СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2014. Т. 17, № 4

УДК 517.397

# Для каких обратных задач априорная оценка точности приближенного решения может иметь порядок ошибки данных*

А.С. Леонов

Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Каширское шоссе, 31, Москва, 115409
E-mails: asleonov@mephi.ru, ilposed@sumail.ru

**Леонов А.С.** Для каких обратных задач априорная оценка точности приближенного решения может иметь порядок ошибки данных // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 4. — С. 339–348.

Доказывается, что глобальная априорная оценка точности приближенных решений линейного операторного уравнения первого рода с возмущенными данными может иметь тот же порядок точности, что и у приближенных данных задачи, только для корректных по Тихонову задач. Предлагается метод оценки качества множества корректности, выбранного для решения обратной задачи, по сравнению с другими множествами. Использование "обобщенного метода невязки на множестве корректности" позволяет устойчиво решить обратную задачу и получить апостериорную оценку точности приближенного решения сравнимую по порядку с точностью данных задачи. Методика иллюстрируется вычислительным примером.

**Ключевые слова:** *линейные обратные задачи, априорная и апостериорная оценка точности, корректность по Тихонову.*

**Leonov A.S.** Which of inverse problems can have a priori approximate solution accuracy estimates comparable in order with the data accuracy // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 4. — P. 339–348.

It is proved that a priori global accuracy estimate for approximate solutions to linear inverse problems with perturbed data can be of the same order as approximate data errors for well-posed in the sense of Tikhonov problems only. A method for assessing the quality of selected sets of correctness is proposed. The use of the generalized residual method on a set of correctness allows us to solve the inverse problem and to obtain a posteriori accuracy estimate for approximate solutions, which is comparable with the accuracy of the problem data. The approach proposed is illustrated by a numerical example.

**Key words:** *linear inverse problems, correctness in the sense of Tikhonov, a priori and a posteriori accuracy estimate.*

## 1. Введение

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Az = u, \tag{1}$$

в котором линейный ограниченный оператор $A$ действует из гильбертова пространства $Z$ в гильбертово пространство $U$. Считаем, что для правой части $u = \bar{u} \in U$ это уравнение разрешимо. Нас интересует его нормальное решение, т. е. решение $\bar{z} \in Z$ с минимальной нормой. Величины $(A, u)$ известны с погрешностями $\eta = (h, \delta)$: даны такая правая часть

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00182-а, 14-01-91151-ГФЕН-а).

$u_\delta \in U$, такой линейный оператор $A_h : Z \to U$ и такие числа $h, \delta$, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$, $\|A - A_h\| \le h$. Так как задача нахождения по данным $(A_h, u_\delta)$ приближения $z_\eta \in Z$ к нормальному решению уравнения (1) часто оказывается некорректно поставленной, то для ее решения применяются регуляризующие алгоритмы (РА) [1]. Многие РА могут быть записаны в форме $z_\eta = R_\eta(A_h)u_\delta$, где $R_\eta(A_h)$ — зависящий от $A_h$ линейный оператор, действующий из $U$ в $Z$. Например, он может иметь вид $R_\eta(A_h) = g_\eta(A_h^* A_h)A_h^*$, где функции $g_\eta(\lambda)$ подробно описаны в [2, 3]. Оператор $R_\eta(A_h)$ должен обладать специальными свойствами, обеспечивающими устойчивость приближенного решения, т. е. сходимость $\|z_\eta - \bar{z}\| \to 0$ при $\eta \to 0$ (см., например, [1–10] и др.).

Важной характеристикой регуляризующего алгоритма является априорная оценка точности полученного приближения. В теории обратных и некорректно поставленных задач принята следующая схема оценки, восходящая к основополагающим работам [4–6]. Фиксируется некоторое множество $M \subset Z$, содержащее точное нормальное решение $\bar{z}$, и вводится величина, характеризующая приближенное решение $z_\eta = R_\eta(A_h)u_\delta$:

$$\Delta_M(\eta) = \sup_{\substack{A_h, u_\delta \in \Sigma_\eta(A,z),\\ z \in M}} \|R_\eta(A_h)u_\delta - z\|.$$

