ijkl}(m)\|_{L^2(\Omega_0)} = o(m^{-1}), \tag{21}$$

аналогичная формула имеет место для компонент вектора внешних массовых сил:

$$f_i(\boldsymbol{\Phi}_m) = f_i + \frac{1}{m}\,(\boldsymbol{V}_m \cdot \nabla f_i) + r_4^i(m), \qquad \|r_4^i(m)\|_{L^2(\Omega_0)} = o(m^{-1}). \tag{22}$$

С учетом разложений (20), (21) для $\boldsymbol{u} \in H^1_\Gamma(\Omega_0)^3$, $\boldsymbol{v} \in H^1_\Gamma(\Omega_0)^3$ получаем соотношение

$$\int\limits_{\Omega_0} J_m a_{ijkl}(\boldsymbol{\Phi}_m) E_{kl}(\boldsymbol{\Phi}_m^{-1}; \boldsymbol{u}) E_{ij}(\boldsymbol{\Phi}_m^{-1}; \boldsymbol{v}) =$$
$$= \int\limits_{\Omega_0} \Big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) + \frac{1}{m} A(\boldsymbol{V}_m; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + r_5(m, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \Big) \tag{23}$$

с билинейной симметричной по $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ функцией

$$A(\boldsymbol{V}_m; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{V}_m a_{ijkl})\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) E_{ij}(\boldsymbol{V}_m; \boldsymbol{v}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{v}) E_{ij}(\boldsymbol{V}_m; \boldsymbol{u}),$$
$$\|r_5(m, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\|_{L^1(\Omega_0)} \leqslant o(m^{-1}) \|\boldsymbol{u}\|_{H^1_\Gamma(\Omega_0)^3} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1_\Gamma(\Omega_0)^3}.$$

Согласно (22) имеем

$$\int\limits_{\Omega_0} J_m f_i(\boldsymbol{\Phi}_m) u_i = \int\limits_{\Omega_0} \Big(f_i u_i + \frac{1}{m} \operatorname{div}(\boldsymbol{V}_m f_i) u_i + r_6(m, \boldsymbol{u}) \Big),$$
$$\|r_6(m, \boldsymbol{u})\|_{L^1(\Omega_0)} \leqslant o(m^{-1}) \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega_0)^3}. \tag{24}$$

Далее необходимо обосновать предельный переход при $m \to \infty$ в вариационном неравенстве (18), а также провести анализ свойств вспомогательной краевой задачи (16). Прежде всего подставим в (18) пробную функцию $\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$. Используя соотношения (23), (24), первое неравенство Корна и неравенство Коши, получаем равномерную по m оценку

$$\|\boldsymbol{u}_m\|_{H^1_\Gamma(\Omega_0)^3} \leqslant c.$$

Из последовательности $\boldsymbol{u}_m$ можно выбрать такую подпоследовательность, что при $m \to \infty$ справедлива сходимость

$$\boldsymbol{u}_m \to \boldsymbol{u}_0 \quad \text{слабо} \quad \text{в } H^1_\Gamma(\Omega_0)^3. \tag{25}$$

Предельная функция $\boldsymbol{u}_0$ принадлежит множеству допустимых перемещений K_0. Для каждого фиксированного $\boldsymbol{v} \in K_0$ пробные функции $\boldsymbol{v}_m \in K_m$ можно выбрать таким образом, что при $m \to \infty$

$$\boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{v} \quad \text{сильно} \quad \text{в } H^1_\Gamma(\Omega_0)^3. \tag{26}$$

На основе сходимостей (25), (26) перейдем к пределу при $m \to \infty$ в вариационном неравенстве (18). Тогда

$$\boldsymbol{u}_0 \in K_0, \qquad \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_0)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_0) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_0) \geqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in K_0.$$

Последнее вариационное неравенство описывает решение $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(\psi_0)$ задачи равновесия упругого тела Ω_0 с отслоившимся тонким жестким включением γ_0. В то же время для решения задачи

$$-\operatorname{div} \sigma(\boldsymbol{u}_m) = \boldsymbol{f} \quad \text{в } \Omega^h, \qquad \boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0} \quad \text{на } \Gamma,$$

полученной в результате применения преобразования (17) к вспомогательной задаче (16), справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{u}_m\|_{H^2(\Omega^{h/2})^3} \leqslant c \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^3}$$

с постоянной c, не зависящей от m. Можно считать, что при $m \to \infty$

$$\boldsymbol{u}_m \to \boldsymbol{u}_0 \quad \text{слабо} \quad \text{в } H^2(\Omega^{h/2})^3$$

