НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА С ТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. И. Токатлы (Москва)

Рассмотрим следующую задачу. Бесконечный круглый цилиндр из диэлектрика обтекается несжимаемой невязкой жидкостью. На бесконечности поток однороден и скорость перпендикулярна оси цилиндра. На оси цилиндра расположен проводник с током, создающий магнитное поле. При $t = 0$ «включается» проводимость $\sigma = \mathrm{const}$, т. е. жидкость, обтекающая цилиндр, становится проводящей. Предполагается, что магнитное число Рейнольдса $N_{Rem} = V_0 r_0 / \nu_m \ll 1$ и индуцируемым магнитным полем можно пренебречь, электрическое поле $\mathbf{E} = 0$ и ток определяется соотношением $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{H} / c$.

Так как в рассматриваемом случае векторы скорости и магнитного поля лежат в одной плоскости, то уравнение движения [1] после применения к нему операции rot приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \beta\,(\mathbf{h}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\times\mathbf{h} \tag{1}$$

$$\mathbf{R} = r_0\mathbf{r}, \quad \mathbf{H} = H_0\mathbf{h}, \quad \mathbf{v} = V_0\mathbf{u}, \quad t = T_0\tau, \quad T_0 = \frac{r_0}{V_0}$$

$$\beta = \frac{r_0 V_0 H_0^2}{4\pi\rho_0 V_0^2 \nu_m}, \qquad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

Здесь H_0 — величина магнитного поля на границе цилиндра, V_0 — скорость однородного потока жидкости на бесконечности, r_0 — радиус цилиндра, ρ_0 — плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, c — скорость света. Будем искать решение (1) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tau\mathbf{u}_1 + \tau^2\mathbf{u}_2 + \ldots \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим для определения $\mathbf{u}_n$ следующую систему:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_0 = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{u}_1 = \beta\,(\mathbf{h}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_0\times\mathbf{h}, \ \ldots \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_n = \frac{\beta}{n}(\mathbf{h}\cdot\nabla)\mathbf{u}_{n-1}\times\mathbf{h} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}(\mathbf{u}_k\cdot\nabla)\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_{n-(k+1)}$$

Учитывая уравнение непрерывности

$$\mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0 \tag{4}$$

можно определить $\mathbf{u}_n$ через функцию тока ψ_n

$$u_{nr} = \partial\psi_n / r\partial\theta, \qquad u_{n\theta} = -\,\partial\psi_n/\partial r$$

Граничные условия таковы:

$$\psi_n/_{r=1} = 0, \qquad \psi_n \to 0 \quad \text{при } r\to\infty \qquad (n \geqslant 1), \qquad \psi_0 = (r - r^{-1})\sin\theta$$

При $\tau \to 0$ из (3) легко находим

$$\psi = (r - r^{-1})\sin\theta + {}^1/_2\,\beta\tau\,[{}^1/_4\,(r^{-1} - r^{-3}) - r^{-1}\ln r]\sin\theta + \tau^2\,\{{}^1/_2\,(\beta/4)^2\,[{}^7/_{12}r^{-1} - {}^1/_2\,r^{-3} - {}^1/_{12}\,r^{-5} - r^{-3}\ln r]\sin\theta + \beta\,[{}^{13}/_{96}\,r^{-2} - {}^1/_6\,r^{-4} + {}^1/_{32}\,r^{-6} - {}^1/_4\,r^{-2}\ln r]\sin 2\theta\} + O(\tau^3)$$

При $r \to 1$, полагая $r = 1 + \rho$, $(\rho \ll 1)$, имеем

$$\psi = \rho\,[(2 - {}^1/_4\,\beta\tau + {}^1/_{96}\,(\beta\tau)^2)\sin\theta - {}^1/_{24}\,\beta\tau^2\sin 2\theta]$$

$$u_r = \rho\,[(2 - {}^1/_4\,\beta\tau + {}^1/_{96}\,(\beta\tau)^2)\cos\theta - {}^1/_{12}\,\beta\tau^2\cos 2\theta]$$

Из последнего выражения следует, что линии тока «отходят» от цилиндра и происходит торможение жидкости, причем около задней критической точки скорость изменяется на большую величину, чем около передней критической точки.