Здесь $\Sigma_\eta(A, z) = \{(A_h, u_\delta) : \ \|A - A_h\| \le h,\ \|u_\delta - u\| \le \delta;\ u = Az\}$ — множество всех допустимых приближенных данных уравнения (1) с точным оператором $A$ и решением $z$. Далее, находится функция $\varphi_M(\delta, h)$ такая, что

$$\Delta_M(\eta) \le \varphi_M(\delta, h). \tag{2}$$

Тогда $\|z_\eta - \bar{z}\| \le \varphi_M(\delta, h)$, и функцию $\varphi_M(\delta, h)$ можно принять как априорную оценку точности полученного приближенного решения. Эта схема так называемой глобальной (на множестве $M$) априорной оценки точности в дальнейшем развивалась многими авторами (см., например, [2, 3, 7–10] и библиографию там).

Известно, что оценка (2) существует не для всякого множества $M$. Например, часто нельзя взять $M = Z$ [11]. Наиболее распространены в литературе множества вида $M = M_r^{(p)} = \{z = |A|^p v : v \in Z, \|v\| \le r\}$, где $|A| = (A^*A)^{1/2}$, а $p > 0$ — заданное число. Особенно хорошо изучен случай, когда $A$ — вполне непрерывный инъективный оператор. Тогда для многих РА можно получить на множествах $M_r^{(p)}$ оценку

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \le C(r,p)(\delta + h)^{\frac{p}{p+1}}, \quad C(r,p) = \mathrm{const}, \tag{3}$$

и она будет оптимальной по порядку точности (см., например, [2, 3, 5, 8, 9] и др.).

Рассмотрим для сравнения уравнение (1) с нормально разрешимым оператором $A$. Такой оператор имеет ограниченный псевдообратный оператор $A^+ : U \to Z$, который может быть неустойчивым к возмущениям оператора $A$. Поэтому задача вычисления нормального решения $\bar{z} = A^+\bar{u}$ уравнения (1) с возмущенным оператором является в общем случае некорректно поставленной, а в случае точно заданного ($h = 0$) нормально разрешимого оператора $A$ — корректной (устойчивой) задачей. В [2, 12] и других работах показано, что для таких операторов $A$ и многих РА приближенные решения вида $z_\eta = g_\eta(A_h^* A_h)A_h^* u_\delta$ оптимальны по порядку на множестве $M = Z$, и оценка точности имеет вид

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \le C_0(\delta + h), \quad C_0 = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Оценка (4) качественно и количественно отличается от оценки (3) тем, что она по порядку сравнима с погрешностями данных $h, \delta$. Будем в дальнейшем называть оценки вида (4) на множестве $M$ *линейными оценками* (по $\delta$ и $h$).

Возникают следующие вопросы. 1) Для каких обратных задач вида (1) и каких множеств $M$ найдутся приближенные решения $z_\eta$, имеющие точность как в оценке (4)? 2) Как найти такие приближенные решения?

В этой работе предлагаются ответы на поставленные вопросы.

## 2. Ответ на первый вопрос

Напомним, что обратная задача (1) *корректна по Тихонову* (или *условно корректна*) на множестве $M$ (см. [4]), если:
1) решение задачи существует и принадлежит множеству $M$, так что $u \in AM$;
2) решение единственно на множестве $M$ и поэтому на $AM$ определен обратный оператор $A^{-1}$;
3) решение $z = A^{-1}u \in M$ устойчиво на $M$ в следующем смысле: для любой последовательности $\{u_n\} \in AM$ такой, что $u_n \xrightarrow{U} u \in AM$, выполнено соотношение $z_n = A^{-1}u_n \xrightarrow{Z} z = A^{-1}u$.

Заметим, что для корректных по Тихонову на множестве $M$ задач условие устойчивости 3) может не выполняться при возмущениях оператора $A$. Поэтому корректная по Тихонову задача может быть некорректно поставленной (неустойчивой) для приближенных данных $(A_h, u_\delta) \in \Sigma_\eta(A, z)$. Типичным примером является указанная выше задача вычисления нормального решения уравнения (1) с нормально разрешимым оператором.

