

Таблица 5

Источник	Геоматериалы								
	1	2	3	4	5	6	7	7'	8
[2]	66	64	76	65	61	69	60	—	66
[9]	73	59	78	73	65	71	59	65	68
[10]	—	—	79	—	—	74	67	66	72

Примечание. Обозначения те же, что и в табл. 4 (7' — аргиллиты).

В табл. 4 показаны усредненные по каждой группе геоматериалов параметры модели. Этими данными можно пользоваться для ориентировочных расчетов, если тип материала неизвестен.

Эксперименты, выполненные в [8], позволяют оценить влияние скорости деформирования $\dot{\epsilon}_3$ на параметры τ_3^0 , M^0 , Λ^0 , Λ_*^0 . Оказалось, что модуль M^0 значительно снижается, а прочность несколько возрастает с ростом $\dot{\epsilon}_3$. Скорость дилатансии слабо зависит от $\dot{\epsilon}_3$.

Некоторые авторы [9, 10] предложили уравнения поверхностей максимальной прочности записывать через наибольшее и наименьшее главные напряжения. При этом влияние промежуточного главного напряжения не учитывается вовсе. Зависимости, рекомендованные в [9, 10], перестроены к инвариантному виду, и найденные значения показателя степени $S_2 \cdot 10^2$ ($Y_2 \approx 0$) даны в табл. 5, откуда видно, что эти результаты удовлетворительно согласуются друг с другом и с измерениями [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Капустянский С. М., Николаевский В. Н. Количественная формулировка упругопластической дилатансионной модели (на примере песчанника).— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4.
2. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979.
3. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г. и др. Прочность и деформация горных пород в допределной и запределной областях.— ФТПРПИ, 1981, № 6.
4. Senseney P. E., Fossum A. F., Pfeifle T. W. Non-associative constitutive laws for low porosity rocks.— Int. J. Numer. Anal. Math., 1983, v. 7, p. 101.
5. Wawersik W., Fairhurst Ch. A study of brittle fracture in laboratory compression experiments.— Int. J. Rock Mech., 1970, v. 7, p. 561.
6. Stephens D. R., Lilley E. M., Louis H. Pressure-volume equation of state of consolidated and fractured rocks to 40 kb.— Int. J. Rock Mech., 1969, v. 7, p. 257.
7. Николаевский В. Н., Лившиц Л. Д., Сизов И. А. Механические свойства горных пород. Деформации и разрушение.— Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела, т. 11. М.: ВИНТИ, 1978.
8. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г., Певзнер Е. Д. Влияние скорости деформирования на запределные характеристики горных пород.— ФТПРПИ, 1982, № 5.
9. Hoek E. Strength of jointed rock masses.— Geotechnique, 1983, v. 33, n. 3.
10. Brook N. Estimating the triaxial strength of rocks.— Int. J. Rock. Mech., 1979, v. 16, p. 261.

Поступила 4/VI 1984 г.

УДК 539.3 : 534.1

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В. В. ЛАРЧЕНКО

(Новосибирск)

Рассматривается явление ветвления форм равновесия тонкой оболочки без хлопка. В технике часто ставится задача о выведении оболочечной конструкции из искомого устойчивого состояния, когда она имеет несколько положений равновесия. В инженерной практике такие требования характерны, например, при использовании оболочки в качестве предохранительной хлопающей мембраны, в системах пневмоавтоматики, содержащих оболочечный элемент, и т. д. Трудности анализа этого типа задач имеют прямое отношение к одной из центральных проблем нелинейной теории оболочек — существованию многих устойчивых форм равновесия при одном значении параметра нагружения.

В работе анализируется закритическое деформирование близких к совершенным тонких упругих оболочек под действием давления

$$\rho = q\eta + p, \quad p^* = \min_n \{p_n\},$$

где q — малый скалярный параметр; $\eta(\alpha, \beta)$ — функция, характеризующая распределение возмущающего давления по поверхности оболочки; $\{p_n\}$ — собственные значения. Установлена зависимость ветвления неосесимметричной формы потери устойчивости конической оболочки от вида η -функции. Оказалось, что неосесимметричная бифуркация сопровождается либо хлопком, либо выпучиванием. Явление выпучивания характеризуется тем, что достижение точки бифуркации не исчерпывает несущей способности оболочки, а неосесимметричная форма, если она энергетически выгодна, наблюдается в статическом состоянии [1].

Заключение об устойчивости решения основывается, как правило, на анализе показателей Ляпунова. Тем самым устанавливается устойчивость или неустойчивость решения относительно возмущений начальных данных. В работе исследуются особенности деформирования оболочек при различных возмущениях давления по поверхности оболочки. Такой подход имеет не только ясное физическое содержание, но в ряде случаев необходим. Объясняется это тем, что, с одной стороны, весьма сложно контролировать распределение возмущений давления по поверхности оболочки при постановке эксперимента, с другой стороны, качественные исследования влияния этих возмущений существенно уточняют механизм потери устойчивости оболочки.

