

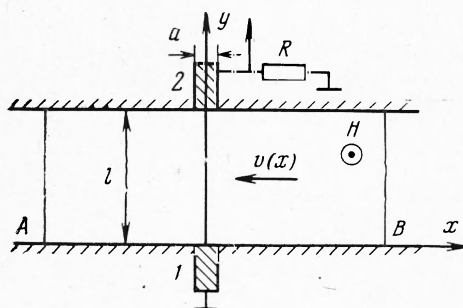
**О МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ИЗМЕРЕНИЙ  
МАССОВОЙ СКОРОСТИ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ,  
ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ТЕЧЕНИЯ**

**А. П. Ершов**

(Новосибирск)

Рассматриваются контактные измерения в МГД канале изменяющихся вдоль канала массовой скорости и электропроводности. Найдены условия, при которых возможно измерение профиля массовой скорости, и оценена погрешность измерений. Показано, что МГД измерения электропроводности возможны при известном заранее профиле массовой скорости.

1. При движении проводящей среды во внешнем магнитном поле возникает электрическое поле, зависящее от скорости движения. Если эта скорость постоянна, то ее можно определить, измерив разность потенциалов между двумя электродами, помещенными в поток. Когда между



электродами включено сопротивление, ток, возникший из-за этой разности потенциалов, зависит от сопротивления среды между электродами и, следовательно, от электропроводности среды; измерив ток, можно найти электропроводность.

В [1,2] изложена теория измерения скорости в МГД канале, учитывающая неоднородность магнитного поля и изменения скорости и электропроводности поперек канала. Часто могут быть существенны изменения этих величин вдоль канала. Например, при движении по каналу детонационной волны измерения профилей электропроводности и массовой скорости могли бы дать информацию о химической реакции во взрывчатом веществе. Зарегистрированы изменения скорости вдоль направления движения в экспериментах с ударными трубами [3] и высокоскоростными потоками газа [4]. В имеющихся экспериментальных работах возможность влияния изменений скорости на результаты измерений не рассматривается.

В [2] приведено решение задачи об электрическом поле в канале при постоянной электропроводности с учетом зависимости скорости от координаты вдоль канала. Решить аналогичную задачу при произвольной зависимости электропроводности от продольной координаты было бы сложно. Для выяснения возможности магнитогиродинамических измерений профилей электропроводности и скорости точного решения этой задачи не требуется. В данной работе найдены необходимые условия для таких измерений и оценены погрешности, связанные с изменениями скорости вдоль канала.

2. Будем считать, что измерения проводятся в МГД канале прямоугольного сечения, изображенном на фигуре, хотя все результаты применимы

к случаю, когда скорость и электропроводность изменяются вдоль канала. Пусть  $v(x)$  — скорость среды,  $\sigma(x)$  — электропроводность,  $H$  — магнитное поле,  $l$  — высота канала,  $A$  и  $B$  — электроды,  $R$  — сопротивление,  $U$  — разность потенциалов,  $I$  — ток,  $\mathcal{E}$  — электродвижущая сила.

В МГД канале при движении среды возникает электрическое поле  $E$ , зависящее от скорости движения  $v$  и магнитного поля  $H$ . Если скорость постоянна, то ее можно определить, измерив разность потенциалов  $U$  между двумя электродами, помещенными в поток. Когда между электродами включено сопротивление  $R$ , ток  $I$ , возникший из-за этой разности потенциалов, зависит от сопротивления  $R$  и электропроводности  $\sigma$  среды между электродами. Измерив ток  $I$ , можно найти электропроводность  $\sigma$ .

для канала с произвольным поперечным сечением. Проводящая среда движется вдоль канала, ее скорость в некоторый момент времени  $\mathbf{v} = (v(x), 0, 0)$ . Внешнее однородное магнитное поле  $\mathbf{H}$  направлено по оси  $z$  (перпендикулярно плоскости фигуры). Электропроводность среды  $\sigma = \sigma(x)$ . Электрод 1 заземлен, электрод 2 соединен с ним через сопротивление  $R$ . Стенки канала — изоляторы. Измеряемая величина — напряжение  $V$  между электродами. Требуется определить зависимость напряжения от распределения скорости и электропроводности в потоке.