Предположим, что ошибка некоторого приближенного решения $z_\eta = R_\eta(A_h)u_\delta$ на заданном множестве $M$ сравнима с ошибкой данных, т. е. выполнена линейная оценка

$$\sup_{\substack{A_h, u_\delta \in \Sigma_\eta(A,z),\\ z\in M}} \|R_\eta(A_h)u_\delta - z\| \le C(\delta + h), \quad C = C(M) = \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

Обычно при приближенном решении операторных уравнений стараются снизить ошибку оператора или инструментальным путем, или путем достаточно точной конечномерной аппроксимации. Поэтому предположим, что $h \le k\delta$, $k = \mathrm{const}$, т. е. ошибка в задании оператора достаточно мала.

**Теорема 1.** *Если выполнена оценка* (5) *и предположение* $h \le k\delta$, $\delta > 0$, *то на множестве* $M$ *обратная задача корректна по Тихонову. При этом выполнены неравенства*:

$$\||A|z\| = \|Az\| \ge \mu\,\|z\| \;\; \forall z \in M; \quad \mu = \mu(M) = \frac{1}{C(k+1)} > 0, \tag{6}$$

$$\|z_1 - z_2\| \le \frac{2}{\mu}\,\|Az_1 - Az_2\| \;\; \forall z_{1,2} \in M. \tag{7}$$

**Доказательство.** Для любого $z \in M$ и фиксированных точных данных $(A, u)$, где $u = Az$, задачи (1) из оценки (5) следует

$$\|R_\eta(A)u_\delta - z\| \le C(\delta + h), \quad \|R_\eta(A)u - z\| \le C(\delta + h) \tag{8}$$

и поэтому

$$\|R_\eta(A)\,(u_\delta - u)\| \le 2C(\delta + h). \tag{9}$$

Далее рассмотрим все такие элементы $u_\delta$, для которых $\|u_\delta - u\| = \delta$. Тогда из (9), вводя элементы $v = (u_\delta - u)/\delta$, $\|v\| = 1$, получим с учетом неравенства $h \le k\delta$:

$$\delta\,\|R_\eta(A)v\| \le 2C(\delta + h) \le 2C\delta(1 + k) \;\; \forall v :\; \|v\| = 1,$$

и поэтому $\|R_\eta(A)\| \le 2C(1+k) \equiv C_1$. Используя это, получим из второго неравенства (8) и из (1):

$$C_1\delta = C\delta(1+k) \ge \|R_\eta(A)Az - z\| \ge \|z\| - \|R_\eta(A)Az\| \ge \|z\| - C_1\|Az\|. \qquad (10)$$

Поэтому для произвольного $\delta > 0$ справедлива оценка

$$\|Az\| \ge \frac{1}{C_1}(\|z\| - C_1\delta).$$

Отсюда получим

$$\||A|z\| = \|Az\| \ge \mu\|z\|, \quad \mu \equiv \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C(M)(1+k)} > 0 \ \ \forall z \in M.$$

Таким образом, из предположения (5) следует неравенство (6).

Теперь докажем неравенство (7). Возьмем произвольные $z_{1,2} \in M$ и введем $u_{1,2} = Az_{1,2}$. Тогда из (5) и оценки $\|R_\eta(A)\| \le 2C(1+k)$ следует

$$\begin{aligned}\|z_1 - z_2\| &\le \|z_1 - R_\eta(A)u_1\| + \|R_\eta(A)(u_1 - u_2)\| + \|R_\eta(A)u_2 - z_2\| \\ &\le C(\delta+h) + 2C(k+1)\|u_1 - u_2\| + C(\delta+h) \le 2C(1+k)\delta + 2C(k+1)\|u_1 - u_2\| \ \forall\delta.\end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$, получим неравенство (7) в виде

$$\|z_1 - z_2\| \le 2C(k+1)\|u_1 - u_2\|.$$

Из этого неравенства следует, что если задача (1) разрешима на $M$, то ее решение единственно на $M$ и устойчиво на $M$. Поэтому задача (1) корректна по Тихонову на множестве $M$. □

Уточним этот результат. Будем обозначать $R(A)$ область значений оператора $A$, а $\ker A$ — его ядро.