Обозначим через U_+ множество тех неосесимметричных форм потери устойчивости, ответвление которых сопровождается хлопком, а через U_- — множество таких форм, бифуркация которых отвечает механическому явлению выпучивания. Численным экспериментом обнаружены закономерности в распределении элементов из U_+ и U_- на кривой нагружения при условии, что $\eta(r) = 1$. Оказалось, что при больших давлениях малые неосесимметричные формы конической оболочки относятся к одному из четырех типов решений, отличающихся способом потери устойчивости и характером зависимости количества волн на поверхности оболочки от величины давления.

Необходимо напомнить, что ранее предпринимались неоднократные попытки нахождения устойчивых закритических форм равновесия. Однако все они не привели к положительному результату в классе осесимметричных решений [2]. В данной работе установлено указанное свойство решений нелинейной теории оболочек в силу двух обстоятельств.

1. Закритический анализ проводился не только в осесимметричной постановке, но рассматривались также послебифуркационные неосесимметричные формы.

2. Устойчивые формы равновесия ответвляются в большом количестве лишь тогда, когда значения геометрического параметра оболочки соответствуют условию сингулярного возмущения естественным малым параметром при старшей производной. Однако в этом случае ответвляется также большое число неосесимметричных форм, вообще говоря, принадлежащих U_+ -множеству [3]. Поэтому для эффективного анализа разработан метод вычисления всех локальных форм равновесия на заданном отрезке кривой нагружения и создана программа для ЭВМ, которая автоматически выделяет устойчивые решения.

1. Вариационно-асимптотический анализ почти совершенных оболочек. Рассмотрим устойчивость тонкой упругой оболочки вращения в рамках геометрически нелинейной теории, деформация которой содержит нелинейные члены в «квадратичном» приближении

$$(1.1) \quad \varepsilon = L_1(V) + (1/2)L_2(V) + L_{11}(z, V),$$

где L_1 , L_2 и L_{11} — линейный, квадратичный и билинейный операторы; V — вектор-функция перемещения; z — малое возмущение срединной поверхности оболочки.

Пусть оболочка деформируется под действием давления $\rho(r) = p + q\eta(r)$, где p — равномерное внешнее давление, равное одному из собственных значений $\{p_n\}$ соответствующей нелинейной краевой задачи, линеаризованной в окрестности осесимметричного решения; $\eta(r)$ — положительная достаточно гладкая функция радиуса r ; q — малый скалярный параметр; z — возмущение срединной поверхности оболочки, близкое к неосесимметричной форме потери устойчивости V_1 , т. е. $z = \tau V_1$.

Допустим, что при достаточно малой амплитуде геометрических несовершенств τ перемещение $V(\alpha, \xi, \rho)$ может быть разложено в асимптотический ряд по целым степеням параметра ξ . Параметр ξ характеризует дополнительные перемещения, вызванные ответвлением неосесимметричной формы потери устойчивости [1]:

$$(1.2) \quad V(\alpha, \xi, \rho) = V_0(r, \rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k V_k(\alpha, \rho), \quad \{r, \varphi\} = \alpha.$$

Здесь $V_0(r, \rho)$ — вектор осесимметричных перемещений основного напряженно-деформированного состояния.

Иследуем виды потери устойчивости в неосесимметричной постановке, используя принцип возможных перемещений. Для этого подставив (1.2) в (1.1), получим

$$(1.3) \quad \varepsilon = \tau L_{11}(V_1, V_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \varepsilon_k,$$

$$\varepsilon_k = L_1(V_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k L_{11}(V_{k-i}, V_i), \quad k=0, 1, \dots$$

Аналогичный ряд для виртуальной деформации, соответствующей виртуальному перемещению δV , имеет вид

$$(1.4) \quad \delta \varepsilon = \tau L_{11}(V_1, \delta V) + \delta \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \delta \varepsilon_k,$$

$$\delta \varepsilon_0 = L_1(\delta V) + L_{11}(V_0, \delta V), \quad \delta \varepsilon_k = L_{11}(V_k, \delta V).$$

Из степенного ряда (1.3) вытекает, что обобщенное напряжение σ также может быть разложено в ряд по целым степеням ξ , причем коэффициенты этого разложения σ_i удовлетворяют определяющему соотношению $\sigma_i = \Gamma(\varepsilon_i)$, $i=0, 1, \dots$. Учитывая это, проведем вариационный анализ неосесимметричных форм равновесия в асимптотической форме. Предварительно отметим следующее: коэффициент при ξ^0 в выражении вариации функционала энергии тождественно равен нулю, так как соответствующая краевая задача, описывающая основное осесимметричное напряженно-деформированное состояние, получена на основе вариационного принципа; коэффициент H_1 при ξ , если $\rho = p$, также равен нулю, так как выражение для него представляет собой задачу на собственные значения в вариациях.