Далее будут использоваться следующие предположения:

1) электропроводность среды  $\sigma \gg \tau^{-1}$ , где  $\tau$  — характерное время изменения профилей  $v(x)$  и  $\sigma(x)$ , т. е. время изменения этих величин в некотором сечении канала (задача стационарна);

2) можно пренебречь влиянием магнитного поля на движение среды, а также индуцированным магнитным полем, так что скорость среды и магнитное поле можно считать заданными;

3) закон Ома для среды можно записать в виде

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v}, \mathbf{H}])$$

Условия 1) — 3) выполняются для широкого класса явлений.

В [2] показано, что при выполнении условий 1) — 3) электрическое поле  $\mathbf{E}$  в среде потенциально,  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , а потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi + \frac{1}{\sigma}(\nabla\sigma\nabla\varphi) = \frac{1}{c} \left( \frac{\nabla\sigma}{\sigma} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) + \frac{1}{c} (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v})$$

В данной геометрии это уравнение принимает вид

$$(2.1) \quad \Delta\varphi + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$$

Граничные условия для  $\varphi$  на изолирующих стенках

$$(\nabla\varphi)_n = (1/c) ([\mathbf{v}, \mathbf{H}]_n)$$

Потенциал электрода 1  $\varphi(1) = 0$ , потенциал электрода 2  $\varphi(2) = V$ . Предположим также, что в сечениях канала  $A$  и  $B$   $x$ -компонента плотности тока равна нулю, т. е.  $\partial\varphi/\partial x = 0$  (например, на границах проводящей пробки газа в ударной трубе); эти сечения могут находиться и при  $x = \pm\infty$ .

Решив уравнение (2.1) с граничными условиями, можно определить потенциал  $V$  электрода 2 из закона Ома для внешней цепи

$$(2.2) \quad \int_{S(2)} \sigma \left( -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{vH}{c} \right) ds = \frac{V}{R}$$

где  $S(2)$  — поверхность электрода 2.

Обозначим характерную величину скорости в потоке через  $v_0$  и будем искать  $\varphi$  в виде

$$(2.3) \quad \varphi = \frac{Hyv}{c} + \left( V - \frac{Hlv_0}{c} \right) \psi_0 + \frac{Hlv_0}{c} \psi_1$$

Здесь  $l$  — расстояние между электродами 1 и 2 (см. фигуру), а  $\psi_0$  и  $\psi_1$  — решения следующих граничных задач:

$$(2.4) \quad \Delta\psi_0 + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial\psi_0}{\partial x} = 0, \quad \psi_0(2) = 1$$

$$(2.5) \quad \Delta \psi_1 + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = - \frac{y}{lv_0} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{dv}{dx} \right)$$

$$\psi_1(2) = 1 - \frac{v}{v_0}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = - \frac{y}{lv_0} \frac{dv}{dx} \quad \text{на } A, B$$

(Здесь и далее, если граничное условие не записывается, его следует считать нулевым.)

Можно убедиться, что если  $\psi_0$  и  $\psi_1$  — решения задач (2.4) и (2.5), то потенциал  $\varphi$ , определенный по (2.3), удовлетворяет (2.1) и граничным условиям.

Из (2.2), определяющего  $V$ , имеем

$$- \left( V - \frac{Hlv_0}{c} \right) \int_{S^{(2)}} \sigma \frac{\partial \psi_0}{\partial y} ds - \frac{Hlv_0}{c} \int_{S^{(2)}} \sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial y} dS = \frac{V}{R}$$

или

$$(2.6) \quad - \left( V - \frac{Hlv_0}{c} \right) \frac{1}{R_\sigma} - \frac{Hlv_0}{c} \alpha = \frac{V}{R}$$

$$R_\sigma = \left( \int_{S^{(2)}} \sigma \frac{\partial \psi_0}{\partial y} ds \right)^{-1}, \quad \alpha = \int_{S^{(2)}} \sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial y} ds$$