**Теорема 2.** *Пусть $h \le k\delta$ и множество $M$ является поглощающим для некоторого всюду плотного в $\overline{R(|A|)}$ множества $V_0$. Пусть, кроме того, на множестве $M$ выполнена оценка (5). Тогда соотношение (6) верно с той же константой $\mu = \mu(M)$ не только на множестве $M$, но и для любого $z \in \overline{R(|A|)}$, и поэтому операторы $|A|$ и $A$ — нормально разрешимы в $Z$.*

**Доказательство.** В силу теоремы 1, соотношение (6) выполнено на $M$. По определению (см., например, [14]) множество $M$ поглощает $V_0$, если для любого $\tilde{z} \in V_0$ найдется число $r > 0$ такое, что $z = r\tilde{z} \in M$. Подставляя такой элемент $z$ в (6) и деля все члены на $r$, можно убедиться, что (6) выполнено и для $\tilde{z}$, т. е. на множестве $V_0$. Далее, в силу плотности множества $V_0$ в $\overline{R(|A|)}$ для любого $z \in \overline{R(|A|)}$, найдется последовательность элементов $v_n \in V_0$ такая, что $\|v_n - z\| \to 0$ $(n \to \infty)$ и $\||A|v_n\| \ge \mu\|v_n\|$. Отсюда, в силу непрерывности оператора $A$, получим

$$\||A|z\| = \|Az\| \ge \mu\|z\| \ \ \forall z \in \overline{R(|A|)},$$

а это в силу разложения $Z = \overline{R(|A|)} \oplus \ker A$ означает нормальную разрешимость операторов $|A|$ и $A$ в $Z$. □

**Следствие 1.** *При выполнении условий теоремы 2 задача вычисления нормального решения уравнения* (1) *корректна по Тихонову в* $Z$.

**Доказательство.** Возьмем два произвольных элемента $z_{1,2} \in \overline{R(|A|)}$. Тогда по теореме 2 выполнено неравенство $\|Az_1 - Az_2\| \geq \mu \|z_1 - z_2\|$. В частности, если $z_{1,2}$ являются нормальными решениями уравнений $Az = u_{1,2}$, где $u_{1,2} = Az_{1,2}$, то

$$\|u_1 - u_2\| \geq \mu \left\|A^+ u_1 - A^+ u_2\right\|.$$

Из этого неравенства и следует корректность по Тихонову на всем пространстве $Z$ задачи вычисления нормального решения уравнения (1). □

**Следствие 2.** *Пусть оператор* $A$ *вполне непрерывен. Если* $h \leq k\delta$, *то линейная оценка* (5) *на множестве* $M = M_r^{(p)} = \{z = |A|^p v : v \in Z, \|v\| \leq r\}$, $p > 0$, *возможна лишь, если оператор* $A$ *— конечномерный.*

**Доказательство.** Множество $M_r^{(p)}$ поглощает всюду плотное в $\overline{R(|A|)}$ множество $V_0 = \{z = |A|^p v : v \in Z, v \perp \ker A\}$. Поэтому по теореме 2 вполне непрерывный оператор $A$ будет нормально разрешимым. Это, однако, возможно лишь для конечномерных операторов. □

**Замечание 1.** Выясним, может ли оценка (5) иметь вид

$$\sup_{\substack{A_h, u_\delta \in \Sigma_\eta(A,z),\\ z \in M}} \|R_\eta(A_h)u_\delta - z\| \leq C(M)(\delta + h)^\beta, \quad \beta > 1. \tag{11}$$

Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве соотношения (10), получим

$$\|R_\eta(A)\| \leq 2C\delta^{\beta-1}(1+k)^\beta$$

и далее

$$C\delta^\beta(1+k)^\beta \geq \|z\| - C\delta^{\beta-1}(1+k)^\beta \|Az\| \quad \forall z \in M.$$

Отсюда после предельного перехода при $\delta \to 0$ следует, что $z = 0$, так что оценка (11) возможна лишь при $M = \{0\}$.

Таким образом, ответ на первый вопрос, поставленный во введении, таков: линейные оценки приближенных решений обратной задачи (1) на множестве $M$ возможны, только если эта обратная задача корректна по Тихонову на множестве $M$. Поэтому, если мы хотим получить при решении некорректной задачи линейную оценку типа (5), мы должны выбрать адекватное множество корректности $M$ и решать обратную задачу на нем. Подход, в котором обратные задачи решаются на множествах корректности, был предложен в работе [15] и затем развивался многими авторами. Однако вопрос о линейных оценках в этих работах не ставился (см. [1, 4, 5] и имеющуюся там библиографию).