Положив в $H_1 \delta V = V_k$, приходим к тождеству

$$(1.5) \quad \int_S \{ \sigma_{0,p} L_{11}(V_1, V_k) + \sigma_1 [L_1(V_k) + L_{11}(V_{0,p}, V_k)] \} ds = 0, \quad k=1, 2, \dots,$$

которому удовлетворяют собственная функция V_1 и k -е приближение Койтера. Здесь S — срединная поверхность; индекс p означает, что величина вычислена при $\rho = p$.

Ограничимся возможными перемещениями в классе собственных функций. Тогда с учетом (1.3)–(1.5) и теоремы взаимности Бетти приходим к асимптотической форме вариационного принципа:

$$(1.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k H_k = -\tau \int_S [\sigma_0 L_2(V_1) + \sigma_1 L_{11}(V_1, V_0)] ds + \dots,$$

$$H_1 = \int_S [\sigma_0 L_2(V_1) + \sigma_1 \varepsilon_1] ds, \quad H_2 = \frac{3}{2} \int_S \sigma_1 L_2(V_1) ds,$$

$$H_3 = \int_S [2\sigma_1 L_{11}(V_1, V_2) + \sigma_2 L_2(V_1)] ds,$$

$$H_k = \int_S \left\{ \sum_{i=2}^{k-1} \sigma_i L_{11}(V_1, V_{k-i}) + \sigma_1 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} L_{11}(V_{k-i}, V_i) + L_{11}(V_1, V_{k-1}) \right] \right\} ds$$

(члены вида $O(\xi^m, \tau^k)$, $k \geq 1$, $m+k \geq 2$ опущены).

Пусть $0 < \tau < \tau_0$, $\tau_0 \ll 1$. Обозначим через ξ_m значение ξ , при котором функция $q(\xi)$ достигает экстремума. Естественно допустить, что $\xi_m(\tau)$ и $q(\tau) = q(\xi_m(\tau))$ — достаточно гладкие функции параметра τ , причем $\lim_{\tau \rightarrow 0} \xi_m(\tau) = 0$, $\lim_{\tau \rightarrow 0} q(\tau) = 0$. На плоскости (q, τ) функция $q(\tau)$ представляет собой линию экстремальных значений. Чувствительность оболочек к геометрическим несовершенствам можно определять по расположению линии $q(\tau)$ на плоскости. Если кривая $q(\tau)$ лежит в верхней полуплоскости, т. е. $q(\tau) > 0$, $\tau \in (0, \tau_0)$, то будем считать, что оболочка нечувствительна к малым геометрическим несовершенствам. Если кривая $q(\tau)$ расположена в нижней полуплоскости, то отнесем оболочку к классу чувствительных к малым геометрическим несовершенствам. Заметим, что главные члены асимптотики координат точки $(\xi_m(\tau), q(\xi_m))$ удовлетворяют необходимому условию существования экстремума:

$$(1.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \xi_m^{k-1} H_k = O(\xi_m^{i-1}, \tau^l), \quad i, l \geq 1.$$

Положив $\xi = \xi_m$ в (1.6), построим решение системы уравнений (1.6), (1.7) в виде рядов

$$(1.8) \quad q = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \xi_m^k, \quad \tau = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \xi_m^k,$$

где q_k, τ_k — неизвестные коэффициенты.

Разложим $\sigma_0(\rho)$, $\varepsilon_0(\rho)$ и $V_0(\rho)$ в ряды Тейлора в окрестности точки $\rho = p$. Подставим их в (1.7) и упростим полученные выражения с помощью (1.5). Отсюда методом неопределенных коэффициентов получим

$$(1.9) \quad q_{2\tau} = -3H_3/J_\eta, \quad J_\eta = \int_S [\sigma'_{0,p} L_2(V_1) + 2\sigma_1 L_{11}(\eta V'_{0,p}, V_1)] ds,$$

если $J_\eta \neq 0$ и $q_{1\tau} = -2H_2/J_\eta = 0$.