Величина  $R_\sigma$  представляет собой сопротивление проводящей среды между электродами 1 и 2. Это следует из граничной задачи (2.4):  $R_\sigma^{-1}$  — ток на электрод 2 при напряжении на нем, равном единице. Из (2.6) получаем

$$(2.7) \quad V = \frac{Hlv_0}{c} \frac{R}{R + R_\sigma} (1 - \alpha R_\sigma)$$

При постоянной скорости среды,  $v(x) = v_0$ , правые части уравнения и граничных условий (2.5) обращаются в нуль, так что  $\psi_1 = 0$  и  $\alpha = 0$ . Тогда (2.7) переходит в выражение  $V = Hlv_0 c^{-1} R / (R + R_\sigma)$ .

В (2.7)  $V$  и  $R_\sigma$  определяются экспериментально; определить  $\alpha$  нельзя, так как  $\alpha$  зависит от неизвестных заранее профилей  $v(x)$  и  $\sigma(x)$ .

3. Измеряемое напряжение  $V$  согласно (2.7) зависит от характерной скорости течения  $v_0$ . Это может показаться странным, так как выбор  $v_0$  произволен. Рассмотрев граничные задачи (2.4), (2.5), можно убедиться, что произведение  $v_0(1 - \alpha R_\sigma)$  не зависит от выбора  $v_0$ . Поэтому в данный момент времени характерной скоростью потока можно считать скорость при  $x = 0$ , т. е. на середине электродов. Измерив  $V$ , можно по (2.7) найти скорость  $v_0$  в данном ( $x = 0$ ) сечении канала в данный момент времени при условии  $\alpha R_\sigma \ll 1$ . Ошибка определения скорости, вызванная ее изменениями вдоль канала,  $\delta v / v = \alpha R_\sigma$ .

Ошибка будет мала при достаточно медленном изменении скорости вдоль канала. Ниже показано, что измерения возможны, если скорость мало меняется на размерах порядка ширины канала  $l$  и ширины электрода  $a$  (см. фигуру), т. е. должны выполняться условия  $l \ll \Delta$ ,  $a \ll \Delta$ , где  $\Delta$  — характерный размер изменения скорости.

Величина  $\alpha$  определяется правой частью уравнения и граничными условиями краевой задачи (2.5) для потенциала  $\psi_1$ . Представим  $\psi_1$  в виде  $\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12}$ , где  $\psi_{11}$  — решение задачи

$$(3.1) \quad \Delta \psi_{11} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} = 0, \quad \psi_{11}(2) = 1 - \frac{v}{v_0}$$

а  $\psi_{12}$  — решение задачи

$$(3.2) \quad \Delta \psi_{12} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial \psi_{12}}{\partial x} = - \frac{y}{lv_0} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{dv}{dx} \right)$$

$$\frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} = - \frac{y}{lv_0} \frac{dv}{dx} \quad \text{на } A, B$$

Тогда

$$\alpha R_{\sigma} = R_{\sigma} \int_{S^{(2)}} \sigma \frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} ds + R_{\sigma} \int_{S^{(2)}} \sigma \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} ds = \alpha_1 R_{\sigma} + \alpha_2 R_{\sigma}$$

Произведения  $\alpha_1 R_{\sigma}$  и  $\alpha_2 R_{\sigma}$  оценим по отдельности. Так как

$$\psi_{11}(2) = 1 - \frac{v}{v_0} \sim \frac{x}{v_0} \frac{dv}{dx} \sim \frac{a}{\Delta}$$

а  $\psi_0(2) = 1$ , то  $\alpha_1 R_{\sigma}$  имеет порядок  $a / \Delta$ . Оценим  $\alpha_2 R_{\sigma}$ . Будем предполагать, что скорость  $v(x)$  мало меняется на расстоянии порядка  $l$ , т. е.  $l \ll \Delta$ , и что характерный размер изменения электропроводности равен по порядку величины (или превышает)  $\Delta$ . Тогда правая часть (3.2) имеет порядок  $\Delta^{-2}$ . На расстояниях порядка  $l$  от электродов  $\Delta \psi_{12} \sim \psi_{12} / l^2$ , так как  $l$  — характерный размер по  $y$ , и поэтому  $\psi_{12} \sim l^2 / \Delta^2$ , а  $\partial \psi_{12} / \partial y \sim l / \Delta^2$ . Производная  $\partial \psi_0 / \partial y \sim 1 / l$ .