## 3. На каком множестве $M$ и как можно получить линейную апостериорную оценку приближений

Возможная структура множества корректности $M$ исследована в [5]. Показано, что для задач типа (1) $M = K + L$, где $K$ — компактное множество, а $L$ — конечномерное подпространство в $Z$.

Линейная оценка точности может и не получаться для некоторых операторов $A$ и множеств $M$. Типичный пример приведен в пункте 1 (см. (3)). Рассмотрим вопрос об условиях, позволяющих получить линейную оценку.

По теореме 1 необходимым условием выполнения оценки (5) является неравенство вида (7), которое выполнено с $\mu = 2\nu$, если

$$\nu = \inf\left\{\frac{\|A(z_1 - z_2)\|}{\|z_1 - z_2\|} : \ z_{1,2} \in M\right\} > 0. \tag{12}$$

Однако такое число $\nu$ нельзя найти, если оператор задачи задан с ошибкой. В этом случае, решая задачу нахождения числа

$$\nu_h = \inf\left\{\frac{\|A_h(z_1 - z_2)\|}{\|z_1 - z_2\|} : \ z_{1,2} \in M\right\} \tag{13}$$

и учитывая неравенство $\nu \geq \nu_h - h$ [2], можно при $\nu_h - h > 0$ получить оценку

$$\|z_1 - z_2\| \leq \frac{1}{\nu_h - h}\|Az_1 - Az_2\| \quad \forall z_{1,2} \in M. \tag{14}$$

Заметим, что неравенство $\nu_h - h > 0$ выполнено “при достаточно малых $h$”, так как $\nu_h \to \nu > 0$ при $h \to 0$. Задачи (12), (13) могут быть решены для многих множеств $M$ с помощью известных методов оптимизации. Ниже будет приведен соответствующий пример.

Имея оценку (14), можно найти приближение к $\bar{z}$ и оценку его точности с помощью *обобщенного метода невязки на множестве корректности* (ОМНМК) (см. [16, с. 69]). В этом методе в качестве приближенного решения обратной задачи принимается любой элемент $z_\eta \in M$, для которого выполнено неравенство

$$\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leq d(\delta + h\|z_\eta\|), \quad d = \text{const} > 1. \tag{15}$$

Такой элемент существует, так как множество $\{z \in M : \ \|A_h z - u_\delta\| \leq d(\delta + h\|z\|)\}$ не пусто: оно содержит точное решение задачи $\bar{z}$, так как $\|A_h\bar{z} - u_\delta\| \leq \delta + h\|\bar{z}\|$. Вопрос о линейных оценках точности метода ОМНМК ранее не ставился. Следующая теорема отвечает на этот вопрос.

**Теорема 3.** *Пусть $h \leq k\delta$ и $\nu_h - h > 0$. Тогда для приближенного решения $z_\eta \in M$, полученного с помощью ОМНМК, справедлива линейная апостериорная оценка точности*

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \leq \frac{1 + d}{\nu_h - h}(1 + k\|z_\eta\|)\delta. \tag{16}$$

**Доказательство.** Из условий аппроксимации точных данных задачи приближенными и из (15) получим

$$\|Az_\eta - A\bar{z}\| \leq \|Az_\eta - A_h z_\eta\| + \|A_h z_\eta - u_\delta\| + \|u_\delta - \bar{u}\| \leq h\|z_\eta\| + d(\delta + h\|z_\eta\|) + \delta.$$

Отсюда и из неравенства (14) следует доказываемая оценка

$$\|z_\eta - \bar{z}\| \leq \frac{1}{\nu_h - h}\|Az_\eta - A\bar{z}\| \leq \frac{1 + d}{\nu_h - h}(\delta + h\|z_\eta\|) \leq \frac{1 + d}{\nu_h - h}(1 + k\|z_\eta\|)\delta. \qquad \square$$