Численный анализ уравнений сферической и конической оболочек показывает (см., например, п. 3), что существует дискретный набор значений геометрического параметра λ , для которого в некоторых точках бифуркации имеет место равенство $H_3 = 0$. Пусть $H_i = 0$ для $i = 2, 3, \dots, k-1$ и $H_k \neq 0$, тогда первый отличный от нуля коэффициент имеет вид $q_{k-1,\tau} = -kJ_\eta^{-1} H_k$. Из сравнения параметров Койтера $q_{k-1,\tau}$ для несовершенной оболочки с соответствующим параметром q_{k-1} для идеальной оболочки [1, 4] имеем

$$(1.10) \quad q_{k,\tau} = (k+1)q_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, если $q_k > 0$, то $q_{k,\tau} > 0$, если $q_k < 0$, то $q_{k,\tau} < 0$. Таким образом, способ потери устойчивости несовершенной оболочки определяется знаком параметра Койтера для совершенной оболочки, для которой граничные условия, исходная форма срединной поверхности, геометрические размеры, величина и распределение давления совпадают с аналогичными условиями для оболочки, имеющей малые геометрические несовершенства.

Подставим (1.8) в (1.6) и учтем, что $\xi = \xi_m$ в точке экстремума кривой $q(\xi)$. Приравнявая члены при одинаковых степенях ξ_m , с помощью (1.5), (1.10) получим

$$(1.11) \quad q^d \sim d^{k-1} \sqrt{k q_{k-1}} \tau J_\eta^{-1} \int_S \sigma_1 L_1(V_1) ds, \quad d = \frac{k}{k-1}, \quad k = 3, 5, \dots$$

Следовательно, расположение кривой $q(\tau)$ на плоскости (q, τ) определяется функцией $\text{sign}(q_{k-1})$. В [1] показано, что знак параметра Койтера определяется знаком функционала

$$(1.12) \quad J_{\tau_1} = \int_0^1 u_c(r) \left[\int_0^{\tau} \eta(t) t dt \right] dr,$$

где $u_c(r)$ — второе приближение в теории Койтера для осесимметричной составляющей нормального перемещения. Отсюда вытекает, что для осциллирующей функции $u_c(r)$ знак функционала J_η и тем самым чувствительность оболочки к малым геометрическим несовершенствам зависят от η -функции. Последняя определяется условиями эксперимента: конструктивными особенностями экспериментальной установки, способом нагружения и т. д.

Проведенное исследование позволяет выделить класс несовершенных оболочек, чувствительных к возмущению давления. Пусть некоторая оболочка имеет осциллирующую функцию $u_c(r)$ в точке $p \in \{p_n\}$. Тогда, согласно (1.12), (1.9), (1.8), изменяя распределение возмущающего давления по поверхности оболочки, можно изменить знак параметра $q_{2,\tau}$, а значит, и окрестность существования малой формы равновесия. Так как между механическим явлением потери устойчивости оболочки под действием консервативной нагрузки и свойством бифуркации решения существует вполне определенное соответствие, то можно оболочки, бифуркация равновесия которых зависит от η -функции, отнести к классу оболочек, чувствительных к внешним возмущениям давления. Заметим, что выражение (1.11) при $k = 3$ и $\eta(r) = 1$ получено в [4, 5].

2. Начальное закритическое деформирование оболочек вращения. Обозначим через $\mu = h/a\gamma$ относительную толщину оболочки, где a — радиус в плане, $\gamma^2 = 12(1-\nu^2)$, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки. Если безразмерный переход совершить по формулам $\Phi_R = E\mu\Phi/a$, $w_R = aw$, $\rho_R = E\mu^2/\gamma$, $r_R = ar$ (E — модуль Юнга), то уравнения конечных перемещений в смешанной форме

могут быть взяты в виде

$$(2.1) \quad \begin{vmatrix} \mu \Delta^2 & -\Delta_r \\ \Delta_r & \mu \Delta^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w \\ \Phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L(w, \Phi) \\ -\frac{1}{2} L(w, w) \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$L(w, \Phi) = w'' H \Phi + \Phi'' H w - 2 I w I \Phi, \quad H(\cdot) = r^{-1}[(\cdot)' + r^{-1}(\cdot)''],$$

$$I(\cdot) = r^{-1}[(\cdot)' r^{-1} - (\cdot)''], \quad (\cdot)' = \partial/\partial r, \quad (\cdot)'' = \partial^2/\partial r^2,$$

$$a) \quad r \in \partial\Omega, \quad w = w'' + v H w = 0, \quad H \Phi = -I \Phi = 0;$$

$$b) \quad r \in \partial\Omega, \quad w = w' = 0, \quad H \Phi = -I \Phi = 0;$$

$$v) \quad r \in \partial\Omega, \quad w = w' = 0, \quad \Phi'' - v H \Phi = 0, \quad \Phi''' - H \Phi + 2(1+v)(\Phi''' + \Phi'') + v(\Phi - \Phi'' + \Phi' - \Phi''' + 2\Phi'') = 0,$$

где $\Delta_r(\cdot) = r^{-1} \{ [r a R_\Phi^{-1}(\cdot)']' + a (R_r r)^{-1}(\cdot)'' \}$; R_Φ, R_r — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки; (φ, r) — полярные координаты. Уравнения (2.1) описывают деформирование упругой пологой оболочки, срединная поверхность которой отождествлена с координатной плоскостью. При выводе уравнений (2.1) используются гипотезы Кирхгофа — Лява, тем самым предполагается, что $\mu \ll 1$.