Рассмотрим область течения  $G$  ( $l \geq y \geq l/2$ ,  $|z| \leq b/2$ ,  $B \geq x \geq A$ ), где  $b$  — ширина канала в направлении  $z$ ,  $b \sim l$ . Если умножить уравнение (3.2) на  $\sigma$  и проинтегрировать по объему области  $G$ , используя теорему Гаусса и граничные условия на плоскостях  $A$ ,  $B$  и на изолирующих стенках, то можно получить

$$\int_{S^{(2)}} \sigma \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} ds = \int_D \sigma \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} ds$$

где первый интеграл берется по поверхности электрода 2, а второй по границе  $D$  ( $y = l/2$ ) области  $G$ . Тем же способом можно получить

$$\int_{S^{(2)}} \sigma \frac{\partial \psi_0}{\partial y} ds = \int_D \sigma \frac{\partial \psi_0}{\partial y} ds$$

Поэтому

$$(3.3) \quad \alpha_2 R_{\sigma} = \left( \int_D \sigma \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} ds \right) \left( \int_D \sigma \frac{\partial \psi_0}{\partial y} ds \right)^{-1}$$

Переход к интегрированию по средней плоскости течения  $D$  удобен тем, что на ней  $\partial \psi_{12} / \partial y$  и  $\partial \psi_0 / \partial y$  не имеют особенностей.

Производные  $\partial \psi_{12} / \partial y$  и  $\partial \psi_0 / \partial y$  по-разному ведут себя при  $|x| \gg l$ :  $\partial \psi_{12} / \partial y$  имеет порядок  $l / \Delta^2$  в той области, где  $v^{-1} dv / dx \sim \Delta^{-1}$ , т. е. при  $x \lesssim \Delta$ , а  $\partial \psi_0 / \partial y$  спадает при  $|x| \gg l$ , как  $x^{-2}$ , так что основной вклад в интеграл в знаменателе (3.3) вносит часть области  $D$ , где  $|x| \sim l$  (предполагается, что  $a \lesssim l$ ).

Эти соображения позволяют оценить ошибку

$$\alpha_2 R_{\sigma} \sim \sigma \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} b \Delta \left( \sigma \frac{\partial \psi_0}{\partial y} b l \right)^{-1} \sim \frac{l}{\Delta^2} \Delta \left( \frac{1}{l} l \right)^{-1} \sim \frac{l}{\Delta}$$

Для полной ошибки при МГД измерениях переменной вдоль потока скорости получаем

$$(3.4) \quad \delta v / v = (\alpha_1 + \alpha_2) R_{\sigma} = O(a / \Delta) + O(l / \Delta)$$

Отсюда следует, что выгодно использовать тонкие ( $a \ll l$ ) электроды. При этом условии

$$(3.5) \quad \delta v / v = O(l / \Delta)$$

Следовательно, МГД измерения массовой скорости должны производиться при условии  $a \ll l \ll \Delta$ ; тогда порядок величины ошибки дается формулой (3.5). Если  $l \ll \Delta$  и  $a \sim l$ , то ошибка определяется формулой (3.4). В [4], например,  $a / \Delta \approx 10^{-2}$ ,  $l / \Delta \sim 10^{-1}$ , ошибка  $\sim 10\%$ .

В том случае, когда  $l \gg \Delta$ , вместо (3.4) тем же способом можно получить, что  $\delta v / v = O(1)$ . Поэтому для измерений профиля массовой скорости в детонационной волне, например, МГД метод не пригоден, так как детонационная волна может распространяться по заряду лишь при  $l \gg \Delta$ .