**Замечание 2.** Если оператор задачи (1) известен точно ($h = 0$), то обобщенный метод невязки на множестве корректности переходит в метод невязки на множестве корректности (МНМК): найти такой элемент $z_\delta \in M$, для которого $\|Az_\delta - u_\delta\| \le d\delta$ [16]. Как следует из (16), для приближенных решений, полученных с его помощью, выполняется линейная оценка

$$\|z_\delta - \bar{z}\| \le \frac{1+d}{\nu}\delta. \tag{17}$$

**Замечание 3.** Абсолютную точность приближенного решения, задаваемую оценкой (17), удобно преобразовать в относительную. Для этого введем относительную точность данных $\delta_0$: $\delta_0 = \frac{\delta}{\|u_\delta\|}$, предполагая, что $0 \le \delta_0 < 1$. Тогда из неравенства $\|u_\delta\| \le \|u_\delta - u\| + \|A\bar{z}\| \le \delta_0 \|u_\delta\| + \|A\| \|\bar{z}\|$ получим $\delta = \delta_0 \|u_\delta\| \le \frac{\|A\|\|\bar{z}\|}{1-\delta_0}\delta_0$. Поэтому неравенство (17) можно переписать в виде

$$\frac{\|z_\eta - \bar{z}\|}{\|\bar{z}\|} \le \frac{(1+d)\|A\|}{(1-\delta_0)\nu}\delta_0. \tag{18}$$

Коэффициент $\kappa(M) = \frac{\|A\|}{\nu}$ в этой оценке можно считать “числом обусловленности” для решения обратной задачи на множестве $M$. Оно определяет качество приближенного решения при использовании конкретного множества $M$. Число $\kappa(M)$ можно также использовать как меру качества выбранного множества корректности $M$, сравнивая эти числа для различных множеств, применяемых при решении обратной задачи.

**Замечание 4.** Не следует путать ОМНМК и широко известный обобщенный метод невязки (ОМН) [5, 13], в котором приближенное решение задачи (1) находится в форме $z_\eta = \arg\inf\{\|z\| : \ \|A_h z - u_\delta\| \le \delta + h\|z\|\}$.

Результаты этого пункта дают ответ на второй из поставленных во введении вопросов.

## 4. Численная реализация обобщенного метода невязки на множестве корректности

Метод ОМНМК применялся ранее для решения многих обратных задач в форме *метода расширяющихся компактов* (см., например, [17, 18]). В этой работе предлагается другая численная реализация алгоритма ОМНМК, основанная на следующем утверждении.

**Теорема 4.** *Предположим, что уравнение* (1) *имеет для правой части* $\bar{u} \in U$ *единственное в* $Z$ *решение* $\bar{z} \ne 0$, *причем* $\bar{z} \in M$. *Пусть* $\{z_n\} \subset M$ *— произвольная минимизирующая последовательность для невязки* $\|A_h z - u_\delta\|$ *на множестве* $M$:

$$\lim_{n\to\infty} \|A_h z_n - u_\delta\| = \inf\{\|A_h z - u_\delta\| : \ z \in M\} \equiv \rho. \tag{19}$$

*Тогда по крайней мере для достаточно малых* $\eta = (h, \delta) \ne (0, 0)$ *найдется такой номер* $n(\eta)$, *что для элемента* $z_\eta = z_{n(\eta)}$ *выполнено неравенство* (15).

**Доказательство.** Пусть это не так, и для любого номера $n$ при любом $\eta = (h, \delta) \ne (0, 0)$ справедливо неравенство $\|A_h z_n - u_\delta\| > d(\delta + h\|z_n\|)$. Отсюда и из (19) получим $\rho \ge d\left(\delta + h\overline{\lim}_{n\to\infty}\|z_n\|\right)$, а так как

$$\rho \le \|A_h\bar{z} - u_\delta\| \le \delta + h\,\|\bar{z}\|\,, \tag{20}$$

то

$$d\left(\delta + h\overline{\lim}_{n\to\infty}\|z_n\|\right) \le \delta + h\,\|\bar{z}\|\,. \tag{21}$$

Если $h = 0$, то это неравенство невозможно для $d > 1$, и теорема доказана. Рассмотрим случай $h > 0$. Тогда из (21) следует $\overline{\lim}_{n\to\infty} d\,\|z_n\| \le \|\bar{z}\|$. Значит, множество $\{z_n\}$ ограничено в $Z$ и поэтому слабо компактно: существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\} \subset \{z_n\}$ такая, что $z_{n_k} \rightharpoonup z^*_\eta \in Z$. Тогда в силу слабой полунепрерывности снизу нормы в $Z$:

$$\|\bar{z}\| \ge d\,\left\|z^*_\eta\right\| \ge \left\|z^*_\eta\right\|. \tag{22}$$