Анализ неосесимметричной бифуркации из осесимметричного состояния $(w_0(r), \Phi_0(r))$ будем проводить методом Пуанкаре — Ляпунова [6, 7]. Для этого уравнение (2.1) и граничные условия записываются в возмущениях. Линеаризацией их в окрестности нуля строится задача на собственные значения и ей сопряженная. Из сравнения последних находится связь между собственными функциями указанных задач. Используя эти функции, проводим регуляризацию возмущенной задачи. После преобразования решение возмущенной задачи аппроксимируется отрезком ряда Пуанкаре — Ляпунова

$$X \sim \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^k X_{ij} \xi^i q^j, \quad X = (w - w_0, \Phi - \Phi_0),$$

что сводит задачу к рекуррентной последовательности краевых задач: нелинейная задача об осесимметричном деформировании оболочки

$$(2.2) \quad \mu A u - r \theta v = r^{-1} \left(u v + \int_0^r p_n t dt \right), \quad A(\cdot) = \left[r^{-1} \frac{d}{dr} r(\cdot) \right]',$$

$$\mu A v + r \theta u = -\frac{1}{2} r^{-1} u^2, \quad \theta = a/R_\Phi, \quad \{u, v\} = \{w, \Phi\}',$$

$$r = 0, 1, \quad u' + v u = v = 0, \quad u = v = 0, \quad u = v' - v v = 0;$$

задача на собственные значения

$$(2.3) \quad \begin{vmatrix} \mu \Delta^2 + r^{-1} v(\cdot)'' + v' H & -\Delta_r - u' H - r^{-1} u(\cdot)'' \\ \Delta_r + u' H + r^{-1} u(\cdot)'' & \mu \Delta^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_n \\ \Phi_n \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_i^{(1)} w_n = \lambda_i^{(2)} \Phi_n = 0, \quad i = 1, 2, \quad r \in \partial\Omega;$$

задачи о закритическом деформировании

$$(2.4) \quad \left[B + \begin{vmatrix} w_n S_w & w_n S_\Phi \\ -\Phi_n S_\Phi & -\Phi_n S_w \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} w_{20} \\ \Phi_{20} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L(\Phi_n, w_n) \\ -\frac{1}{2} L(w_n, w_n) \end{vmatrix},$$

$$\lambda_i^{(1)} w_{20} = \lambda_i^{(2)} \Phi_{20} = 0, \quad i = 1, 2, \quad r \in \partial\Omega, \quad S_w(\cdot) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r w_n(\cdot) dr d\varphi, \quad w \rightleftharpoons \Phi;$$

$$(2.5) \quad \left[B + \begin{vmatrix} w_n S_w & w_n S_\Phi \\ -\Phi_n S_\Phi & -\Phi_n S_w \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} w_{01} \\ \Phi_{01} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \eta \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_i^{(1)} w_{01} = \lambda_i^{(2)} \Phi_{01} = 0, \quad i = 1, 2, \quad r \in \partial\Omega$$

(B — матрица 2×2 из (2.3)).

Разложим функцию $\eta(r, \varphi)$ в ряд Фурье. Введем обозначение $q = q_n \eta_n(r)$, где $\eta_n(r)$ — коэффициенты разложения. Используя альтернативу Фредгольма и явные свойства краевых задач (2.2) — (2.5) для коэффициентов X_{ij} , можно показать, что при-

ближенное уравнение разветвления имеет вид

$$(2.6) \quad L_{01}q_n + L_{11}\xi q_0 + L_{30}\xi^3 + \dots = 0,$$

$$L_{01} = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta_n(t) \omega_n(t) t dt, \quad L_{11} = - \int_0^1 u_c(t) \left[\int_0^t \eta_0(r) r dr \right] dt,$$

$$L_{30} = \int_0^1 \left[v_c g_2 + u_c g_1 + \frac{1}{2} r (\omega_{2n} h_1 - h_{2n} h_2) \right] r dr;$$

$$(2.7) \quad \{w_{20}, \Phi_{20}\} = \{\omega_{2n}(r), f_{2n}(r)\} \cos 2(n\varphi + \alpha_n) + \left\{ \int_1^r u_c(t) dt, \int_0^r v_c(t) dt \right\},$$

$$\{w_n, \Phi_n\} = \{\omega_n(r), f_n(r)\} \sin(n\varphi + \alpha_n),$$

где $\{\omega_{2n}(r), f_{2n}(r)\}$, $\{u_c(r), v_c(r)\}$ — вектор-функции решения неоднородных краевых задач, которые получаются из (2.4) с помощью (2.7); g_1, g_2, h_1, h_2 — неоднородные части соответствующих краевых задач; α_n — начальная фаза для неосесимметричных гармоник. Из уравнения разветвления вытекает, что если $q_n \neq 0$, $q_0 \neq 0$, то от соотношения параметров q_n и q_0 зависит число ответвившихся форм равновесия. Этот результат получается применением диаграммной техники Ньютона к уравнению (2.6) [8].