Рассмотрим теперь течение при $\beta \to 0$. В этом случае поле скоростей возмущается слабо, и (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \beta\,(\mathbf{h}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_0\times\mathbf{h} \tag{5}$$

а (3) переходит в систему

$$\Delta\psi_0 = 0, \quad \Delta\psi_1 = -\beta\,(\mathbf{h}\cdot\nabla)^2\,\psi_0, \ \ldots, \quad \Delta\psi_n = -\frac{1}{n}(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\,\Delta\psi_{n-1} \quad (n \geqslant 2) \tag{6}$$

Решение (6) можно представить в виде

$$\psi_0 = (r - r^{-1}) \sin\theta, \qquad \psi_n = \beta \sum_{k=0}^{q} R_{nk} \sin(n - 2k)\theta \quad (n \geqslant 1) \tag{7}$$

$$R_{nk} = c_{nk} r^{2k-n} + \sum_{m=0}^{n} b_{nkm} \left[(1 - \delta_{0k}\delta_{nm}) r^{2m-3n} + \delta_{0k}\delta_{nm} \frac{\ln r}{r^n} \right]$$

$$c_{nk} = - \sum_{m=0}^{n} b_{nkm} (1 - \delta_{0k}\delta_{nm}), \qquad b_{nkm} = \frac{a_{nkm}}{(2m - 3n)^2 - (n - 2k)^2} \begin{pmatrix} m \neq n \\ k \neq 0 \end{pmatrix} b_{n0n} = - \frac{a_{n0n}}{2n}$$

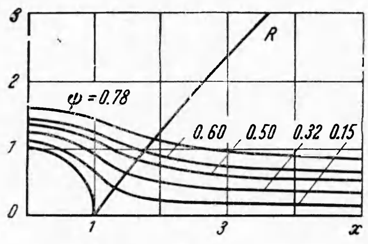
$$a_{nkm} = \frac{1}{n} \Big\{ (n + k - m) \Big[(1 - \delta_{0k})(1 - \delta_{0m}) \frac{1 - \delta_{qk}(-1)^n}{1 + \delta_{qk}} a_{n-1,\, k-1,\, m-1} -$$

$$- (1 - \delta_{nm}) \frac{1 + \delta_{qk}(-1)^n}{1 + \delta_{qk}} a_{n-1,\, k,\, m} \Big] + (2n - k - m) \Big[(1 - \delta_{0m}) \frac{1 + \delta_{qk}(-1)^n}{1 + \delta_{qk}} \times$$

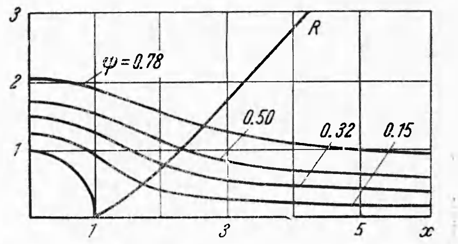
$$\times a_{n-1,\, k,\, m-1} - (1 - \delta_{0k})(1 - \delta_{nm}) \frac{1 - \delta_{qk}(-1)^n}{1 + \delta_{qk}} a_{n-1,\, k-1,\, m} \Big] \Big\}$$

$$q = q_n = q_{n-1} + {}^1/_2 [1 - (-1)^n], \qquad q_1 = 0, \qquad a_{100} = -1, \qquad a_{201} = 1$$

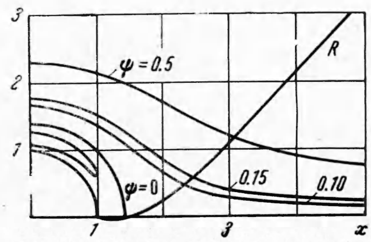
Здесь δ_{nm} — символ Кронекера. Из оценки отброшенных членов следует, что полученное решение (7) применимо при $\tau \ll 1 / \beta$.



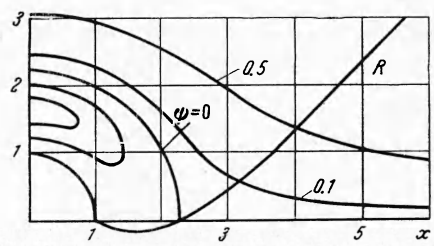
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Более простые выражения получаются в другом предельном случае, когда $\beta \to \infty$. Введя новую переменную $\tau_1 = \beta\tau$, приведем (1) к виду

$$\beta \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{u}}{\partial \tau_1} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{u} = \beta (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{u} \times \mathbf{h} \tag{8}$$