При этом из слабой непрерывности линейного оператора $A_h$, слабой полунепрерывности снизу нормы в $U$ и из (19) следует, что $\rho = \lim_{k\to\infty}\|A_h z_{n_k} - u_\delta\| \ge \left\|A_h z^*_\eta - u_\delta\right\|$. Значит, в силу (20), $\left\|A_h z^*_\eta - u_\delta\right\| \le \delta + h\|\bar{z}\|$. Отсюда из (22) и из условий аппроксимации точных данных задачи приближенными получим

$$\|Az^*_\eta - u\| \le \|Az^*_\eta - A_h z^*_\eta\| + \|A_h z^*_\eta - u_\delta\| + \|u_\delta - \bar{u}\| \le h\|z^*_\eta\| + \delta + h\|\bar{z}\| + \delta \le 2(\delta + h\|\bar{z}\|). \tag{23}$$

Следовательно, для семейства $\{z^*_\eta\}$ выполнены условия регулярности [12]:

$$\left\|z^*_\eta\right\| \le \|\bar{z}\|\,, \quad \lim_{\eta\to 0}\left\|Az^*_\eta - u\right\| = 0.$$

Известно [12], что в случае единственности решения $\bar{z} \in Z$ задачи (1) они гарантируют сходимость $z^*_\eta \to \bar{z}$ в $Z$ при $\eta \to 0$. Но тогда из оценки $\|\bar{z}\| \ge d\left\|z^*_\eta\right\|$ предельным переходом получим $\|\bar{z}\| \ge d\,\|\bar{z}\|$, что невозможно при $\bar{z} \ne 0$ и $d > 1$. □

Из теоремы 4 ясно, что элемент $z_\eta = z_{n(\eta)}$ можно принять как приближенное решение в обобщенном методе невязки на множестве корректности.

## 5. Пример получения линейной оценки

Будем решать интегральное уравнение первого рода

$$A_0 z \equiv \int_{-1}^{1} A(x-s)z(s)ds = u(x); \quad x \in [-1,1]; \;\; u(x), z(s) \in U = L_2[-1,1], \tag{24}$$

с ядром $A(x) = \frac{t-\tau}{\pi[x^2 + (t-\tau)^2]}$, $t, \tau = \text{const}$, $0 < \tau < t$. Пусть в задаче (24) $t = 0.5$, $\tau = 0.05$, и решение этой задачи имеет вид $\bar{z} = 0.1/[\pi((x-0.2)^2 + 0.1^2))]$. Задача дискретизировалась по схеме из работ [16, 19] на равномерных сетках $\{x_i\}_{i=1}^N = \{s_i\}_{i=1}^N$ для аргументов $x, s \in [-1,1]$ с $N = 501$. При этом оказалось, что ошибкой дискретизации в задании оператора можно пренебречь по сравнению с рассматриваемыми величинами $\delta = \delta_0\,\|u_\delta\|$.

Сравним два подхода к решению уравнения (24). Первый подход основан на использовании алгоритма ОМНМК и учитывает, что решение $\bar{z}$ входит в параметрический класс

$$M = \left\{ z = \frac{B_0 a_0}{\pi[(x-x_0)^2 + a_0^2]} \, : \, q = (B_0, x_0, a_0) \in M_q \right\}.$$

Здесь $M_q$ — множество априорных ограничений на параметры $q$. В расчетах принималось $M_q = \{-\infty < B_0 < \infty,\ 0.12 \le x_0 \le 0.28,\ 0.06 \le a_0 \le 0.14\}$, т. е. ограничения на параметр $B_0$ не накладывались. Множество $M_q$ представимо в форме $M = K + L$, упомянутой в пункте 3, если считать, что $K = \{(0, x_0, a_0)\}$, $L = \{(B_0, 0, 0)\}$. С помощью оптимизационных модулей пакета МАТЛАБ решалась задача (12) определения числа $\nu$ для выбранного множества $M$. Оказалось, что $\nu \approx 0.071, \kappa \approx 10.983$. Далее находилась апостериорная оценка относительной ошибки приближенных решений, получаемых с помощью ОМНМК при $d = 1.01$. Она вытекает из (17) и имеет вид

$$\Delta_{\mathrm{rel}}(\delta_0) = \frac{\|z_\delta - \bar{z}\|}{\|z_\delta\|} \le \frac{(1+d)\,\|u_\delta\|}{\nu\,\|z_\delta\|}\delta_0 \equiv C_0\delta_0.$$