Пусть возмущающее давление осесимметричное и $L_{30} \neq 0$, $L_{11} \neq 0$. Тогда в малой окрестности критического давления ответвляется одна неосесимметричная форма, имеющая положительную амплитуду ξ . Механические величины для этой формы (перемещения, обобщенные напряжения, деформации) могут быть представлены в виде ряда по степеням q_0 , кратным $1/2$. Если $\text{sign}(L_{30}L_{11}) < 0$, то несущая способность оболочки не исчерпывается при достижении критического давления, а неосесимметричная форма, когда она энергетически выгодна, наблюдается в эксперименте. Процесс потери устойчивости происходит в виде явления выпучивания. Если $\text{sign}(L_{30}L_{11}) > 0$, то бифуркация сопровождается хлопком. Другое разложение Пуанкаре — Ляпунова возникает при следующих ограничениях на уравнение разветвления: $L_{30} = 0$, $L_{11} \neq 0$, $L_{50} \neq 0$ (коэффициент L_{40} равен нулю). В этом случае механические величины представимы в виде ряда по степеням q_0 , кратным $1/4$. Выпучивание оболочки происходит, как и раньше, но необходимо заменить L_{30} на L_{50} .

Пусть $L_{11} \neq 0$, $L_{30} \neq 0$, $L_{01} \neq 0$. Тогда существует уравнение кривой $q_n = 2L_{11}q_0 \sqrt{q_0/3g}/3L_{01}$, $g = -L_{30}/L_{11}$, разделяющей плоскость (q_0, q_n) на области, в каждой из которых постоянным является количество форм равновесия. Обозначим ветви этой кривой через q_n^+ и q_n^- . Используя диаграммную технику Ньютона для $g > 0$, можно показать, что в правой полуокрестности начала координат, заключенной между q_n^- и q_n^+ , существуют три неосесимметричные формы. В области, лежащей выше q_n^+ и ниже q_n^- , ответвляется одна форма равновесия. Если $q_n > q_n^+$, то $\xi > 0$ при $L_{11}L_{01} > 0$. Если $q_n < q_n^-$, то $\xi > 0$ при $L_{11}L_{01} < 0$. Для $g < 0$ расположение на плоскости (q_0, q_n) описанных областей будет зеркально отраженным относительно оси q_0 .

Из вышеизложенного следует, что количество малых неосесимметричных форм зависит от знака параметра Койтера и знака величины $(L_{11}L_{01})$. Таким образом, оболочка будет чувствительной к распределению возмущающего давления, если u_c или ω_n — осциллирующие функции.

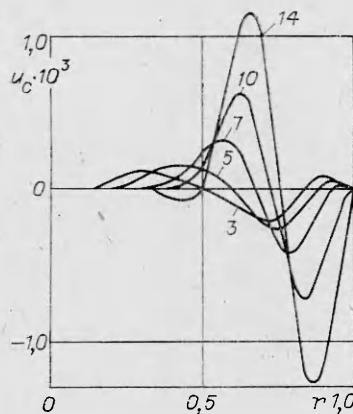
Обозначим $\dim(\text{Ker } B)$ — размерность подпространства нулей оператора B в точке $p = p_n$ — через l . Если $l > 1$, то для анализа форм равновесия необходимо использовать многомерный вариант метода Пуанкаре — Ляпунова. Положим $l^+ = \max l$.

Ниже установлено, если $p > p^*$, где $p^* = \min_n \{p_n\}$, но меньше некоторого $p^{\lambda, p}$, то $l^+ = 2$. Если $p^+ \leq p < p^-$, то $l^+ = 4$. В последнем случае размерность l может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Отметим ряд общих закономерностей, характеризующих изменение $\dim(\text{Ker } B)$. При возрастании p величина l^+ не уменьшается. Если l^+ изменяется, то лишь на две единицы, а стремление p к нулю может повышать значение l^+ .

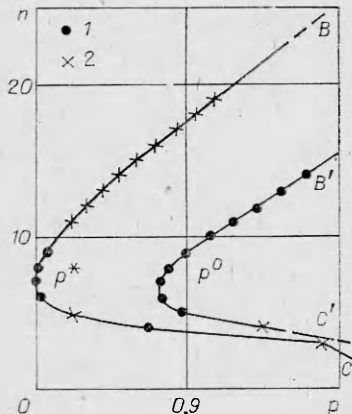
3. Начальное закритическое деформирование конической оболочки. Ниже приведены результаты численного интегрирования уравнений конической оболочки (2.1в), нагруженной равномерным внешним давлением, материал которой имеет коэффициент Пуассона $\nu = 0,34$.