При $\beta \to \infty$ пренебрегаем вторым членом в (8) и получаем для определения функции тока ψ уравнение

$$\partial (\Delta\psi) / \partial\tau_1 = -(\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 \psi \tag{9}$$

Решение (9) можно представить в виде

$$\psi = \sin\theta \sum_{n=0} R_n = R \sin\theta, \qquad R_0 = r - r^{-1} \tag{10}$$

$$R_n = \frac{1}{r^{2n+1}} \left\{ (A_{n0} r^2 \ln r - B_{n0}) + \sum_{k=1}^{n} r^{2k} (A_{nk} - B_{nk}) \right\} \qquad (11)$$

$$A_{n0} = \frac{\tau_1}{4n^2 (n-1)} A_{n-1,0}, \quad A_{n1} = \frac{\tau_1}{4n^2 (n-1)} \left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} A_{n-1,0} + A_{n-1,1} \right]$$

$$A_{10} = -\frac{\tau_1}{2}$$

$$A_{11} = 0, \quad A_{nk} = \frac{\tau_1}{4n(n+1-k)(n-k)} A_{n-1,k} \quad (2 \leqslant k \leqslant n-1), \quad A_{nn} = -\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk}$$

$$B_{nk} = \frac{\tau_1}{4n(n+1-k)(n-k)} B_{n-1,k} \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1), \quad B_{nn} = -\sum_{k=0}^{n-1} B_{nk}, \quad B_{00} = 1$$

Вычисления R производились на ЭЦВМ для нескольких τ_1. На фиг. 1 приведен график R и линии тока при $\tau_1 = 2$. Видно, что при $\tau_1 = 2$ поле скоростей деформировалось еще слабо. Фиг. 2 соответствует $\tau_1 = 8$. Линии тока заметно отходят от цилиндра, а график R становится более пологим, что соответствует уменьшению скорости около цилиндра. При $\tau_1 = 16$ около цилиндра появляется область, в которой жидкость циркулирует, оставаясь около цилиндра (фиг. 3). С ростом τ_1 область с захваченной жидкостью увеличивается (фиг. 4, $\tau_1 = 32$).

Следует отметить, что если при $\beta \gg 1$ существует стационарное решение, то поле скоростей в стационарном режиме должно существенно отличаться от изображенного на фиг. 4, так как в стационарном режиме невозможно течение с замкнутыми линиями тока. Чтобы показать это, запишем уравнение движения в виде [1]

$$\rho_0 [\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{H} / c \qquad (12)$$

Интегрируя (12) вдоль линии тока, получаем при $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$

$$\oint v H_\perp^2 dl_v = 0 \qquad (13)$$

Последнее соотношение может удовлетворяться при $v \neq 0$ только при $H_\perp = 0$, т. е. когда линия тока совпадает с силовой линией магнитного поля. В рассматриваемой задаче это условие не выполняется. Отмеченная выше особенность решения (10) связана с тем, что оно применимо при $\tau_1 \ll \beta$.

В заключение отметим следующее. Если ток в проводнике изменяется со временем, то магнитное поле определяется из уравнений

$$\Delta a = N_{Rem} (\partial a / \partial \tau + \mathbf{u} \cdot \nabla a) \quad \text{при } r > 1, \qquad \Delta a = -i\delta(r) \quad \text{при } r < 1$$

При $N_{Rem} \ll 1$ правую часть первого уравнения можно заменить нулем, если $T_* / T_i \ll 1$ ($T_* = r^2{}_0 / \nu_m$, T_i — характерное время изменения тока в проводнике). В этом случае магнитное поле (с точностью до N_{Rem}) есть

$$h_\theta = i(\tau) / r, \qquad h_r = 0$$

Легко проверить, что если ток в проводнике изменяется по степенному закону

$$i(\tau) = \tau^m$$

и, кроме того, $\beta \gg 1$, то с точностью до членов $\sim 1 / \beta$ функция тока ψ определяется выражением

$$\psi = \sin\theta \sum_{n=0} R_n \left(\frac{2m+1}{\beta} \right)^{2mn} \left(\frac{\tau_1}{2m+1} \right)^{(2m+1)n} \qquad (14)$$

где R_n определяется формулой (11), в которой нужно положить $\tau_1 = 1$.

Автор благодарит А. И. Морозова за ценные советы при обсуждении работы.

Поступила 14 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.