Расчеты, проведенные с помощью алгоритма ОМНМК для различных относительных уровней возмущения данных $\delta_0$, $10^{-4} < \delta_0 < 0.1$, и для различных реализаций ошибки данных $u_\delta$, показали, что эта оценка выполняется с константой $C_0 \le 15.16$, т. е. $\Delta_{\mathrm{rel}}(\delta_0) \le 15.16\delta_0$.

Второй подход основан на использовании метода регуляризации Тихонова, в котором приближенное решение вычисляется как

$$z^{\alpha(\delta)} = \arg\inf\left\{\alpha(\delta)\,\|z\|_Z^2 + \|A_0 z - u_\delta\|_U^2 :\ z \in Z = L_2[-1,1]\right\},$$

а параметр $\alpha(\delta) > 0$ выбран в соответствие с некоторым правилом (см., например, [13]). В такой форме метод регуляризации не использует никакой дополнительной информации о $\bar{z}$, кроме включения $\bar{z} \in Z$, определяющего гладкость решения. Однако искомое решение само по себе имеет дополнительные особенности. Можно вычислить, что $\bar{z} = |A_0|^p v_0$ с $p \approx 0.33$ и $r = \|v_0\|_{L_2} \approx 0.7667$. Это значит, что $\bar{z} \in M_r^{(p)}$, и для такого решения можно по меньшей мере получить оценку вида (3). Подобная оценка относительной точности для тихоновского приближенного решения $z^{\alpha(\delta)}$ при оптимальном выборе параметра регуляризации $\alpha(\delta)$ (см., например, [2, с. 61]) имеет вид

$$\frac{\left\|z^{\alpha(\delta)} - \bar{z}\right\|}{\|\bar{z}\|} \le \frac{r^{\frac{1}{p+1}}\left(\|u_\delta\|_{L_2}\right)^{\frac{p}{p+1}}}{\|\bar{z}\|}\delta_0^{\frac{p}{p+1}} \approx 1.64\delta_0^{0.25}. \tag{25}$$

Сопоставляя оценки точности, полученные в этих двух подходах к решению задачи (24), можно видеть, что линейная оценка для алгоритма ОМНМК оказывается существенно лучше оценки (25) при “малых” $\delta_0$, в данном случае, при $\delta_0 \le 0.05$.

## Литература

1. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
2. **Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.** Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986.
3. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1989.
4. **Лаврентьев М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1962.
5. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
6. **Танана В.П.** Методы решения операторных уравнений. — М.: Наука, 1981.

7. **Танана В.П., Рекант М.А., Янченко С.И.** Оптимизация методов решения операторных уравнений. — Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1987.
8. **Engl H.W., Hanke M., and Neubauer A.** Regularization of Inverse Problems. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1996.
9. **Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.** Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
10. **Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu.** Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. — Dordrecht: Springer, 2004.
11. **Винокуров В.А.** О погрешности приближенного решения линейных обратных задач // ДАН СССР. — 1979. — Т. 246, № 4. — С. 792–793.
12. **Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987.
13. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995.
14. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
15. **Тихонов А.Н.** Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. — 1943. — Т. 39, № 5. — С. 195–198.
16. **Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.** Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990.
17. **Ягола А.Г., Дорофеев К.Ю.** Метод расширяющихся компактов решения некорректных задач при условии истокопредставимости // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. — 1999. — № 2. — С. 64–66.
18. **Titarenko V.N., Yagola A.G., Dorofeev K.Yu., and Nikolaeva N.N.** New approach to error estimation to ill-posed problems with applications to inverse problems of heat conductivity // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2002. — Vol. 10, № 2. — P. 155–170.
19. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. — М.: УРСС, 2010.
20. **Леонов А.С.** Численная реализация специальных регуляризующих алгоритмов для решения одного класса некорректных задач с истокообразно представимыми решениями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2001. — Т. 4, № 3. — С. 269–280.


*Поступила в редакцию 5 декабря 2013 г.,*
*в окончательном варианте 29 января 2014 г.*