и, следовательно,

$$\sigma(\boldsymbol{u}_m)\boldsymbol{n} \to \sigma(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{n} \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Gamma)^3. \tag{27}$$

Далее используется сходимость (27):

$$\inf_{\psi\in\Psi} J(\psi) = \lim_{m\to\infty} J(\psi^m) = \lim_{m\to\infty} \|\sigma(\boldsymbol{u}_m)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}_*\|_{L^2(\Gamma)^3} = \|\sigma(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}_*\|_{L^2(\Gamma)^3} = J(\psi_0).$$

Таким образом, функция ψ_0 — искомое решение задачи оптимального управления (14). Теорема доказана.

Докажем утверждение, которое было использовано при доказательстве теоремы (см. (26)).

Лемма. *Для любого $\boldsymbol{v} \in K_0$ существует последовательность $\boldsymbol{v}_m \in K_m$, такая что при $m \to \infty$*

$$\boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{v} \quad \text{сильно в} \quad H^1_\Gamma(\Omega_0)^3.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in K_0$, в частности

$$\boldsymbol{v}\big|_{\gamma_0^-} = (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3).$$

В области Ω_0 определим функцию

$$\boldsymbol{v}_m = (v_{m1}, v_{m2}, v_{m3}) = (v_1, v_2, v_3) + \theta(b_{13}\lambda_m, b_{23}\lambda_m,$$
$$\lambda_{m,1}(v_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - c_1) + \lambda_{m,2}(v_2 + b_{12}x_2 - b_{23}x_3 - c_2)).$$

Принадлежность $\boldsymbol{v}_m$ пространству $H^1_\Gamma(\Omega_0)^3$ следует из свойств отображений θ и λ_m. Покажем, что функция $\boldsymbol{v}_m$ удовлетворяет всем условиям, опрелеляющим множество K_m. Поскольку $\boldsymbol{v}$ принадлежит множеству K_0, величина $[\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{\nu}_0$ неотрицательна на γ_0, т. е.

$$[v_3] - [v_1]\psi_{0,1} - [v_2]\psi_{0,2} \geqslant 0 \quad \text{на } \gamma_0.$$

Поэтому справедливо неравенство $[\boldsymbol{v}_m]\cdot\boldsymbol{\nu}_m \geqslant 0$ на γ_0. Действительно,

$$[\boldsymbol{v}_m]\cdot\boldsymbol{\nu}_m = [\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{\nu}_m + \theta[(b_{13}\lambda_m, b_{23}\lambda_m, \lambda_{m,1}(v_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - c_1) +$$
$$+ \lambda_{m,2}(v_2 + b_{12}x_2 - b_{23}x_3 - c_2))]\cdot\boldsymbol{\nu}_m = \frac{[v_3] - [v_1]\psi_{0,1} - [v_2]\psi_{0,2}}{\sqrt{1 + (\psi^m_{,1})^2 + (\psi^m_{,2})^2}} \geqslant 0 \quad \text{на } \gamma_0.$$

Кроме того,

$$\boldsymbol{v}_m\big|_{\gamma_0^-} = (b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1 + b_{13}\lambda_m, -b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + c_2 + b_{23}\lambda_m, -b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + c_3).$$

Следовательно, $\boldsymbol{v}_m$ является элементом K_m.

Для завершения доказательства следует отметить, что $\boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{v}$ сильно в $H^1_\Gamma(\Omega_0)^3$ при $m\to\infty$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1985.
2. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
3. **Хлуднев А. М.** Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

4. **Khludnev A. M., Leugering G.** On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // Math. Meth. Appl. Sci. 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.
5. **Lazarev N. P.** An equilibrium problem for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // J. Sib. Federal Univ. Math. Phys. 2013. V. 6, N 1. P. 53–62.
6. **Вторушин Е. В.** Управление формой трещины в упругом теле при условии возможного контакта берегов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 20–30.
7. **Лазарев Н. П.** Существование экстремальной формы трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 49–62.
8. **Khludnev A. M., Negri M.** Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks // Z. angew. Math. Phys. 2013. Bd 64, N 1. S. 179–191.
9. **Щербаков В. В.** Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 138–147.
10. **Баничук Н. В.** Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
11. **Литвинов В. Г.** Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987.
12. **Лионс Ж.-Л.** Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. М.: Мир, 1971.
13. **Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.** Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. 2 // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17, N 1. P. 35–92.
14. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 15/III 2013 г.,
в окончательном варианте — 27/II 2014 г.