На рис. 1 показано развитие $u_c(r)$ при $\lambda = 14,22$ и различных n . Причем номер кривой соответствует номеру собственного значения $\{p_n\}$. Здесь и далее геометрия оболочки характеризуется параметром λ , равным $\sqrt{\theta/\mu}$, где θ — полураствор оболочки.

Видно, что $u_c(r)$ — осциллирующая функция. Следовательно, неосесимметричная бифуркация формы равновесия тонкой конической оболочки, а тем самым и способ



Р и с. 1



Р и с. 2

потери устойчивости зависят от возмущающего давления в окрестности точек спектра. Более того, согласно (1.11), чувствительность этой оболочки к геометрическим несовершенствам зависит от η -функции. Этот вывод носит достаточно общий характер, поскольку он справедлив и для сферической оболочки [1]. Такое же заключение можно сделать для цилиндрической оболочки, с защемленным краем и сжатой в осевом направлении. Это вытекает из выражения (1.11) и численных результатов [9]. Данные, представленные на рис. 1, кроме того, указывают, что для фиксирования способа потери устойчивости (скажем, в виде явления хлопка) необходимо для каждого n задавать отвечающее ему возмущение η . Причем в таких задачах важно контролировать возмущения давления прежде всего в окрестности края. Для тонкой конической оболочки этот эффект особенно выражен, когда неосесимметричная форма характеризуется большим числом волн (см., например, кривые $n = 10, 14$).

На рис. 2 приведена целочисленная функция $n(p_n)$ для $\lambda = 14,22$, где n равно количеству волн в окружном направлении малой неосесимметричной формы. Здесь точки 1 соответствуют неосесимметричным формам, бифуркация которых при равномерном внешнем нагружении сопровождается хлопком, 2 — выпучиванию конической оболочки.

Анализ механических явлений, отвечающих ветвлению решения, проводился по следующей схеме. Численно определялись значения функционалов уравнения разветвления (2.6). С использованием диаграммы Ньютона и теоремы Пьюнзе устанавливалась окрестность существования малой формы равновесия ξ_n и проводилось исследование потенциальной энергии Π_n в окрестности ξ_n . Если при $p > p_n$ вторая вариация

$$(3.1) \quad \delta^2 \Pi_n \equiv -4\xi_n^2 L_{30}$$

больше нуля, то бифуркация решения соответствует явлению выпучивания, если при $p < p_n$ справедливо неравенство $\delta^2 \Pi_n < 0$, то бифуркация решения сопровождается хлопком оболочки. Применяя принцип Гамильтона — Остроградского в приближении Ландау [10], уравнение динамики для ξ_n приведем к виду

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \sigma L_{11} \xi_n + L_{30} \xi_n^3, \quad \sigma = p - p_n.$$

Отсюда можно получить, что в первом случае ветвления оболочка находится в автоколебательном режиме, во втором — наблюдается жесткая потеря устойчивости, в процессе которой растет экспоненциально неосесимметричное возмущение.

Из рис. 2 видно, что $p_n = \min_n \{p_n\}$ — простая точка спектра. При $0,392 < p < 0,804$ функция $n(p_n)$ имеет две ветви, описывающие быстро и медленно осциллирующие волны, при $p > 0,804$ — четыре ветви. Две ветви возрастают с увеличением давления, две убывают. По этой причине при движении по кривой нагружения $w(p)$ возможны два типа потери устойчивости, когда $p \in [0,804; 1,44]$. Если точка спектра принадлежит ветви Bp^* , то имеет место выпучивание, если $B'p^0$, то — хлопок. Таким образом, чередование точек спектра на кривой $w(p)$, принадлежащих ветвям Bp^* и $B'p^0$, приводит к большому разнообразию неосесимметричных форм потери устойчивости. Для рассматриваемой оболочки давление $p = 0,804$ двукратно вырожденное, следовательно, в окрестности этой точки начальное закритическое деформирование весьма чувствительно к геометрическим несовершенствам [11].