4. Из (2.7) можно определить ток  $I$ , текущий по проводящей среде

$$(4.1) \quad I = \frac{V}{R} = \frac{Hlv_0}{c} \frac{1 - \alpha R_\sigma}{R + R_\sigma}$$

Рассмотрим величину

$$(4.2) \quad U = \frac{Hlv_0}{c} - V = \frac{Hlv_0}{c} \frac{R_\sigma(1 + \alpha R)}{R + R_\sigma}$$

При  $v(x) = v_0$   $U$  представляет собой падение напряжения на сопротивлении проводящей среды  $R_\sigma$ . Исключая из (4.1) и (4.2) параметр  $R$ , получаем зависимость  $U(I)$

$$(4.3) \quad U = R_\sigma I + Hlv_0 c^{-1} \alpha R_\sigma$$

т. е. прямую, которая при  $\alpha \neq 0$  (переменная скорость) не проходит через начало координат.

Такие прямые были экспериментально получены в [5]. (Авторы [5] считали, что массовая скорость в зоне реакции детонирующего взрывчатого вещества постоянна, что противоречит данным [6], и объясняли «пороговое напряжение»  $U(0)$  приэлектродными эффектами в присутствии магнитного поля.) Из изложенного следует, что наклон прямых  $U(I)$ , полученных в [5], действительно представляет собой сопротивление между электродами, а пороговое напряжение  $U(0) = Hlv_0 c^{-1} \alpha R_\sigma$ , т. е. отклонение этих прямых от вольт-амперной характеристики  $U = R_\sigma I$ , вызвано изменениями скорости  $v(x)$  по зоне реакции. Заметим, что, хотя геометрия эксперимента [5] отличается от приведенной на фигуре, все рассуждения п. 2, и в частности (2.7), остаются справедливыми; оценка величины  $U(0)$  согласуется с данными [5].

Следовательно, измерение сопротивления проводящей среды между двумя электродами возможно при переменной скорости течения  $v$ , по наклону экспериментальных прямых  $U(I)$ , причем не требуется знать профиль  $v(x)$ . По известной зависимости сопротивления  $R_\sigma$  от времени при движении среды мимо электродов можно найти профиль электропроводности. Эта часть задачи здесь не рассматривается. Один из вариантов ее решения изложен в [7].

Отметим, что МГД метод измерения электропроводности, не имея преимуществ перед электроконтактным методом [8], гораздо сложнее из-за необходимости создавать магнитное поле; поэтому его использование может быть обоснованным в редких случаях, например для проверки результатов других методик.

Поступила 2 X 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. The theory of electromagnetic flow-measurement. Cambridge, Univ. Press., 1962. (Рус. перев.: Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.)



2. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регурер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
  3. *Sakuntala M., Clotfelter B. E., Edwards W. B., Fowler R. G.* Electromotive force in a highly ionized plasma moving across a magnetic field. *J. Appl. Phys.*, 1959, vol. 30, No. 11.
  4. *Пряхин Г. В., Титов В. М., Швецов Г. А.* Исследование высокоскоростных потоков газа электромагнитным методом. *ПМТФ*, 1971, № 3.
  5. *Зилченко А. Д., Смирнов В. Н., Чеилева А. А.* Измерение электропроводности продуктов взрыва при детонации литого состава ТГ 40/60. *Физика горения и взрыва*, 1971, т. 7, № 3.
  6. *Дремин А. Н., Саеров С. Д., Трофимов В. С., Шведов Н. К.* Детонационные волны в конденсированных средах. М., «Наука», 1970.
  7. *Ершов А. П.* О методах измерения электропроводности за фронтом детонации в конденсированных взрывчатых веществах. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 11. Новосибирск, 1972.
  8. *Бриш А. А., Тарасов М. С., Цукерман В. А.* Электропроводность продуктов взрыва конденсированных взрывчатых веществ. *ЖЭТФ*, 1959, т. 37, вып. 6.
-