Численное интегрирование уравнений конической оболочки в широком диапазоне изменения λ выявило ряд закономерностей, характерных для неосесимметричных форм потери устойчивости. Когда для некоторых λ и p у функции $n(p_n)$ появляются «новые» ветви (как, например, в окрестности точки p^0), тогда на кривой нагружения

встречается особенно много неосесимметричных форм, у которых параметр Койтера g отрицателен. Эти оболочки отличаются тем, что наличие геометрических несовершенств, имеющих ту же группу вращения, что и соответствующая собственная функция, понижает p -координату точки бифуркации. В противоположность этому точки бифуркации (точки 2 на рис. 2) сдвигаются вправо при наличии такого типа геометрических несовершенств. Детальный анализ методом Пуанкаре — Ляпунова каждой точки бифуркации показал, что при $\lambda = 14,22$ от осесимметричной формы отщепляется 35 форм, имеющих положительную амплитуду ξ , если возмущающее давление неосесимметрично.

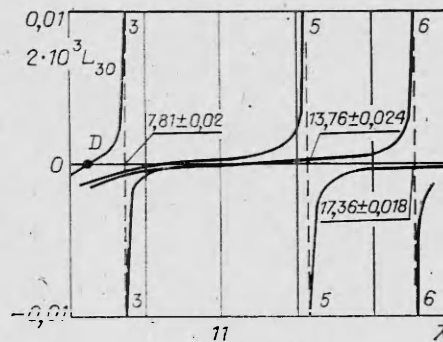


Рис. 3

Отличительная особенность неосесимметричной бифуркации конической оболочки при больших λ состоит в том, что область изменения давления, в которой существует лишь осесимметричная форма, значительно меньше области изменения давления, в которой отщепляются неосесимметричные формы равновесия.

При неосесимметричной бифуркации существует ряд исключений. На ветви p^*c отсутствуют закономерности в чередовании точек спектра. На рис. 3 приведены графики для L_{30} . Номера кривых соответствуют номерам собственных значений $\{p_n\}$. Видно, что при одном λ функционал L_{30} может принимать различные значения при изменении n и, согласно (3.1), меняются знак $\delta^2\Pi_n$ и способ потери устойчивости. В частности, при $\lambda = 14,22$ $L_{30} < 0$ для $n = 5$ и $L_{30} > 0$ для $n = 6$. Этим объясняется изменение характера бифуркации при переходе от $n = 5$ к $n = 6$ на ветви p^*c (см. рис. 2). Заметим, что L_{30} меняет знак либо в окрестности точек непрерывности (как, например, в окрестности точки D), либо в окрестности точек разрывов второго рода. В первом случае для исследования начального закритического деформирования тонкой оболочки в уравнении (2.6) необходимо удерживать члены порядка $O(\xi^\alpha)$, $\alpha > 3$. Во втором случае обычно требуется изменить алгоритм численного интегрирования краевых задач, аппроксимируя решение полиномами Чебышева [12]. Рассматриваемая задача имеет особенность, которая состоит в том, что указанное свойство проявляется не только в задаче на собственные значения, как это имеет место для уравнений Навье — Стокса, но и при анализе старших коэффициентов уравнения разветвления. При локальном нагружении оболочек точки второго типа обнаружены в [5].

В заключение отметим, что при исследовании закритического деформирования оболочек с шарнирно-неподвижным и скользяще-закрепленным опорными контурами не установлено качественно новых особенностей в механизме потери устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларченко В. В. Асимптотический анализ неосесимметричных форм равновесия тонкой пологой сферической оболочки. — ПММ, 1980, т. 44, № 6.
2. Шилькрот Д. И., Вырлан П. М. Об устойчивости геометрически нелинейных оболочек. — ДАН СССР, 1975, т. 225, № 4.
3. Kornev V. M., Ermolenko V. M. Sensibility of shells to buckling disturbances in connection with parameters of critical loading spectrum. — Int. J. Eng. Sci., 1980, v. 18, p. 379.
4. Koiter W. T. The stability of elastic equilibrium. Air force flight dynamics lab. tech. rept. AFFDL-TR-70-25, 1970.
5. Fitch J. R. The buckling and post-buckling behaviour of spherical caps under concentrated load. — Int. J. Solids Structures, 1968, v. 4.
6. Poincare H. Sur le problems de trois corps et les equations de la dynamique. — Acta Math., 1890, v. 13.
7. Ляпунов А. М. Об одной задаче Чебышева. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1959, т. 3.
8. Чеботарев Н. Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики. Собр. соч. М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1950, т. 3.
9. Ямаки Н. Закритическое поведение и чувствительность к несовершенствам круговой цилиндрической оболочки, подверженной сжатию. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV междунар. конф. IUTAM. М.: Мир, 1979.
10. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. — ДАН СССР, 1944, т. 44, № 8.
11. Byskov E., Hutchinson J. M. Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells. — AIAA J., 1977, v. 15, N 7. Рус. пер. Ракетн. техника и космонавтика, 1977, № 7.
12. Бабенко К. И., Васильев М. М. О доказательных вычислениях в задаче об устойчивости плоского течения Пуазейля. — ДАН СССР, 1983, т. 273, № 6.

Поступила 10/VII 1984 г.